ماسکو زیات

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

ماسکونیات

تصنیف

ڈبلیو۔ اِیچ۔ بیسنٹ ایس۔سی۔ڈی، ایف۔آر۔ایس

و

اے۔ایس۔ ریمزے، ایم۔اے

مترجمہ

محمد نذیرالدین ایم۔اے (عثمانیہ)

رُکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکارعالی

سنہ ۱۳۴۹ھ م سنہ ۱۳۴۰ف م سنہ ۱۹۳۱ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارعالی حیدرآباد دکن

فہرست اغلاط

نوٹ:- مطالعہ سے قبل ان غلطیوں کی تصحیح فرمالیجئے۔

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱	۳	پائی	پانی	۱۶	۱۲	(ما-ر)/ر	(ما-ب)/ر
۲	۱۴	جذی	جزی	۱۸	۸	۱/عہ + ت	۱/عہ + ٹ
〃	۲۱	اور مارہ	اور پارہ	〃	۱۱	ت	ٹ
〃	۲۱	ریر	زیر	۲۱	۲۱	قوس	قووس
۴	۱۹	ہونگیں	ہونگی	۲۴	۶	غارج	خارج
۵	۱۸	ق اَب	ق ا ب	۲۵	۱۴	جذی	جزی
〃	۲۱	س ٹ	س ث	〃	۱۸	جز	جزو
۶	۱۰	گزرنے	سے گزرنے	۳۰	۸	دباؤ کے لئے دباؤ	دباؤ
۸	۴	ح	ج	〃	۱۲	ج/م جی/دم	ج/م نوم ثقلی
〃	۱۵	پیائش	پیمائش	۳۲	۹	-	+
۹	۰۱۱	پیالش	پیالشس	〃	۲۰	استوار	استوار
〃	۱۹	جز	جزو	۳۴	۷	کیت	کمیت
۱۰	۴	نشارے	فشارے	〃	۱۸	سال	سیال
۱۱	۶	الکائی	اکائی	〃	۲۰	ت	ٹ
〃	〃	اسراغ	اسراع	۳۶	۲	میں	ہیں
〃	۱۳	کجھ	کچھ	〃	۱۱	پیالی	پیالہ
〃	۲۲	حجم	حجم ع	۳۷	۲۰	فہ	۰ قہ
۱۳	۴	منجانس	متجانس	〃	۲۲	لہ × ھ	لہ × قہ
〃	۱۸	(د+معف د)	(د+معف د)عہ	۳۸	۹	مریح	مربع
۱۵	۶	مکانی	مکانی	〃	۱۰	۴/۳ ۱۱ ج۲ س	[illegible] ۱۱ ج۳ س

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۹	۶	وزن	وزن
۴۴	۵	ع ن	ع ن
″	۱۵	کمزوز	کمزور
″	۱۷	ے	<
″	۱۹	—	(زائد ہے نکال لیا جائے)
۵۱	۲	] ما	$\overline{ما}$
۵۲	۴	ر^{π/۲}	ر^{π/۲}
۵۳	۳	نو م	نو − م
		(نسب نما میں پہلا)	
۵۴	۸	ا آ	$\overline{ما}$
″	۱۵	دائرہ ایک	دائرہ کا ایک
۵۷	۲	جہ جم طہ	بہ جم طہ
″	۵	ب/عا	ب^۲/عا
″	۱۴	مائع میں	مائع ہیں
۵۸	۱	داؤ	دباؤ
″	۶	بج	ج
۵۹	۰	د	ر
		(دوسری شکل میں)	
۶۰	۷	مشاہدہ	یہ مشاہدہ
۶۲	۱۷	استوانہ	اسطوانہ
۶۵	۱۹	ستیال	سیال
۷۲	۲۰	سیال	سیال
۷۴	۲۰	د :	د
″	۲۰	ے	سے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷۴	۲۱	حاصل ربون	حاصل ضربوں
۷۵	۹	شوت	شدت
″	۲۰	وزل	وزن
۷۶	۱۱	یر	پر
۷۹	۰	و	ا
		(شکل میں)	
۸۰	۱	ب ا ج	ب اج
″	۲	نو ب	ا، ب
″	۱۱	دونوں زائدوں	دو زائدوں
۸۱	۸	<	>
″	۹	ت	ث
″	۱۰	<	>
″	۱۷	کثافت	کثافت
۸۳	۳	توازل	توازن
۸۵	۹	قانون	قانون
″	۱۵	اَ د ب	اَ د ب
۸۶	۱۱	یہی	یہی
۸۷	۳	بوجب	بموجب
″	۱۴	ھَ ، ھَ	ھ ، ھَ
″	۱۷	$-\frac{1}{2}$ و بہ (ج + ج/۲)	(یہ زائد ہے نکال دیا جائے)
″	۱۷	بہ/۲	بہ/۳
″	شکل	ا (نیچے کا)	اَ
۸۸	۶	ق د قَ	ق د قَ
۸۹	۳	ذا	دا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸۹	۷	تیں	تین	۱۳۶	۱۴	و	وَ
۹۰	۴	ح	ح۳	۱۴۱	۱۱	یٰ	ی
"	۱۲	ا۲	اَ۲	"	۱۴	اور	اور
"	۱۴	اکانی	اکائی	۱۴۳	۱۲	ترشوں	تراشوں
۹۱	۶	ج	ج	۱۴۵	۹	و	وَ
۹۴	۱۷	مخروطی	مخروط	"	۱۹	و × ھ ھ	اسلئے و × ھ ھ
۹۵	۲۰	تراؤ	تیراؤ	۱۴۸	۴	ح۱/ب	ح۱/ب
۱۰۲	۲۰	ن ق	نَ قً	۱۵۱	۳	نانہ	فانہ
۱۰۶	۱	قائمیت کے	قائمیت کی	۱۶۰	۱۵	۲/۵	۲/۳
"	۹	نیتر	نیتر	۱۶۱	۲۲	یوری	پوری
۱۰۷	شکل	ل (اوپرکا)	اَ	۱۶۸	۷	ل	ا
۱۰۹	۶	متناسب	متناسب	۱۶۹	۱۴	متغیر	تغیر
"	۱۳	ع	ع	۱۷۰	۲	تعین	تسین
۱۱۰	۱۲	ئے	کے	۱۷۱	۵	رکھ کر	رکھنے سے
۱۲۰	۱۶	-جب ط/۲	×جب ط/۲	"	۱۷	ت	ف
۱۲۶	۱	ھ	ھَ	۱۷۶	۱۱	- ب/ج	× ب/ج
"	۴	ی/ت	ی/ت	۱۸۰	۱	ج	ج
۱۲۹	۳	ذ ج اَ	اج اَ	"	۲۱	م ث	م ث
۱۳۰	۱۸	ارپروار	اوپروار	۱۸۳	۱۹	پر	(زاید ہے نکالدیا جائے)
۱۳۱	۴	ث ھ (دوسرا)	ث ھَ	۱۸۴	۱۱	جانے	جائے
۱۳۵	۱۱	ط	طا	۱۸۷	۲	پھیکنے	پھیلنے
"	۱۱	ح ث	ج ث	۱۸۸	۱۹	کرے	کے
۱۳۷	۴	ج	ح	۱۹۰	۸	ح	ح
۱۳۸	۲۱	لا	لاَ	"	۱۱	ح-۱ ج	ح-۱ ج

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۹۰	۱۹	ف ۲/۳	ف : ۲/۳
۱۹۲	۱۱	۱−	۱−}
۱۹۴	۱۸	فرد/د	م فرد/د
۱۹۴	۱۸	(	)
۲۰۶	۵	ح	[illegible]
"	۱۴	ریکھیگا	رکھیگا
۲۱۲	۱۵	مستدیہ	مستدیر
۲۱۴	۱	و × ن نَ	د × ن نَ
"	۴	توتوں	قوتوں
"	[illegible]	جم ف	جم سف ف
۲۱۹	۸	ف	ف = ۱
"	۱۵	).	(
۲۱۷	۱	ب	ث
۲۲۱	۱۶	۳ م۲ =	۳ م۲ −
۲۲۲	شکل	[illegible]	[illegible]
۲۲۵	۳	میں سے	میں
۲۲۶	۲۰	جف۲ ا	جف۲ ی
۲۲۸	۱	جف ا	جف لا
۲۲۹	۸	ت × د ع	ثَ × د ع
۲۳۱	۹	ا/ر	ا۲/ر
۲۳۳	۴	جف ا	جف ا′
۲۴۰	۵	−	ہ
۲۵۰	۱	لہ	کہ
۲۵۱	۱۹	ردعمل	کیا ل
۲۵۲	۳	ا۲ حب۲ ف	ا۲ حب۲ ف
۲۵۵	۹	۲ ت −	۲ ت =
۲۶۰	۴	فرسَ، فرس۲	فرسَ، فرسَ۲
"	۱۵	صَغر	صِفر
"	"	.فرسلہ	فرس
۲۶۲	۲	ب ج	ب − ج
۲۷۹	۴	+	−
۲۸۴	۱۴	تو	تب
۲۸۶	۶	Darbou	Derboux
۲۸۸	۹	Britanica	Britannica
۲۹۲	۳	Britanica	Britannica
"	۶	uber der	Uber die
۲۹۹	۱	=	−=
۳۰۳	۶	) (درمیانی)	(نکالدیا جائے)
۳۰۹	۱۴	(لا۲ + ۹)	(لا۲ + ۹)۲
۳۱۵	۱۲	نقل	ثِقل
۳۱۶	۱	اُس حرکت صرف	صرف اُس حرکت پر
"	۷	سال	سیال
۳۱۸	۱۷	منحن	ہیخن
۳۲۲	۵	ر ب	ر ب

نوٹ:- صفحہ ۱۳۰ پر پہلی سطر کے بعد حسب ذیل عبارت کا اضافہ کیا جائے

ہ نیز ث کے ہٹاؤ کی وجہ سے جسم کے وزن کے
معیار کا نقصان = و(ث ل − گ) ط ہ

فہرست مضامین

ماسکونیات

باب اول

باب دوم

باب سوم

باب چہارم

باب پنجم

باب ششم

باب ہفتم

باب ہشتم

باب نہم

باب دہم

باب یازدہم

۷۸۶

ماسکونیات

باب اوّل

۱۔ ہم عام تجربہ سے یہ معلوم کرتے ہیں کہ ایسی اشیار میں جیسے ہوا اور پانی ہیں یہ خواص پائے جاتے ہیں کہ ان کے مادہ کے حصے ایک دوسرے سے نہایت آسانی کے ساتھ علیحدہ کیئے جا سکتے ہیں اور تقسیم پذیری کی ان میں انتہائی قابلیت ہے۔ ان خواص کی توضیح مختلف عام واقعات سے ہو سکتی ہے۔ مثلاً سیال چیزیں بآسانی ایک دوسرے کے اندر داخل ہو جاتی ہیں ایک سیال کی بہت کم مقدار کو دوسرے سیال کی بہت بڑی مقدار میں شامل کرنے سے اسکو انتہائی طور پر لطیف بنایا جا سکتا ہے۔ ہوا پمپ کے ذریعہ ہوا کو بہت رقیق کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح کے دوسرے واقعات سے یہ واضح ہوتا ہے کہ عملی طور پر سیال کی قسمت پذیری غیر محدود ہے اور یہ بھی معلوم ہو جاتا ہے کہ سیال کے حصوں کو ایک دوسرے سے جدا کرنے میں بہت ہی قلیل مزاحمت محسوس ہوتی ہے۔ اور عام طور پر قابل نظر انداز۔ ان مشاہدات کی تعمیم سے خود بخود ہم ایسی شے کا خیال کر سکتے ہیں کہ جس میں یہ خواص بدرجۂ اتم موجود ہوں جو کم یا زیادہ ہر سیال عام میں پائے جاتے ہیں۔ اس لئے ہم ذیل کے نتیجہ پر پہنچتے ہیں۔

سیال کامل کی تعریف

۲۔ سیال کامل ایسے ذرات کا مجموعہ ہوتا ہے جو خفیف ترین قوت کے زیر عمل فوراً ایک دوسرے سے جدا ہو جاتے ہیں۔ اس طرح اگر ایک لا انتہا پتلا ستوی اس قسم کے سیال کو کسی سمت میں تقسیم کرے تو اس عمل تقسیم میں کوئی مزاحمت وقوع پذیر نہ ہوگی

اور مستوی پر سیال کا دباؤ صرف عمودی سمت میں عمل کریگا۔ یعنی سیال کامل میں لزوجیت معدوم فرض کی جاتی ہے اور رگڑ کی قسم سے کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔

اس طرح تعریف متذکرہ بالا سے سیال کی بنیادی خاصیت حسب ذیل قرار پاتی ہے۔

سیال کامل کا دباؤ ہمیشہ اُس سطح پر عمود دار عمل کرتا ہے جس کے ساتھ اس کا تماس ہو۔

دراصل کوئی سیال ایسا نہیں ہے کہ جس پر عمل تقسیم یا تفصیل سے کم و بیش مزاحمت محسوس نہ ہوتی ہو۔ لیکن جسطرح کہ استوار جسم کا مفہوم قدرت کے ایسے اجسام سے حاصل ہوتا ہے جنکی شکل میں ذراسی تبدیلی بہت بڑی قوتوں کے استعمال سے پیدا ہوتی ہے اسی طرح سیال کامل کا مفہوم ایسی چیزوں کے مشاہدہ سے حاصل ہوتا ہے جن میں یہ خاصیت ہو کہ ان کے اجزا بیحد آسانی سے جدا ہو سکیں اور دیکھنے میں عمل تقسیم درجہ انتہائی تک ہو سکے۔

تمام سیال خواہ اُن کا درجہ لزوجیت کچھ ہی ہو ذیل کی تعریف میں آجاتے ہیں۔

سیال ایسے ذرات کا مجموعہ ہے جو خفیف ترین قوت کے اثر کو قبول کر لیتے ہیں جو ان کے جدا کرنے میں کافی عرصہ تک لگائی جائے۔

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ساکن لزج سیال میں مماسی تعامل یا جذبی تناؤ نہیں ہوتا۔ اور اس لئے سیال کامل کی طرح کسی ساکن سیال کا دباؤ ہمیشہ اس سطح پر عمود وار عمل کرتا ہے جو سیال کو مس کرتی ہے۔ اس طرح تمام سیالوں کے لئے بلالحاظ لزوجیت علم سکون سیالات کے تمام مسائل درست ہیں۔

علم حرکت سیالات (ماحرکیات) میں سیال کی لزوجیت کے شامل کرنے سے حرکت کی مساواتیں بہت حد تک بدل جاتی ہیں۔

۲ — سیالات کی دو قسمیں ہیں۔ مائعات اور گیسیں۔ اول الذکر ایسی اشیاء ہیں۔ جیسے پانی اور پارہ جو قابل قدر دب نہیں سکتیں جب تک کہ بہت بڑے دباؤ کے زیر عمل نہ ہوں موخرالذکر جو آسانی سے دب سکتی ہیں اور آزادانہ طور پر پھیل سکتی ہیں۔

اسلئے بعض اوقات ہم قسم اول کے سیالات کو بے لچک اور قسم دوم کو لچکدار کہینگے۔

۳ — سیالات پر جاذبہ ارض کا اثر اسی طرح ہوتا ہے جس طرح دیگر اجسام پر۔ مائعات کی صورت میں تو یہ ظاہر ہے اور یہ کہ ہوا بھی وزن رکھتی ہے ایک بند برتن کو حتی الامکان ہوا سے

خالی کر کے وزن کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے نیز جوار بھاٹا کے وقوع سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سیالات پر سورج اور چاند کی کششیں اسی طرح عمل کرتی ہیں جس طرح کہ زمین کی کشش۔ ان واقعات کی بنا پر نیز اس طرح کے اور واقعات کی بنا پر مان لیا جاتا ہے کہ تمام قسم کے سیالات قانون تجاذب کے تابع ہیں۔ یعنی اس قانون کے بموجب وہ دوسری مادی اشیاء پر کشش کا عمل کرتے ہیں اور ان پر بھی ان مادی اشیاء کی کشش کا عمل ہوتا ہے۔

سیالی دباؤ کی پیمائش

۵۔ فرض کرو کہ کچھ سیالی مادہ بعض قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور ایک مستوی سطح سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہے اور اس کے رقبہ ا پر جو سیال کا عمل ہے اس کے خلاف توازن پیدا کرنے کے لئے سطح پر قوت ق لگانی پڑتی ہے۔

اگر سیال کا عمل ا پر یکساں ہو تو $\frac{ق}{ا}$ سے یہ سیالی دباؤ فی اکائی رقبہ تعبیر ہوگا اگر دباؤ یکساں نہ ہو تو رقبہ ا کے ہر نقطہ پر اسکو متغیر خیال کیا جائیگا اور اگر ایک نقطہ کے گرد کے چھوٹے رقبہ عہ پر قوت ءق عمل کرے تو $\frac{ءق}{عہ}$ سے تقریباً دباؤ کی شرح رقبہ عہ پر تعبیر ہوگی۔

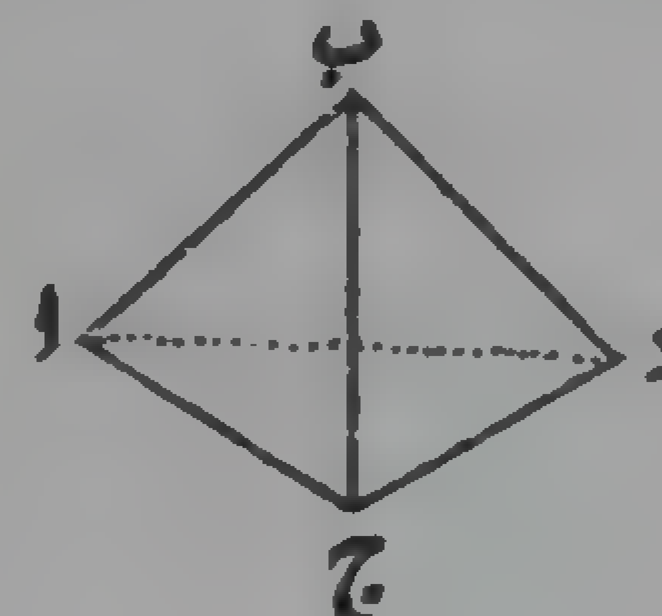
اگر عہ کو لاانتہا کم کر دیا جائے تو فرض کرو کہ انتہا میں $\frac{ءق}{عہ} = د$ تب بطور تعریف کے اس د کو ہم نقطہ زیر بحث پر دباؤ کا ناپ قرار دینگے۔ د وہ قوت ہوگی جو اکائی رقبہ پر لگائی جائیگی اگر اس اکائی رقبہ پر شرح دباؤ یکساں خیال کی جائے اور یہ نقطہ زیر بحث پر کے دباؤ کے مساوی ہو پس اگر کسی نقطہ پر دباؤ د ہو تو اس کے گرد کے چھوٹے رقبہ عہ پر قوت د عہ + جہ عمل کریگی جہاں جہ انتہا میں د عہ کے مقابلہ میں صفر ہو جاتا ہے جبکہ عہ (اور اسکی وجہ سے د عہ) صفر ہو جائے۔

۶۔ ساکن سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔ سیال کے خواص میں یہ خاصیت سب سے اہم ہے اس کا ثبوت سیال کی بنیادی خاصیت سے حسب ذیل طریقہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہم سیال کے ایک چھوٹے ذو اربعۃ السطوح کے توازن پر غور کریں تو یہ معلوم ہوگا کہ اس کے رخوں پر کے دباؤ اور اس کی کمیت پر کی قوت عاملہ ملکر متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتی ہیں۔

اول الذکر قوتیں رخوں کے رقبوں پر منحصر ہونیکی وجہ سے ایسے بدلتی ہیں جیسے مجسم (جسکو ہمذات یا متجانس فرض کیا گیا ہے) کے کنارے کا مربع اور ثانی الذکر قوت حجم اور کثافت پر پر منحصر ہونے کی وجہ ایسی بدلتی ہے جیسے مجسم کے کنارے کا مکعب۔ اور اس لئے اگر مجسم کو لا انتہا گھٹا دیا جائے جبکہ اس کی شکل ہمیشہ متشابہ رہے تو موخر الذکر قوت بمقابلہ رخوں پر کے دباؤ کے معدوم ہو جاتی ہے۔ اور اس لئے یہ دباؤ خود متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ رخوں ا ب ج اور ب ج د پر کے دباؤ کی شرحیں علی الترتیب د، دَ سے تعبیر ہوتی ہیں کنارے ا د کے متوازی ان قوتوں کو تحلیل کرو۔ تو چونکہ رقبہ ا ب ج اور ب ج د کے ظل ا د پر کے علی القوائم مستوی پر رہی ہیں (فرض کرو کہ ہر ایک ع کے مساوی ہے۔)



∴ دع = دَع

یعنی د = دَ

اور اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دوسرے دو رخوں پر کے دباؤں میں سے ہر ایک د یا دَ کے مساوی ہے۔

اب چونکہ ذوالاربعۃ السطوح کے رخ کسی سمت میں لئے جا سکتے ہیں اس لئے کسی نقطہ پر کا دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

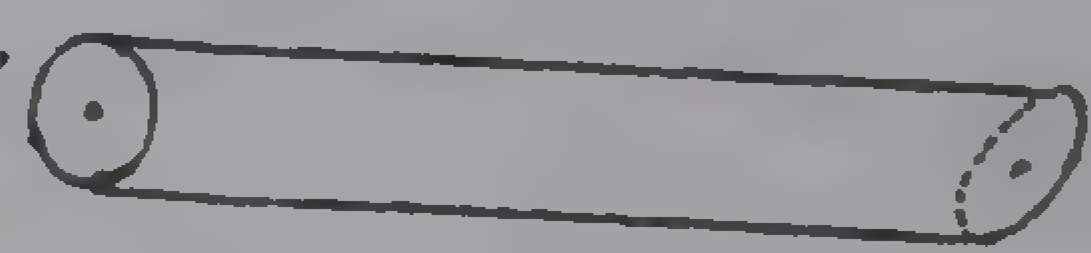
یہ مسئلہ اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ سیال متحرک ہو۔ کیونکہ ڈی ایلمبرٹ کے اصول کے مطابق اگر موثر قوتوں کی سمت الٹ دی جائے تو یہ بیرونی یا عاملہ قوتوں کے ساتھ مل کر رخوں پر کے دباؤ کے ساتھ متوازن ہونگیں۔ اور موثر قوتیں اسی رتبہ کی چھوٹی مقداریں ہیں جس رتبہ کی عامل قوتیں اور اس لئے بمقابلہ دباؤں کے معدوم ہو جاتی ہیں۔

۷۔ مسئلہ بالا کا حسب ذیل ثبوت کوشی کی مثالوں سے لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق سیال میں ایک دوسرے سے محدود فاصلے پر دو نقطے ہیں۔ محور ن ق کے گرد ایک بہت چھوٹے نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ۔ ق میں سے ایک مستوی ن ق کے علی القوائم کھینچو اور ن میں سے کوئی مستوی گذارو اور ن ق کی کمیت کے توازن پر غور کرو۔

اس کے سروں پر کے دباؤ اور منحنی سطح کا دباؤ اور وہ بیرونی قوتیں جو اس پر عمل کرتی ہیں ایک متوازن قوتوں کے نظام کو تعبیر کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ د، دَ نقاط ق اور ن پر کے دباؤ ہیں۔ اور اسطوانہ کی تراش ق کا رقبہ عہ اور تراش ن کا رقبہ عہَ ہے۔



بخ ن پر کے دباؤ دَ عہَ کو اگر اسطوانہ کے محور کے متوازی تحلیل کریں تو جزو تحلیلی دَ عہ کے مساوی ہے۔ اور اسلئے

دَ عہ - د عہ = ق ن کے متوازی قوت عاملہ کا جزو تحلیلی

نقطہ ن میں سے گزرنے والے مستوی کی سمت خواہ کچھ ہی ہو یہ قوت عاملہ جبکہ اسطوانہ کا نصف قطر لاانتہا چھوٹا ہو بالآخر اسطوانے کے حصے ق ن پر کی قوت عاملہ کے مساوی ہو جاتی ہے جبکہ یہ حصہ ایسے مستوی کے ذریعہ کاٹا جائے جو نقطہ ن میں سے گزرے اور محور پر عمود ہو[1]۔

پس قوت عاملہ ہے

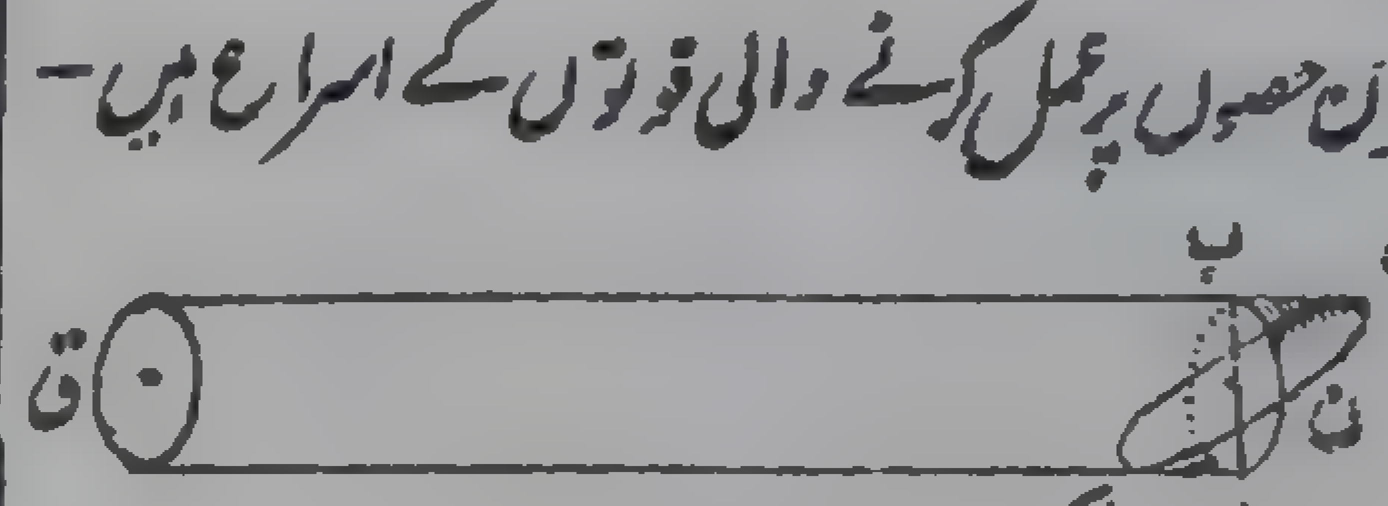
∫ (ب سے ن ق تک) س ث عہ فرلا

جہاں ک س وہ قوت ہے جو سیالی ذرہ ک پر نقطہ ق سے فاصلہ لا پر عمل کرتی ہے۔ اسلئے

دَ = د + ∫ (ن ق) س ث فرلا

[1] حسب ذیل تشریح ثبوت کے اس حصہ کو مکمل کرے گی۔

فرض کرو کہ و ب، وَ بَ نقطہ ب میں سے گزرنے والے دو مستوی ہیں۔ ث، ثَ علی الترتیب و ن وَ اور ب ن بَ کی اوسط کثافتیں ہیں۔ س، سَ سیال کے اِن حصوں پر عمل کرنے والی قوتوں کے اسراع ہیں۔ تو ق و ب اور ق وَ بَ (جن کے حجم مساوی ہیں) پر عمل کرنے والی قوتوں کا فرق



= و ن وَ اور ب ن بَ پر عمل کرنیوالی قوتوں کا فرق

= (سَ ثَ - س ث) × حجم و ن وَ

= مف (س ث) × ۲/۳π عہ × و وَ ، (عہ تراش ق کا رقبہ ہے)

یعنی دَ نقطہ ن میں سے گذرنیوالی مستویوں کے لیے مستقل ہے۔

سیالی دباؤ کا انتقال

اگر کسی ساکن مائع کی سطح پر یا اس کے کسی دوسرے حصہ پر دباؤ ڈالا جائے یا اس میں اضافہ کیا جائے تو یہ دباؤ یا اضافہ دباؤ مائع کے سب حصوں میں مساوی طور پہ منتقل ہو جاتا ہے۔

سیالوں کی یہ خاصیت بالراست تجربہ کی بنا پر حاصل ہوئی اور اس طور پر بعض اوقات اسے مان لیا جاتا ہے لیکن ہم سیال کی تعریف سے اسکو اخذ کرسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ساکن مائع کی سطح میں ن کوئی نقطہ ہے اور سیال کے اندر ق کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ خط مستقیم ن ق کے گرد ایک چھوٹے نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ جو نقطہ ن پر کی سطح اور ق میں گزرنے والے اور ن ق پر علی القوائم مستوی سے محدود ہو۔

اگر نقطہ ن پر کے دباؤ کو بقدر د کے زیادہ کیا جائے اور اسطوانہ پر کی اضافہ شدہ قوت کو اس کے محور کی سمت میں تحلیل کیا جائے تو جزو تحلیلی د عہ کے مساوی ہے جہاں عہ اسطوانہ کے محور پہ علی القوائم مستوی تراش کا رقبہ ہے اس کے مساوی قوت د عہ کو سمت ق ن میں نقطہ ق پہ عمل کرنا چاہیئے کیونکہ منحنی سطح پر سیال کا دباؤ محور کے علی القوائم ہے اس لئے ق پہ کا دباؤ بقدر د کے بڑھ جاتا ہے۔

اگر خط مستقیم ن ق پورے طور پر سیال کے اندر واقع نہ ہو تو ن اور ق کو مختلف خطوط سے جو بالتمام سیال کے اندر ہوں ملایا جاسکتا ہے۔ اور پھر ثبوت بالا کی تکرار سے ثابت ہوسکتا ہے کہ دباؤ د نقطہ ق پر بغیر کسی قسم کی تبدیلی کے منتقل ہو جاتا ہے۔

بقیہ نوٹ صفحہ ۵۔ اور اسلئے

$$دَ = د + \int^{نق} س\ ث\ فرلا + \frac{۲}{۳۳}\ ؤ\ آ \times مف\ (س\ ث)$$

تو تین جونکہ مسلسل ہیں اس لئے آخری رقم مساوات کی دوسری ارقام کے مقابلہ میں صریحاً معدوم خیال کیجاسکتی ہے اور اسلئے دَ مستقل ہے۔

———(۵)———

۹ — اس خاصیت کی بنا پر مائع کا مادہ مشین کے طور پر قوت کی تضعیف کے لئے استعمال ہو سکتا ہے[۱]
اگر ایک پانی سے بھرے ہوئے بند برتن میں دو سوراخ کردیئے جائیں اور ان کو خوب بھنسکر
آنے والے فشاروں اُ اَ سے بند کردیا جائے اور پھر اگر کوئی قوت ق ایک فشارے پر لگائی جائے
تو دوسرے فشارے پر ایک ایسی قوت قَ لگانی پڑے گی کہ نسبت قَ : ق نسبت اَ : اُ
کے مساوی ہوجاوے۔ کیونکہ رقبہ اُ کے ہر نقطہ کے دباؤ میں اضافہ کی شرح رقبہ کے ہر نقطہ پر منتقل
ہوجاتی ہے۔ اور اسلئے اُ پر کی قوت اس کے رقبہ پر منحصر ہوتی ہے۔
ان دونوں فشاروں کا درمیانی عمل بیرم کے مشابہ ہے اور یہ ظاہر ہے کہ اَ کو بڑھانے سے (۶)
اور اُ کو گھٹانے سے ہم نسبت قَ : ق کو جتنا بڑھانا چاہیں بڑھا سکتے ہیں۔

۱۰ — یہ دیکھا گیا ہے کہ کسی سیال کا دباؤ اس کی کثافت اور تپش پر منحصر ہوتا ہے۔ نیز اسکی نوعیت پر
تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ اگر تپش مستقل رہے تو دباؤ اُس فضا کے بالعکس متناسب ہوتا ہے
جسکو سیال گھیرے ہوئے ہے یعنی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے اس کی کثافت۔
اس قانون کو پہلے بائل نے بیان کیا لیکن یہ اس عام قانون کے نتیجہ کے طور پر اخذ ہوسکتا ہے
کہ گیسوں کے کسی آمیزے کا دباؤ جبکہ ان میں کیمیائی عمل نہ ہوتا ہو ایسے دباؤں کا مجموعہ ہوتا
ہے جو گیسیں علیحدہ علیحدہ پیدا کرتی ہیں جبکہ ایک ایک کرکے جداگانہ طور پر برتن کو ان سے بھرا جائے
کیونکہ برتن میں گیس کی مقدار کو دوچند کرنے سے دباؤ بھی دوچند ہوجائیگا اور سیال کے مقدار
میں کوئی اور اس قسم کی تبدیلی دباؤ میں اس طرح کی متناسب تبدیلی پیدا کردیگی۔
اسلئے اگر کسی گیسی سیال کی کچھ مقدار کی کثافت ث ہو اور اُس کا دباؤ د تو جب تک
کہ تپش وہی رہے

د = م ث

جہاں م مستقل ہے جسکو تجربہ کے ذریعہ اس مخصوص سیال کے لئے کسی معلومہ تپش پر معلوم کرنا ہوگا۔
اگر گیس کا حجم ح ہو جبکہ اس کا دباؤ د ہے اور حَ جبکہ دباؤ دَ تو

ح د = حَ دَ

[۱] براما کا شکنجہ سیالی مائعات کی اس خاصیت کے عملی استعمال کی ایک اچھی مثال ہے۔

یعنی ح د معلومہ تپش پر مستقل ہے۔

۱۱ ۔ دباؤ کے چھوٹے اضافہ کو جو نسبت اُس مکعبی (حجمی) بچک سے ہو جو اس قلیل اضافہ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اُس سے سیال کی لچک کی پیمائش کیجاتی ہے۔

اگر ح حجم ہو تو خفیف مکعبی بچک ـ $\frac{فرح}{ح}$ ہوگی اور لچک کا ناپ

$$- ح \frac{فرد}{فرح}$$

ہوگا۔

مستقل تپش پر گیس کی صورت میں ح د مستقل ہوتا ہے اور

$$\therefore د + ح \frac{فرد}{فرح} = ۰$$

اس طرح لچک کا ناپ وہی ہوا جو دباؤ کا ناپ ہے۔

اگر لچک اور دباؤ میں ربط معلوم ہو تو ہم دباؤ اور حجم میں ربط معلوم کرسکتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم ایک ایسے سیال کے وجود کا تصور کرسکیں جس میں لچک، دباؤ کی دوچند ہو تو ہمیں ربط (۷)

$$- ح \frac{فرد}{فرح} = ۲ د$$

حاصل ہوتا ہے۔ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ د ح^{۲} مستقل ہے۔

وزن کمیت اور کثافت کے پیمانے

۱۲ ـــ سیال کے وزن، کمیت اور کثافت کے پیمائش اسی طرح کیجاتی ہے جیسے ٹھوس اجسام کی صورت میں۔

اگر ک کمیت کے سیال کا وزن و ہو تو حسب معمول قرار دادوں کے مطابق جن سے کہ کمیت اور قوت کی اکائیاں معرض تعریف میں آتی ہیں

$$و = ک ج$$

اگر ک کمیت کے سیال کی کثافت ث اور حجم ح ہو تو

$$ک = ث ح$$

اور ∴ و = ج ث ح

معیاری چیز کے لئے ث = ۱ اور اس لئے کمیت کی اکائی معیاری چیز کے اکائی حجم کی کمیت ہے۔ اگر کمیت کی اکائی پونڈ ہو تو مساوات و = ک ج سے ظاہر ہے کہ ایک پونڈ پر جاذبہ ارض کا عمل قوت کی ج اکائیوں کے مساوی ہے۔ اسلئے قوت کی اکائی تقریباً نصف اونس کے وزن کے مساوی ہے اور اس کو پونڈل کہتے ہیں۔

۱۳ — گزشتہ دفعات میں ایسے سیالوں پہ غور نہیں کیا گیا جنکی کثافت متغیر ہوتی ہے لیکن یہ سمجھنا آسان ہے کہ مائع کی کمیت کی کثافت مسلسل طور پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہے۔ اور آیندہ معلوم ہوگا کہ ایک لچکدار سیال کی کمیت جو جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اور جس کے تمام جثہ میں تپش مستقل ہے لازماً غیر متجانس ہونی چاہیئے۔ اس لئے سیال کے کسی نقطہ پر کثافت کی پیمایش اس نقطہ پر دباؤ کی یا کسی مسلسل طور پر بدلنے والی مقدار کی پیمایش کی طرح ہونی چاہیئے۔

غیر متجانس سیال کے کسی نقطہ پر کثافت کی پیمایش

فرض کرو کہ ایک نقطہ کے گھیرنے والے کچھ سیال کا حجم ح ہے اور کمیت ک نیز فرض کرو کہ ث ایک متجانس سیال کی کثافت ہے جسکے ح حجم کی کمیت ک ہے یا جسمیں

ک = ث ح

تو ث کو ح حجم والے غیر متجانس سیال کے اس حصہ کی اوسط کثافت کہا جا سکتا ہے اور بالآخر جبکہ ح لا انتہا کم کر دیا جائے مگر یہ ہمیشہ نقطہ کو گھیرے ہوئے رہے تو ث کو اس نقطہ پر سیال کی کثافت کہا جا سکتا ہے۔

۱۴ — گیس کے دبانے میں جو کام ہوتا ہے اوسکو معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ د دباؤ پر گیس کا حجم ح ہے۔ اور جس برتن میں گیس ہے اس کی سطح کا جز فرس اور سطح فرس کے اندر دار عماد کا جزو فرع ہے۔

تو چھوٹے پچکاؤ میں جو کام کیا گیا اس کی مقدار ہے

= د ∑ فرس فرع = - د فرح

اور حجم ح سے ح' میں دبانے کے لئے جو کام کیا گیا وہ

$$= -\int \text{د فرح} = -\int \text{م} \frac{\text{فرح}}{\text{ح}} \quad \text{اگر ح د = م}$$

$$= \text{م لوک} \frac{\text{ح}}{\text{ح}'} = \text{ح د لوک} \frac{\text{ح}}{\text{ح}'}$$

اگر بچک برتن کے گرد کے ہوائی کرہ کے موجودگی میں وقوع پذیر ہوئی ہے مثلاً اگر ایک اسطوانہ میں فشارہے کے ذریعہ گیس بند کی گئی ہو تو ہوائی کرہ کا دباؤ بچک کے کام میں مدد دیتا ہے۔ اس طرح اگر کرہ ہوائی کے دباؤ ہ پر ابتدائی حجم ح ہو تو حجم ح' میں دبانے کے لئے بیرونی کام جو کیا گیا وہ

$$= -\int_{\text{ح}}^{\text{ح}'} (\text{د} - \text{ہ}) \, \text{فرح}، \quad \text{جہاں ح د = ہ ح}$$

$$= \text{ہ ح لوک} \frac{\text{ح}}{\text{ح}'} - \text{ہ} (\text{ح} - \text{ح}')$$

امثلہ

(ان مثالوں میں ج، ۲/۳ کے مساوی لیا گیا ہے جبکہ فٹ اور ثانیہ اکائیاں ہوں)

۱۔ مستطیلی رقبہ ا ب ج د سیالی دباؤ کے زیرِ عمل ہے۔ ا ب ثابت خطِ مستقیم ہے۔ اور رقبہ پر کا دباؤ طول ب ج (لا) کا ایک دیا ہوا تفاعل (د) ہے ثابت کرو کہ ج د کے کسی نقطہ پر دباؤ $\frac{\text{فرد}}{\text{ا فرلا}}$ ہے جہاں ا = ا ب۔

اگر ا ایک ثابت نقطہ ہو اور ا ب، ا د کی سمتیں ثابت ہوں اور اگر ا ب = لا اور ا د = ما تو ج پر دباؤ = $\frac{\text{فر}^2\text{د}}{\text{فرلا فرما}}$

۲۔ مساوات ق = ج ث ح میں اگر قوت کی اکائی ۱۰۰ پونڈ وزن، طول کی اکائی ۲ فٹ اور وقت کی اکائی $\frac{1}{4}$ ثانیہ ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔

۳۔ اگر وقت کی اکائی ایک دقیقہ، طول کی اکائی ایک گز ہو، اور اگر معیاری شے کے ۱۵ مکعب انچ کا وزن ۲۵ اونس ہو تو قوت کی اکائی دریافت کرو۔

۴۔ مساوات و = ج ث ح میں وقت کی اکائی میں ثانیوں کی تعداد طول کی اکائی میں فٹوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ قوت کی اکائی ۵۰، پونڈ وزن ہے اور معیاری جرم کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۳۵۰۰ اونس ہے۔ وقت کی اکائی معلوم کرو۔

۵ — رفتار کی اکائی ۴ فٹ فی ثانیہ ہے پانی معیاری چیز ہے اور قوت کی اکائی ۱۲۵ پونڈ وزن ہے۔ وقت اور طول کی اکائیاں معلوم کرو۔

۶ — پانی کے ایک مکعب فٹ کے وزن کو تعبیر کرنے والا عدد اس کے حجم کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{4}$ اور اس کی کمیت کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{8}$ ہے اور اس کو ایک فٹ اٹھانے میں کئے کام کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{100}$ ہے۔ طول، کمیت اور وقت کی اکائیاں دریافت کرو۔

۷ — اگر کرہ ہوائی کا دباؤ دباؤ کی اکائی، آواز کی رفتار، رفتار کی اکائی، اسراع بہ جاذبہ ارض اسراع کی اکائی ہو تو قوت کی اکائی تقریباً معلوم کرو۔

۸ — اگر ا فٹ اور ب ثانیہ طول اور وقت کی اکائیاں ہوں اور پانی کی کثافت معیاری کثافت ہو تو ا اور ب میں ربط معلوم کرو کہ مساوات و = ج ث ح سے کسی چیز کا وزن پونڈوں میں معلوم ہو سکے۔

۹ — ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار رفتار کی اکائی اور گرنے والے جسم کا اسراع اسراع کی اکائی اور ایک ٹن کمیت کی اکائی ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔

۱۰ — کچھ مائع ایک مخروط میں جس کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے ڈالدیا گیا ہے۔ اس مائع کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کی کثافت سے بقدر ایک ایسی مقدار کے بڑی ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے سطح سے نقطہ کی گہرائی۔ ثابت کرو کہ جب مائع کو ملانے سے اس کی کثافت یکساں ہو جائے تو یہ کثافت اصلی حالت میں اس نقطہ پر کی کثافت کے مساوی ہے جس کی گہرائی مخروط کے محور کی ایک چوتھائی کے مساوی ہو۔

۱۱ — ث کثافت والے مائع سے بھرے ہوئے برتن میں سے مائع کا $\frac{1}{ن}$ واں حصہ نکالدیا گیا ہے اور اس کو ثہ کثافت والے مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر اس عمل کو م مرتبہ دہرایا جائے تو برتن میں کے مائع کی کثافت معلوم کرو۔

ایک برتن کا حجم ح ہے۔ اس کو ث کثافت والے مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر ثہ کثافت والے مائع کا حجم انتہائی صغیر قطروں میں اس کے اندر ٹپک جائے تو حاصل شدہ مائع کی کثافت معلوم کرو۔

۱۲ — ایک مائع کی کثافت نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک معلومہ نقطہ میں سے

گزرنے والی سمتوں میں سے اُس سمت میں کثافت زیادہ سے زیادہ سرعت سے بدلتی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والی یکساں کثافت والی سطح پر عماد ہو۔ نیز اس سطح کے ماسی مستوی میں جو سمتیں ہیں اُن میں سے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کثافت کے تغیر والی سمتیں وہ ہیں جو صدری تراشوں کے ماسوں پر منطبق ہوتی ہیں۔

(۱۰)

باب دوم

سیالوں کے توازن کی شرطیں

۱۵ — عام سے عام صورت میں فرض کرو کہ ایسے سیال کی کچھ کمیت جو لچک دار ہو یا بے لچک، متجانس ہو یا غیر متجانس، دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور فرض کرو کہ توازن کی شرطیں اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے کسی نقطہ ن کے محدد علی القوائم محوروں کے لحاظ سے لا، ما، ی ہیں۔ اور ق اس کے نزدیک ایک ایسا نقطہ ہے کہ ن ق محور لا کے متوازی ہے فرض کرو کہ لا + مف لا، ما، ی نقطہ ق کے محدد ہیں۔ ن ق کے گرد ایک چھوٹا منشور یا اسطوانہ بناؤ جو ن ق پر کی علی القوائم مستویوں سے محدود ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ ع، نقطہ ن پر کا دباؤ د اور نقطہ ق پر کا دباؤ د + مف د ہے۔

اب چونکہ ع، بہت چھوٹا ہے، اس لئے مستوی ن پر کے کسی نقطہ پر دباؤ تقریباً د کے مساوی ہوگا اور اس لئے اسپر کا دباؤ

(د + جہ) ع

ہوگا جہاں جہ بمقابلہ د کے صفر ہو جاتا ہے جبکہ ع کو لا انتہا کم کیا جائے اس لئے کہ ع کو ہم اسقدر چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ بمقابلہ د کے جہ نظر انداز ہو سکے۔ اور اسطوانہ کے رخ ن پر کا دباؤ د ع کے مساوی لیا جا سکے۔ اور اسی طرح رخ ق پر کے دباؤ کو لے سکیں

(د + مف د)

اگر اسطوانہ ن ق کی اوسط کثافت ث ہو تو اسکی کمیت = ث ع مف لا اور

لا ث ع مف لا سے وہ قوت تعبیر ہوگی جو ن ق پر اسکے محور کے متوازی عمل کرتی ہے جہاں لا منٹ ک، ما مف ک، ے مف ک سیال کے ذرہ مف ک پر جو (لا، ما، ی) پر واقع ہے عمل کرنیوالی قوتوں کے اجزائے تحلیلی ہیں۔

اس لئے ن ق کے توازن کے لئے

$$(\text{د} + \text{مف د})\,\text{ع} - \text{د ع} = \text{لا ث ع مف لا}$$

یا

$$\text{مف د} = \text{ث لا مف لا}$$

انتہا لینے سے جبکہ مف لا اور اس لئے مف د لا انتہا کم کر دئے جائیں نقطہ ن پر کی کثافت ث ہوگی اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} = \text{ث لا}$$

اسی طرح کے عمل سے

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} = \text{ث ما}$$

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}} = \text{ث ے}$$

لیکن

$$\text{فرد} = \frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}\,\text{فری}$$

$$\therefore\ \text{فرد} = \text{ث}\,(\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ے فری}) \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{ع})$$

اس مساوات سے دباؤ معلوم ہو جاتا ہے۔

۱۶— صریحاً دباؤ متنوع متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے۔ اور ہم جانتے ہیں کہ

لے ثبوت بالا میں ع اس قدر چھوٹا لیا گیا ہے کہ اس کے خطی ابعاد بمقابلہ مف لا کے نظر انداز کئے جاسکیں یعنی لا کی تبدیلی مف لا کے جواب میں دباؤ د میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اُس پر ما، ی کے اس بدلنے سے اثر نہیں پڑتا۔

$$\frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ما جف ی}} = \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ی جف ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ی جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف لا جف ی}}$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\text{د}}{\text{جف ما جف لا}} \text{ ،}$$

اس لئے گزشتہ مساواتوں سے ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{ث ے}) &= \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{ث ما}) \\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{ث لا}) &= \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}(\text{ث ے}) \\ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}(\text{ث ما}) &= \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{ث لا}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{ب})$$

جن سے

$$\text{ے}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}} - \text{ما}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}} = \text{ث}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ے}}{\text{جف ما}}\right)\text{،}$$

$$\text{لا}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}} - \text{ے}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}} = \text{ث}\left(\frac{\text{جف ے}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ی}}\right)\text{،}$$

$$\text{ما}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}} - \text{لا}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}} = \text{ث}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}\right)\text{،}$$

لا، ما، ے سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\text{لا}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ے}}{\text{جف ما}}\right) + \text{ما}\left(\frac{\text{جف ے}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ی}}\right)$$

$$+ \text{ ے}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{جہ})$$

جو توازن کے لئے ضروری شرط ہے۔

اس مساوات کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ قوت کے خطوط

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{ے}}$$

سطحوں کے ایک نظام سے علی القوائم قطع ہو سکتے ہیں۔

(۱۲) ۱۷۔ متجانس مائعات۔ اگر سیال متجانس اور بے لچک ہو تو لا فرلا + ما فرما + ے فری پور التفرقہ ہونا چاہیئے تاکہ توازن ممکن ہو سکے۔

بالفاظ دیگر قوتوں کا نظام تحفظی یا بقائی ہونا چاہیئے اور قوتوں کی تعبیر قوہ تفاعل کے مکانی تغیرات سے ہونی چاہیئے۔

اگر فہ قوہ تفاعل ہو تو

$$\text{فرد} = -\text{ث}\ \text{فرفہ}$$

اس لئے

$$\frac{\text{د}}{\text{ث}} + \text{فہ} = \text{م}\ (\text{مستقل})$$

مثلاً اگر قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف یا ان کے باہر وار عمل کرنیوالی ہوں اور وہ ان مرکزوں کے فاصلوں کی تفاعل ہوں تو

$$\text{لا} = \sum\left\{\text{ف}(\text{ر})\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}}\right\}\quad \text{ما} = \sum\left\{\text{ف}(\text{ر})\frac{\text{ما}-\text{ر}}{\text{ر}}\right\}$$

$$\text{ے} = \sum\left\{\text{ف}(\text{ر})\frac{\text{ی}-\text{ج}}{\text{ر}}\right\}$$

جہاں (ا، ب، ج) اس مرکز کے محدد ہیں جسطرف قوت ف (ر) مائل ہے۔

اب $\text{ر}^2 = (\text{لا}-\text{ا})^2 + (\text{ما}-\text{ب})^2 + (\text{ی}-\text{ج})^2$

$$\therefore\quad \text{لا}\ \text{فرلا} + \text{ما}\ \text{فرما} + \text{ے}\ \text{فری} = \sum \text{ف}(\text{ر})\ \text{فرر}$$

اور $\text{فرد} = \text{ث}\sum \text{ف}(\text{ر})\ \text{فرر}$

اس صورت میں چونکہ

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} = \sum\left\{\text{فَ}(\text{ر})\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}}\times\frac{\text{ما}-\text{ب}}{\text{ر}} - \text{ف}(\text{ر})\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}^2}\times\frac{\text{ما}-\text{ب}}{\text{ر}}\right\}$$

اور

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} = \sum\left\{\text{فَ}(\text{ر})\frac{\text{ما}-\text{ب}}{\text{ر}}\times\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}} - \text{ف}(\text{ر})\frac{\text{ما}-\text{ب}}{\text{ر}^2}\times\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{ر}}\right\}$$

اس لئے یہ ظاہر ہے کہ مساوات (جہ) ہمیشہ پوری ہوتی ہے لیکن اس سے یہ نتیجہ نہیں نکالنا چاہیئے کہ اس طرح کی قوتوں کے زیر عمل غیر متجانس سیال کا توازن بھی ہمیشہ ممکن ہوتا ہے۔

جب کثافت مستقل ہو تو (بہ) مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{جف ے}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} ، \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف ے}}{\text{جف لا}} ، \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}$$

اور اسی لئے اس صورت میں ہمیشہ پوری ہوتی ہیں۔ اس لئے اس قسم کی قوتوں کے زیر عمل ایک متجانس سیال کا توازن ہمیشہ ممکن ہے۔

۱۸ — غیر متجانس سیال۔ اگر قانون کثافت معلوم ہو یعنی ث اگر لا، ما، ی کا دیا ہوا تفاعل ہو تو (بہ) مساواتیں وہ شرطیں ہیں جن کا پورا ہونا ضروری ہے کہ دی ہوئی قوتیں لا ما ئے سیال کو توازن میں رکھ سکیں۔

۱۹ — لچکدار سیال:- اگر سیال لچکدار ہو تو ایک اور شرط کا اضافہ ہو جاتا ہے کیونکہ

$$\text{د} = \text{م ث} ، \text{اگر تپش مستقل ہو}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر د}}{\text{د}} = \frac{1}{\text{م}} \left(\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ے فری}\right) \ldots\ldots (\text{د})$$

اگر قوتیں قوہ فہ سے حاصل ہو سکیں یعنی اگر

(۱۳) $$\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ے فری}$$

پورالتفرقہ (- فرفہ) ہو تو

$$\text{م} \frac{\text{فر د}}{\text{د}} = -\text{فرفہ}$$

$$\therefore \text{م لوک} \frac{\text{د}}{\text{ج}} = -\text{فہ} ، \text{جہاں ج مستقل ہے۔}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{د} = \text{ج قو}^{\frac{\text{فہ}}{\text{م}}} \quad \text{اور ث} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} \text{قو}^{\frac{\text{فہ}}{\text{م}}}$$

جب قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف مائل ہوں اور فاصلوں کے تفاعل ہوں (دفعہ ۱۷) تو یہ مساوات یہ شکل

$$م \frac{فرد}{د} = \Sigma\ فہ\ (ر)\ فر$$

اختیار کرتی ہے اور د کا تعین ہو سکتا ہے۔

اگر تپش متغیر ہو تو دباؤ، تپش اور کثافت میں یہ ربط

$$د = م\ ث\ (۱ + عہ\ ت)$$

ہوتا ہے جہاں تپش ت مئی تپش پیما سے ناپی گئی ہے اور عہ = ۰۰۳۶۶۵ء۰،
اس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$د = م\ ث\ عہ \left\{ \frac{۱}{عہ} + ت \right\} = ھر\ ث\ ت$$

جہاں ھر = م عہ، اور ت = $\frac{۱}{عہ}$ + ت، ت کو تپش مطلق کہتے ہیں
جس کا صفر -۲۷۳° مئی پر ہوتا ہے۔

اس صورت میں $$\frac{فرد}{د} = \frac{لا\ فرلا + ما\ فرما + سے\ فری}{ھر\ ت}$$

اور اس لئے ت تفاعل ہونا چاہیئے لا، ما، ہی کا۔

ان میں سے کسی صورت میں اگر کسی خاص نقطہ پر کا دباؤ دیا جائے تو مستقل دریافت ہو سکتا ہے۔

لچکدار سیالوں کی صورت میں اگر سیال کی کمیت اور وہ جگہ جس میں یہ محدود ہے معلوم ہوں تو مستقل معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۰ — د دریافت کرنے کی مساوات طریقہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔
فرض کرو کہ ن ق ایک بہت چھوٹے اسطوانہ کا محور ہے جو ن ق پر کے علی القوائم مستویوں سے گھرا ہوا ہے۔

فرض کرو کہ د اور د + مف د نقاط ن اور ق پر کے دباؤ ہیں۔ عہ سطحی تراش کا رقبہ ہے اور مف س، ن ق کا طول ہے اب اگر سمت ن ق میں وزنہ مف ک پر عمل کرنیوالی قوتوں کا جزو تحلیلی س مف ک ہو تو

(د + سف د) عہ - د عہ = ث عہ س سف س (14)

اور اس لئے انتہا لینے سے

فر د = ث س فر س

یعنی کسی سمت میں دباؤ کے اضافہ کی شرح دو مقداروں کا حاصل ضرب ہے۔ ایک مقدار کثافت ہے اور دوسری مقدار قوت کا وہ جزو تحلیلی ہے جو اس سمت میں عمل کرتا ہے۔

اگر نقطہ ن کے محدد لا، ما، ی اور س کے اجزاے تحلیلی محوروں کی سمت میں لا، ما، ے ہوں تو

س = لا (فر لا / فر س) + ما (فر ما / فر س) + ے (فر ی / فر س)

اور ∴ فر د = ث (لا فر لا + ما فر ما + ے فر ی) بوجب دفعہ ۱۵

اگر نقطہ ن کا مقام اسطوانی محددوں ر، طہ، ی کے لحاظ سے دیا جائے اور اگر قوت س کے اجزائے تحلیلی ر، طہ، ی کی سمتوں میں ق، لت، ے ہوں تو

س = ق (فر ر / فر س) + لت (ر فر طہ / فر س) + ے (فر ی / فر س)

اور د کی مساوات ہوجاتی ہے

فر د = ث (ق فر ر + لت ر فر طہ + ے فر ی)

پھر اگر ن کا مقام قطبی محددوں (ر، طہ، فہ) کے لحاظ سے دیا جائے اور قوت کے اجزاء تحلیلی سر، ن، لتا، ہوں جو علی الترتیب ر کی سمت میں، زاویہ طہ والے مستوی کے عمود کی سمت میں اور اس مستوی میں ر پر کے عمود کی سمت میں تحلیل کئے گئے ہیں تو معلوم ہوگا کہ

(فر د / د) = سر فر ر + ن ر جب طہ فر فہ + لتا ر فر طہ

اسی طرح فر د کے لئے جملہ کسی اور محددوں کے نظام میں معلوم ہوسکتا ہے۔

۲۱۔ مساوی دباؤ کی سطحیں۔ تمام صورتوں میں جن میں کہ سیال کا توازن ممکن ہو تکمل سے حاصل ہوگا

د = فہ (لا ، ما ، ی)

اگر د مستقل ہو تو فہ (لا ، ما ، ی) = د .... (۱)

جو ایسی سطح کی مساوات ہے جس کے تمام نقطوں پر دباؤ مستقل ہے اور جس میں د کو مختلف قیمتیں دینے سے مساوی دباؤ کی سطحوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے۔ نیز د کو سیال کے بیرونی دباؤ کے مساوی رکھنے سے بیرونی سطح یا آزاد سطح حاصل ہوتی ہے۔

اگر بیرونی دباؤ صفر ہو تو آزاد سطح ہوگی

فہ (لا ، ما ، ی) = ۰

مقادیر

جف فہ / جف لا ، جف فہ / جف ما ، جف فہ / جف ی

جو سطح (۱) کے نقطہ (لا ، ما ، ی) پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام کے متناسب ہیں بالترتیب

جف د / جف لا ، جف د / جف ما ، جف د / جف ی

کے مساوی ہیں یعنی ث لا ، ث ما ، ث ی کے مساوی ہیں اور اس لئے لا ، ما ، ی کے متناسب ہیں۔

اس لئے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اُس عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والی مساوی دباؤ کی سطح پر اس نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں وہ ہیں جو قوت کے خطوط کو علی القوائم قطع کرتی ہیں۔

اس نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن کے لئے ضروری شرط ایسی سطحوں کے نظام کا وجود ہے جو خطوط قوت کو علی القوائم قطع کرتی ہیں۔ یہ نتیجہ دفعہ (۱۶) کی مساوات (جہ) سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ اس قسم کے نظام کے وجود کے لئے مساوات مذکورہ ضروری تحلیلی شرط ہے۔

۲۲ — اگر سیال متجانس مائع ہو یعنی اگر ث مستقل ہو تو لا فرلا + ما فرما + ی فری پورا تفرقہ ہونا چاہیئے۔ یا بالفاظ دیگر قوتوں کا نظام تحفظی یا بقائی ہونا چاہیئے۔

عام صورت میں اگر قوتوں کا نظام بقائی ہو تو ث کو لازماً قوہ فہ کا تفاعل ہونا چاہیئے

کیونکہ فرد = - ث فرفہ اور فرد پورا تفرقہ ہے - اسلئے ث کو قوہ فہ کا تفاعل ہونا چاہیئے۔ اس طرح فہ اور اس لئے ث، د کے تفاعل ہیں اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی قوہ کی سطحیں بھی ہیں اور مساوی کثافت کی سطحیں بھی[۵]۔

اگر سیال لچکدار ہو اور تپش متغیر تو

$$\frac{\text{فرد}}{\text{د}} = -\frac{\text{فرفہ}}{\text{م ر ت}}$$

اس طرح، اسی قسم کے عمل استدلال سے، ت، د کا تفاعل ہے اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی تپش کی سطحیں بھی ہیں۔

لیکن اگر لا فرلا + ما فرما + ے فری پورا تفرقہ نہ ہو تو یہ سطحیں عام طور پر منطبق نہ ہونگی۔

فرض کرو کہ سیال غیر متجانس اور بے لچک ہے تو مساوی دباؤ کی اور مساوی کثافت (۱۶)
کی سطحیں حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

---

[۵] یہ نتیجے طریقہ ذیل سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں -

قریب کی دو مساوی دباؤ کی سطحوں پر غور کرو- جن کے درمیان سیال کی ایک تہ ہے اور فرض کرو کہ ایک سطح کے نقطہ ن کے گرد ایک چھوٹا دائرہ بنایا گیا ہے اور اس کے محیط میں سے گزرنیوالے عمادوں سے سیال کا کچھ حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے۔ سیال کا یہ حصہ قوت عاملہ ان کے سروں اور محیط پر کے دباؤنکے زیر عمل ساکن ہے۔ اب چونکہ تقریباً یہ بہت چھوٹا اسطوانہ ہے اور اس کے محیط پر کے تمام نقطوں پر دباؤ مساوی ہیں۔ اس لئے دونوں رخوں پر کے دباؤں کا فرق قوت عاملہ کی وجہ سے پیدا ہونا چاہیئے جو اس لئے اُس سمت میں عمل کرتی ہے جس سمت میں کہ یہ دباؤ عمل کرتے ہیں یعنی نقطہ ن پر کے عماد کی سمت میں۔

اگر قوتیں ایک قوہ سے حاصل ہو سکیں تو حاصل قوت ہم قوہ سطحوں کے علی القوائم ہوگی اور اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں ہم قوہ سطحوں پر منطبق ہونگی -

پھر اس عنصری اسطوانہ کے توازن پر غور کرنے سے عمل کرنیوالی قوت فی اکائی کمیت = $\frac{\text{دباؤں کا فرق}}{\text{مساوی دباؤ کی سطحوں کا درمیانی فاصلہ}}$

اور چونکہ اس عنصر کی کمیت بالراست اس فاصلہ کے متناسب ہے اس لئے کثافت مستقل ہونی چاہیئے یعنی مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں بھی ہوتی ہیں۔

$$\text{فرد} = 0 \text{ ، } \text{فرث} = 0$$

یعنی

$$\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ے فری} = 0$$

$$\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}}\,\text{فری} = 0 \qquad \text{.......(ب)}$$

اس لئے یہ ایسی سطحوں کی تفرقی مساواتیں ہیں جو اپنے باہمی تقاطع سے مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنیوں کا تعین کرتی ہیں۔

(ب) سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ے}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}} - \text{ما}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}} - \text{ے}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{فری}}{\text{ما}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}} - \text{لا}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}}} \qquad \text{........(ج)}$$

لیکن شرائط توازن سے

$$\text{ث}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} + \text{لا}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}} = \text{ث}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{ث}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} + \text{ما}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}} = \text{ث}\frac{\text{جف ے}}{\text{جف ما}} + \text{ے}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}}$$

$$\text{ث}\frac{\text{جف ے}}{\text{جف لا}} + \text{ے}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}} = \text{ث}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ی}} + \text{لا}\frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}}$$

اور اس لئے مساواتیں (ج) ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{جف ے}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{فرما}}{\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ے}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{فری}}{\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}}} \qquad \text{.......(د)}$$

جو مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنیوں کی تفرقی مساواتیں ہیں۔

۲۳ —— اب ہم ایک محدود کمیت کے سیال کے توازن پر غور کرنے سے یہ بتائیں گے کہ

کس طرح دباؤ کی اساسی مساوات حاصل کی جاتی ہے ۔

فرض کرو کہ سیال میں ایک بند سطح س کھینچی گئی ہے۔ اور اس کے کسی نقطہ پر بیرونی عماد کے سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں۔ سطح س کے اندر جو سیال ہے اس کی کمیت کے توازن کی شرطوں کو اختصاراً یوں بیان کر سکتے ہیں کہ حدود پر کے عمادی دباؤ کمیت پر عمل کرنیوالی قوتوں کا توازن کرتے ہیں۔ اس طرح محور کے متوازی تحلیل کرنے سے ہمیں شکل ذیل کی تین مساواتیں ملتی ہیں۔

∬ ل د فرس = ∭ ث لا فرلا فرما فری .... (۱)

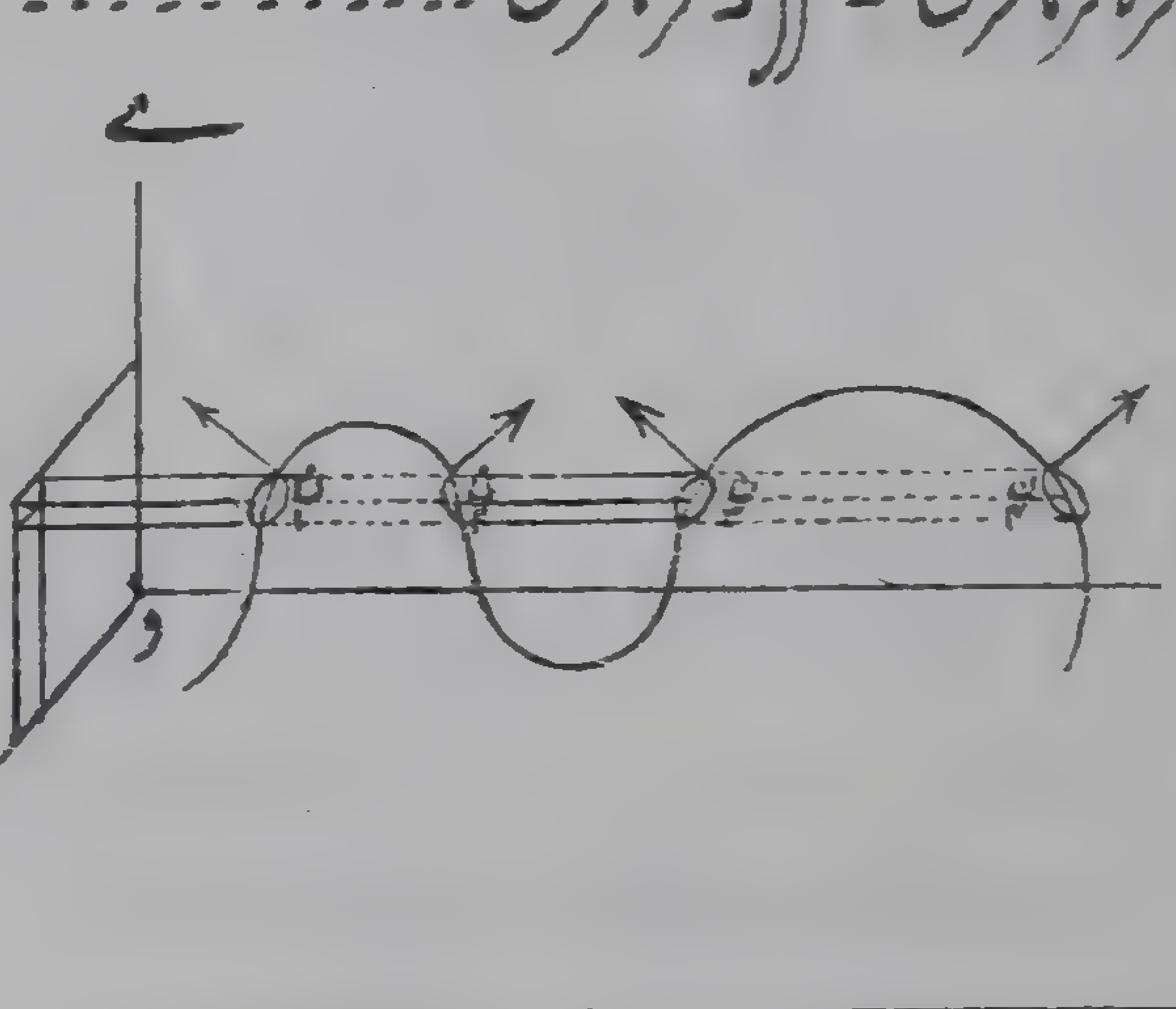
(۱۷) اور محوروں کے گرد معیار لینے سے ہمیں شکل ذیل کی مزید تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

∬ د (ن ما - م ی) فرس = ∭ ث (ما ے - ی ما) فرلا فرما فری.... (۲)

جہاں دوہرے تکمل کل سطح س پر اور تہرے تکمل کل بند فضا میں لئے گئے ہیں۔

اب تکملہ ∭ (جف د / جف لا) فرلا فرما فری پر غور کرو جسکے حدود تکمل وہی ہیں۔ محور لا کے متوازی ایک پتلا منشور لو جو لازماً سطح کو جفت مرتبہ قطع کرے گا۔ فرض کرو کہ یہ منشور نقاط ن۱، ن۲، ن۳ ...... پر سطح کے اجزا فرس۱، فرس۲، فرس۳... قطع کرتا ہے اس منشور کے ساتھ ساتھ تکمل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

∭ (جف د / جف لا) فرلا فرما فری = ∬ د فرما فری .... (۳)



جہاں لجمی تکملہ حدود ن۱ تا ن۲ اور ن۳ تا ن۴ وغیرہ کے درمیان لیا گیا ہے۔

لیکن اگر طہ، طہ۲، طہ۳ ...... نقاط ن۱، ن۲، ن۳ ..... کے باہر وار عمادوں کے میلان محور لا کے ساتھ ہوں تو

فرما فری = - فرس۱ جم طہ۱ = فرس۲ جم طہ۲ = - فرس۳ جم طہ۳ = ...

= - ل۱ فرس۱ = ل۲ فرس۲ = - ل۳ فرس۳ = ...

علامت منفی یا مثبت ہوگی بموجب اس کے کہ زاویہ منفرجہ یا حادہ ہو یعنی بموجب اس کے کہ منشور میدان تکمل میں داخل یا اس سے خارج ہو رہا ہو۔

اس لئے (۳) میں حدود پر کی قیمتیں رکھنے سے

∭ (جف د / جف لا) فرلا فرما فری = ∬ (د۱ ل۱ فرس۱ + د۲ ل۲ فرس۲ + د۳ ل۳ فرس۳ + ...)

= ∬ ل د فرس پوری سطح پر .... (۴)

اس قیمت کو (۱) میں استعمال کرنے سے مساوات

∭ (جف د / جف لا - ث لا) فرلا فرما فری = ۰

حاصل ہوتی ہے اور نیز اسی طرح کی دو اور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور چونکہ یہ تکملے سیال میں تکمل کی تمام وسعتوں یعنی تمام بند سطحوں کے لئے معدوم ہوتے ہیں اس لئے ہر نقطہ پر ان کے متکمل صفر ہونے چاہئیں

اس لئے

جف د / جف لا = ث لا ، جف د / جف ما = ث ما ، جف د / جف ی = ث ے .... (۵)

جس سے پہلے کی طرح

فرد = ث (لا فرلا + ما فرما + ے فری)،

ہم نے شکل (۲) کی معیاروں والی مساواتوں کو ابھی تک استعمال نہیں کیا لیکن ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ وہ بھی مساواتوں (۵) سے پوری ہوتی ہیں۔ مثلاً

∭ ما (جف د / جف لا) فرلا فرما فری

پر غور کرو۔ اگر ہم اسی منشور پر پہلے کی طرح تکمل کریں اور اس کا خیال رکھیں کہ منشور پر ما مستقل ہے تو ہمیں حدود ن۱ اور ن۱' ن۲ اور ن۲' وغیرہ کے درمیان تکمل کرنے سے حاصل ہوگا

∬ ما د فرما فری

اور اوپر کی طرح یہ ∬ دل ما فرس کے مساوی ہے جس میں پوری سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔ یعنی مساوات (۴) اس حالت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ ہم مکمل میں ما (یا ی) جزو ضربی کے طور پر مساوات کی طرفین میں شامل کردیں۔ اسی طرح کے استدلال سے حاصل ہوتا ہے کہ

∬ د (ن ما − م ی) فرس = ∭ (ما جف د / جف ی − ی جف د / جف ما) فرلا فرما فری

اور مساوات (۵) سے اندراج کرنے سے یہ ہو جاتا ہے

∭ ث (ما ے − ی ما) فرلا فرما فری

اس طرح (۲) کی تصدیق ہوتی ہے۔

یہ یاد رہے کہ چونکہ سیال کامل، فرضی یا جذبی زور کی مزاحمت کے ناقابل ہوتا ہے اسلئے اس قسم کے زور متوازن سیال کی کمیت کے اندر نہیں پائے جا سکتے؛ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ محوروں کے گرد معیار لینے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ لازماً پوری ہونی چاہئیں جبکہ محوروں کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے حاصل شدہ مساواتیں پوری ہوں۔ کیونکہ توازن کی صورت میں موخرالذکر مساواتیں سیال کے کسی محدود یا صغیر جزء کے لئے درست ہوتی ہیں اور قوتوں کے اسی توازن سے لازم آتا ہے کہ معیاروں کی مساواتیں بھی درست ہوں۔

۴۲ — سیال کے کروی عنصر کے توازن پہ غور کرنے سے ہم یہ بھی ثابت کرسکتے ہیں کہ

ث (لا فرلا + ما فرما + ے فری) کو پورا تفرقہ ہونا چاہئے۔

کیونکہ اس عنصر کی سطح پر کے سیالی دباؤ تمام کے تمام مرکز کی سمت میں عمل کرتے ہیں اور اسلئے عمل کرنیوالی قوتوں کا معیار مرکز کے گرد معدوم ہونا چاہیئے۔

فرض کرو کہ مرکز کے محدد لا، ما، ی اور اس چھوٹے کرہ کے اندر کسی نقطہ کے محدد (۱۹)
لا + ع، ما + ب، ی + ج ہیں۔

اب چونکہ مرکز پر کی کثافت ث ہے اسلئے جملہ Σ فرم (ے ب - ما ج) ہو جاتا ہے

$$\iiint \text{فرع فرب فرج} \left(\text{ث} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}}\text{ع} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}}\text{ب} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}}\text{ج}\right)\left\{\text{ب}\left(\text{ے} + \frac{\text{جف ے}}{\text{جف لا}}\text{ع} + \frac{\text{جف ے}}{\text{جف ما}}\text{ب} + \frac{\text{جف ے}}{\text{جف ی}}\text{ج}\right) - \text{ج}\left(\text{ما} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}\text{ع} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ما}}\text{ب} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}}\text{ج}\right)\right\}$$

اب $\iiint \text{ع فرع فرب فرج} = 0$، کیونکہ کرہ کا مرکز حجم کا مرکز ثقل ہے

اسی طرح $\iiint \text{ب فرع فرب فرج} = 0$، وغیرہ، اور اگر فرة = فرع فرب فرج،

$$\text{تو} \iiint \text{ع}^2\,\text{فرة} = \iiint \text{ب}^2\,\text{فرة} = \iiint \text{ج}^2\,\text{فرة}$$

$$= \frac{1}{3}\iiint (\text{ع}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)\,\text{فرة}$$

$$= \frac{1}{3}\int 4\pi\,\text{ر}^2\,\text{ر}^2\,\text{فرر} = \frac{4}{15}\pi\,\text{ر}^5،$$

اس طرح اگر ع، ب، ج کی اعلےٰ قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے تو معیار کا جملہ ہو جائیگا

$$\left\{\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{ث ے}) - \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{ث ما})\right\}\frac{4\pi\,\text{ر}^5}{15}$$

اور چونکہ یہ صفر ہو جاتا ہے اس لئے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{ث ے}) = \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{ث ما})$$

۲۵ — جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن سیال۔

محور ی کو انتصابی لیکر ی نیچے کی طرف ناپنے سے

لا = ۰ ، ما = ۰ ، ے = ج

اور دفعہ (۱۵) کی مساوات (ء) ہو جاتی ہے

فر د = ج ث فر ی

جسکو ایک انتصابی چھوٹے اسطوانے کے توازن پر غور کرنے سے بھی بلا واسطہ حاصل کر سکتے ہیں۔

متجانس سیال کی صورت میں

د = ج ث ی + مر

اور مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں۔

اس لئے آزاد سطح افقی مستوی ہے اور اس لئے مبدا کو آزاد سطح میں اور ۲ کو بیرونی دباؤ قرار دینے سے

د = ج ث ی + ۲

اگر آزاد سطح پر کوئی دباؤ نہ ہو تو

د = ج ث ی

یعنی کسی نقطہ پر کا دباؤ آزاد سطح کے نیچے اس نقطہ کی گہرائی کے متناسب ہوگا۔

غیر متجانس سیال کی صورت میں مساوات (۲۰)

فر د = ج ث فر ی

سے ظاہر ہے کہ ث کو ی کا تفاعل ہونا چاہیئے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہی افقی سطح کے تمام نقطوں پر کثافت اور دباؤ مستقل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ $ث \propto ی^{ن} = مہ\ ی^{ن}$

تو $د = ج\ مہ \frac{ی^{ن+1}}{ن+1} + ۲$

۲۶ —— دو مائعے جو باہم آمیز نہیں ہوتے ایک خمدار نلی میں ڈالے گئے ہیں ثابت کرو کہ انکی مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتفاع کثافتوں کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

مشترک سطح پر دباؤ وہی ہیں اور اگر مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتفاع ی ، یَ ہوں اور مائعات کی کثافتیں ث ، ثَ ہوں تو یہ دباؤ علی الترتیب

بَ جَ ثَ یَ + ۃ بَ جَ ثَ یَ + ۃ

ہونگے اس لئے

$$\frac{ی}{یَ} = \frac{ثَ}{ث}$$

۲۷ــــ یہ ایک مشہور قانون ہے کہ اگر جاذبہ ارض اور چکنی سطحوں کے دباؤ کے زیر عمل کوئی نظام متوازن ہو تو توازن قائم ہوتا ہے بشرطیکہ مرکز ثقل نچلے سے نچلے ممکن مقام میں واقع ہو۔ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ غیر متجانس مائع کی صورت میں گہرائی کے ساتھ کثافت کو بڑھنا چاہیئے کیونکہ بہ صورت دیگر توازن غیر قائم ہوگا۔

اس طرح اگر ایک غیر متجانس مائع کو ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈالا جائے تو سب سے وزنی تہہ نیچے بیٹھ جائے گی اور قانون کثافت یقیناً بدلجائیگا۔

مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت گہرائی کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے دیئے ہوئے برتن میں ہے۔ اگر اس مائع کو دوسرے برتن میں منتقل کیا جائے تو نئے قانون کثافت کا معلوم کرنا مطلوب ہے۔ جب کہ ہر برتن ایک گردشی سطح کی شکل میں ہو جس کا محور انتصابی ہے۔

لا کو مائع کے زیر ترین نقطہ سے اوپر کی طرف ناپکر فرض کرو کہ ما = ف (لا) پہلے برتن کا تکوینی منحنی ہے اور ما = فہ (لا) دوسرے برتن کا۔

پس اگر پہلے برتن میں لا بلندی والی تہہ دوسرے برتن میں لاَ بلندی والی تہہ کے متناظر ہو تو چونکہ حجم مساوی ہیں اسلئے ہمیں حاصل ہوگا

$$\int_{0}^{لا} \{ف(ظہ)\}^2 \, فرظہ = \int_{0}^{لاَ} \{فہ(ظہ)\}^2 \, فرظہ$$

اب عمل تکمل سے لا کو لاَ کی رقوم میں حاصل کر سکتے ہیں۔ اور اسلئے ث جو لا کا تفاعل ہے، لاَ کا نیا تفاعل بنجاتا ہے۔ (۲۱)

نیز اگر ان دو برتنوں میں مائع کی گہرائیاں گ، گَ ہوں تو گ کو گَ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لئے کثافت ث گہرائی گَ ۔ لاَ کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہے

اگر نیا قانون کثافت دیا جائے اور نئے برتن کی شکل معلوم کرنا مطلوب ہو تو ہم اس طرح عمل کرتے ہیں:۔

کثافت چونکہ (گ − لا) کا اور نیز (گَ − لاَ) کا دیا ہوا تفاعل ہے ہم ان دونوں جملوں کو مساوی رکھ کر لا کو لاَ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔
نیز متناظر تہوں کے حجموں کو مساوی رکھنے سے ہم ما^{2} فرلا = مَا^{2} فرلاَ حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی قیمت لاَ کی رقوم میں مندرج کر کے ہم مطلوبہ مساوات معلوم کر لیتے ہیں۔ اور پھر پورے حجموں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھ کر گَ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

مثال ۱ — ایک اسطوانی برتن میں مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی قانون کثافت معلوم کرو اگر مائع کو ایک مخروطی برتن میں ڈالا جائے جسکا راس نیچے کی طرف ہو۔

اس صورت میں

ث = مہ (گ − لا)

اور π ا^{2} لا = $\frac{1}{3}$ π لاَ^{3} مس^{2} عہ

نیز π ا^{2} گ = $\frac{1}{3}$ π گَ^{3} مس^{2} عہ

∴ ث = مہ مس^{2} عہ $\frac{\text{گَ}^{3} - \text{لاَ}^{3}}{3\,\text{ا}^{2}}$ = $\frac{\text{مہ مس}^{2}\,\text{عہ}}{3\,\text{ا}^{2}}$ (۳ گَ^{2} ی − ۳ گَ ی^{2} + ی^{3})

اگر گہرائی ی ہو۔

مثال ۲ — مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک اوندھے یا الٹے مکافی نما میں دی ہوئی بلندی تک بھری ہوئی ہے ایک ایسے برتن کی شکل معلوم کرنا ہے (جو گردشی سطح کی شکل میں ہو) کہ اگر اس مائع کو اس میں ڈالا جائے تو کثافت ایسے بدلے جیسے گہرائی کا مربع۔

اس صورت میں ث = مہ (ف − لا) = مہَ (فَ − لاَ)^{2} جہاں ف، فَ گہرائیاں ہیں۔

∴ لا = ف − $\frac{1}{\text{ج}}$ (فَ − لاَ)^{2}، اگر مہ = مہَ ج

مساوات ۴ ا لا فرلا = مَا^{2} فرلاَ سے

جَ^{2} مَا^{2} = ۸ ا (فَ − لاَ) {ف ج − (فَ − لاَ)^{2}}

حاصل ہوتا ہے۔

حل کو پورا کرنے کے لئے پورے حجموں کو مساوی رکھنا چاہیئے جس سے ہمیں $\bar{ت}^{۲} = ج ف$ حاصل ہوتا ہے جو $\bar{ت}$ اور ج میں مطلوبہ ربط ہے۔

۲۸ — جاذبہ ارض کے زیر عمل لچکدار سیال کا سکون۔

اس صورت میں $د = م\ ث$

$$\text{اور}\quad \frac{فرد}{د} = \frac{ج}{م}\ فری$$

$$\therefore\ لوک\ \frac{د}{ج} = \frac{ج\ ی}{م} \quad \text{اور}\quad د = ج\ نوم^{\frac{ج\ ی}{م}}$$

یہاں بھی مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں اور مستقل ج کا تعین ی کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے دباؤ کے لئے دباؤ کے معلوم ہونے سے ہوسکتا ہے ۔ یا اس صورت سے متعلق کسی دیئے ہوئے واقعہ کے معلوم ہونے سے ۔ (۲۲)

مثال :- ایک بند اسطوانہ میں جسکا محور انتصابی ہے ہوا کی دی ہوئی کمیت ہے۔ اسطوانہ کے سرے سے ی کو ناپنے سے

$$ث = \frac{د}{م} = \frac{ج}{م}\ \frac{\bar{ج}\ ی}{نوم}$$

$\therefore$ اگر ک دی ہوئی کمیت، ا نصف قطر، ف اسطوانہ کا ارتفاع ہو تو

$$ک = \int_{ب}^{ف} ث\ \pi\ ا^{۲}\ فری = \pi\ ا^{۲}\ \frac{ج}{\bar{ج}}\ \left(نوم^{\frac{\bar{ج}\ ف}{}} - ۱\right)$$

جس سے $\bar{ج}$ معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۹ — مساوات عامہ کے استعمال کی مثالیں۔

(۱) فرض کرو کہ مائع کا دیا ہوا حجم ح محوروں کے متوازی قوتوں

$$-\frac{مہ\ لا}{ا^{۲}}\ ،\ -\frac{مہ\ یا}{ب^{۲}}\ ،\ -\frac{ما\ ی}{ج^{۲}}$$

کے زیر عمل ساکن ہے تو

$$\text{فرد} = \text{ث}\left(-\frac{\text{مہ لا}}{\text{ا}^2}\,\text{فرلا} - \frac{\text{مہ ما}}{\text{ب}^2}\,\text{فرما} - \frac{\text{مہ ی}}{\text{ج}^2}\,\text{فری}\right)$$

اور
$$\text{د} = \text{م} - \frac{\text{مہ ث}}{۲}\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}\right)$$

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں متشابہ ناقص نما ہیں اور آزاد سطح کی مساوات جبکہ بیرونی دباؤ موجود نہ ہو

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = \frac{۲\,\text{م}}{\text{مہ ث}} \qquad \text{ہے۔}$$

اب جس شرط سے مستقل معلوم ہوتا ہے وہ یہ ہے کہ مائع کا حجم دیا گیا ہے اور

$$\text{ح} = \frac{۴}{۳}\,\pi\,\text{ا ب ج}\left(\frac{۲\,\text{م}}{\text{مہ ث}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

اس لئے
$$\text{م} = \frac{\text{مہ ث}}{۲}\left(\frac{۳\,\text{ح}}{۴\,\pi\,\text{ا ب ج}}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

(۲) ایک ثابت مستوی پر مائع کا دیا ہوا حجم ایک ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو مستوی کے ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔
ثابت نقطہ کو مبدا قرار دیکر کسی نقطہ پر دباؤ معلوم کرنے کے لئے جملہ

$$\text{د} = \text{م} - \frac{۱}{۲}\,\text{مہ ث}\left(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2\right) = \text{م} - \frac{۱}{۲}\,\text{مہ ث ر}^2$$ حاصل ہوتا ہے

جہاں ر مبدا سے فاصلہ ہے۔ اور اگر $\frac{۲}{۳}\pi\,\text{ا}^3$ دیا ہوا حجم ہو تو آزاد سطح نصف قطر ا والا نصف کرہ ہے۔ اور

$$\text{د} = \frac{۱}{۲}\,\text{مہ ث}\left(\text{ا}^2 - \text{ر}^2\right)$$

مستوی کا وہ حصہ جسکو مائع مس کرتا ہے ایک دائرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے اور اس لئے اس پر کا دباؤ

$$= \int_0^{۲\pi}\int_0^{\text{ا}} \text{د ر فرر فرط}$$

$$= \frac{۱}{۴}\,\pi\,\text{مہ ث ا}^4$$

(۲۳) اس نتیجہ کو $\text{مہ}\,\frac{۳}{۸}\,\text{ا} \times \frac{۲}{۳}\,\pi\,\text{ث}\,\text{ا}^{۳}$ کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ یہ جملہ ایسی کشش کو ظاہر کرتا ہے جو مائع کی کل کمیت پر جبکہ وہ مرکز ثقل پر ایک مادی ذرہ میں کثیف ہو جائے عمل کرتی ہے اور در حقیقت یہ جملہ یہ فرض کرکے بھی فوراً حاصل کیا جا سکتا ہے کہ یہ مائع قوت کے مرکز پر کی کشش اور ستوی کے تعامل کی وجہ سے ساکن ہے

(۳) ایک وزن دار مائع کا دیا ہوا حجم ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو مبدأ قرار دو اور ی کو انتصابی سمت میں نیچے کی طرف ناپو۔ تو

$$\text{لا} = -\,\text{مہ}\,\text{لا}\,،\quad \text{ما} = -\,\text{مہ}\,\text{ما}\,،\quad \text{ے} = \text{ج} - \text{مہ}\,\text{ی}$$

$$\therefore\ \text{فرد} = \text{ث}\left\{-\,\text{مہ}\,\text{لا}\,\text{فر}\,\text{لا} - \text{مہ}\,\text{ما}\,\text{فر}\,\text{ما} + (\text{ج} - \text{مہ}\,\text{ی})\,\text{فر}\,\text{ی}\right\}$$

اور

$$\frac{\text{د}}{\text{ث}} = \text{م} - \text{مہ}\,\frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}}{۲} + \text{ج}\,\text{ی}$$

مساوی دباؤ کی سطحیں کرے ہیں۔ اور آزاد سطح بیرونی دباؤ کو صفر فرض کرکے مساوات

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} - \frac{۲\,\text{ج}}{\text{مہ}}\,\text{ی} = \frac{۲\,\text{م}}{\text{مہ}}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اس کرہ کا حجم ہے

$$\frac{۴}{۳}\,\pi\left(\frac{۲\,\text{م}}{\text{مہ}} + \frac{\text{ج}^{۲}}{\text{مہ}^{۲}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

اس کو دئے ہوئے حجم کے مساوی رکھنے سے مستقل م معلوم ہو جاتا ہے اور پھر کسی نقطہ پر کا دباؤ ر اور ی کی رقوم میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

گھومنے والا سیال

۳۰ ـــ اگر سیال کی کچھ مقدار یکساں رفتار سے اور اپنے ذروں کے اضافی مقامات کی تبدیلی کے بغیر (یعنی ٹھوس جسم کی طرح) ایک ثابت محور کے گرد گھومے تو گذشتہ مساواتوں کے ذریعہ ہم کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحوں کی نوعیت معلوم کر سکتے ہیں ۔

کیونکہ اضافی توازن کی ایسی صورتوں میں سیال کا ہر ذرہ ایک دائرہ میں یکساں رفتار سے حرکت کریگا اور سیال کے کسی ذرہ ک پر عمل کرنیوالی بیرونی قوتوں اور اس پر کے سیالی دباؤ کا حاصل قوت ک سہ² ر کے مساوی ہوتا ہے جو محور کی طرف عمل کرتی ہے جہاں سہ زاوی رفتار اور ر، محور سے ذرہ ک کا فاصلہ ہے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بیرونی قوتوں کو اگر سیالی دباؤ اور محور سے عمل کرنیوالی قوتوں ک سہ² ر کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو ہمیں سکونی توازن کا ایک نظام ملیگا جس پر دفعات گزشتہ کی مساواتیں استعمال ہو سکتی ہیں۔

متجانس مائع کی کچھ کمیت ایک برتن میں یکساں رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرنا مطلوب ہے۔

انتصابی محور کو محور ی فرض کرو۔ قوت ک سہ² ر کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے اس کے اجزائے تحلیلی ک سہ² لا اور ک سہ² ما حاصل ہوتے ہیں اور سیالی توازن کی مساوات عامہ ہو جاتی ہے

فر د = ث (سہ² لا فرلا + سہ² ما فرما − ج فری) (۲۴)

اور اس لئے

د = ث { ½ سہ² (لا² + ما²) − ج ی } + م

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں گردشی مکافی نما ہیں اور اگر برتن کے اوپر کا سرا کھلا ہوا ہو تو آزاد سطح مساوات

سہ² (لا² + ما²) − ۲ ج ی + ۲م/ث = ۲پ/ث

سے حاصل ہوتی ہے جہاں پ بیرونی دباؤ ہے۔ مستقل کا تعین ہر خاص صورت میں مفروضہ چیزوں کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً اگر برتن کا سرا بند ہو اور مائع سے اسکو بھر دیا جائے اور پ = ۰ تو محور کے بلند ترین نقطہ کو مبداء قرار دینے سے د = ۰ جبکہ لا، ما، ی صفر ہوں اور اس لئے م = ۰ اور

د = ث { ½ سہ² (لا² + ما²) − ج ی }

۳۱ — اب ایک ایسے لچکدار سیال کی صورت پر غور کرو جو ایسے برتن میں بند ہے جو ایک انتصابی محور

کے گرد گھومتا ہے

اوپر کی طرح

$$فرد = ث\{سہ^2(لا\,فرلا + ما\,فرما) - ج\,فری\}$$

اور $د = م\,ث$

$$\therefore م\,لوک\,ث = سہ^2\frac{لا^2 + ما^2}{۲} - ج\,ی + م$$

اس طرح مساوی دباؤ کی سطحیں اور مساوی کثافت کی سطحیں مکافی نما ہیں۔

فرض کرو کہ برتن اسطوانہ ہے جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے اور نیز سیال کی کل کمیت دی ہوئی ہے مستقل معلوم کرنے کے لئے سیال کو عنصری افقی حلقوں میں (ہر ایک کی کثافت یکساں) ترتیب دیا ہوا خیال کرو۔ اور فرض کرو کہ اونچائی ی پر ایک حلقہ کا نصف قطر ر ہے اور افقی موٹائی مف ر، انتصابی موٹائی مف ی ہے، اور اسطوانہ کا نصف قطر ا اور ارتفاع ف ہے تو

$$حلقہ\ کی\ کمیت = ۲\,\pi\,ث\,ر\,مف\,ر\,مف\,ی$$

$$اور\ سیال\ کی\ کل\ کمیت\ (ک) = \int_0^{ف}\int_0^{ا} ۲\,\pi\,ث\,ر\,فر\,ر\,فری$$

جہاں مبدا کو اسطوانہ کے قاعدہ میں لیا گیا ہے

$$اب\qquad ث = وا^{م} \times و^{\frac{سہ^2 ر^2 - ۲\,ج\,ی}{۲\,م}}$$

$$اور\quad \therefore\quad ک = \frac{۲\,\pi\,م^2}{ج\,سہ^2}\,وا^{م}\left(و^{\frac{سہ^2 ا^2}{۲م}} - ۱\right)\left(۱ - و^{\frac{-ج\,ف}{م}}\right)$$

اس مساوات سے م معلوم ہو جاتا ہے

۲۳— اگر سیال یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کی مساوات عام ہوگی

$$فرد = ث\{لا\,فرلا + ما\,فرما + ے\,فری + سہ^2(لا\,فرلا + ما\,فرما)\}$$

توازن کے امکان کے لئے شرط کی تین مساواتیں پوری ہونی چاہئیں جن سے فرد کا پورا تکملی ہونا ظاہر ہو اور اگر یہ شرطیں پوری ہوں تو مساوی دباؤ کی سطحوں اور بعض صورتوں میں

آزاد سطح کا تعین ہو سکتا ہے لیکن یہ یاد رہے کہ ہمیشہ آزاد سطح کا موجود ہونا ممکن نہیں دراصل آزاد سطح کے وجود کے لئے ضروری ہے کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کے محور کے لحاظ سے متشاکل ہوں۔

امثلہ

۱۔ ایک بند نلی جو ناقص کی شکل میں ہے اور جس کا محور اعظم انتصابی ہے تین مختلف مائعوں سے جن کی کثافتیں ث۱، ث۲، ث۳ ہیں بھر دی گئی ہے۔ اگر سطوح فاصل کے فاصلے کسی ایک ماسکہ سے علی الترتیب ر۱، ر۲، ر۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ر_۱(ث_۲-ث_۳)+ر_۲(ث_۳-ث_۱)+ر_۳(ث_۱-ث_۲)=۰$$

۲۔ ایک ساکن متجانس مائع کی دی ہوئی کمیت کے ذرات قانون قدرت کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے آزاد سطح کے نیچے گہرائی کا مربع۔ (۱) مستطیلی رقبہ پر دباؤ معلوم کرو جو انتصاباً عین ڈوبا ہوا ہے اور جسکا ایک ضلع سطح میں ہے (۲) دائری رقبہ پر کا دباؤ معلوم کرو جو مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے۔

۴۔ مکافی رقبہ کو جو وتر خاص سے محدود ہے ایک مائع میں انتصاباً عین ڈبو دیا گیا ہے اس کا راس مائع کی سطح میں ہے۔ اسپر دباؤ معلوم کرو (۱) جبکہ مائع متجانس ہو (۲) جبکہ مائع کی کثافت ایسی بدلے جیسے گہرائی۔

۵۔ مساوی دباؤ کی سطحیں دریافت کرو جبکہ قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف مائل ہوں اور ایسے بدلتی ہوں جیسے ان مرکزوں سے فاصلے۔

۶۔ ایک منتظم چار سطحی (ذوا اربعۃ السطوح) کو مائع سے بھر دیا گیا ہے، اور اس طرح تھاما گیا ہے کہ ان کے دو متقابل کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے مختلف پہلوؤں پر کے دباؤ کا مائع کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۷۔ اگر نقطہ لا، ما، ی پر فی اکائی کمیت محوروں کے متوازی قوتیں

ما (لا - ی)، لا (لا - ی)، لا ما

عمل کریں تو ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں زائدی مکافی نما ہیں اور مساوی دباؤ اور کثافت

کے منحنی قائم زائد ہیں۔

۸۔۔ ایک ٹھوس کرے کے اندر دو کروی جوف میں جنکے نصف قطر ٹھوس کرے کے نصف قطر کے نصف ہیں انکو مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ ٹھوس اور مائع کے ذرات ایسی قوتوں سے ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں ٹھوس کرہ کے ہم مرکز کرے ہیں۔

۹۔۔ ثابت کرو کہ قوتیں جو

لا = مہ (ما^{۲} + ما ی + ی^{۲})، ما = مہ (ی^{۲} + ی لا + لا^{۲})، ی = مہ (لا^{۲} + لا ما + ما^{۲})

سے تعبیر ہوتی ہیں مائع کی کمیت کو ساکن رکھینگی اگر مائع کی کثافت ایسے بدلے جیسے مستوی لا + ما + ی = ۰ سے $\frac{۱}{(\text{فاصلہ})^{۲}}$۔ نیز ثابت کرو کہ مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنی دائرے ہیں۔

۱۰۔۔ اگر ایک مخروطی پیالی مائع سے بھر دیا جائے تو ثابت کرو کہ مائع کے حجم میں کسی نقطہ پر (۳۶)
کے اوسط دباؤ اور پیالہ کی سطح کے ایک نقطہ پر کے اوسط دباؤ میں نسبت ۳ : ۴ ہوگی۔

۱۱۔۔ ایک بے وزن برتن قائم مخروط کی شکل کا ہے جسکا زاویہ راس ۲ عہ ہے۔ برتن کو مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو کور کے کسی نقطہ سے لٹکا دیا گیا۔ اگر مخروط کے محور کا میلان انتصابی سمت کے ساتھ بہ ہو تو ثابت کرو کہ

مم ۲ بہ = مم ۲ عہ − $\frac{۳}{۴}$ قم ۲ عہ

۱۲۔۔ مائع کی کچھ کمیت ایک مرکزی جاذب قوت ($\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{۲}}$) کے زیر عمل ایک مستوی پر ساکن ہے، قوت کا مرکز مستوی سے ج فاصلہ پر اُس طرف واقع ہے جس طرف مائع نہیں ہے۔ مائع کی آزاد کروی سطح کا نصف قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی پر دباؤ

$$= \frac{\text{۲π ث مہ}}{\text{ا}} (\text{ا} - \text{ج})^{۲}$$

۱۳۔۔ ایک متجانس مائع دو قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جو ایسے بدلتی ہیں جیسے دو ثابت نقطوں سے فاصلوں کے معکوس مربعے۔ مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرو۔

اگر صفر دباؤ کی سطح ایک کرہ ہو تو ثابت کرو کہ ایسے نقطوں کے طریق بھی جن پر کا دباؤ قوت کے ایک مرکز سے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے کرے ہیں۔

۱۴ ـــ اگر مائع کے ایک عنصر (جو نقطہ لا، ما، ی پر ہے) پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزاے
تحلیلی محوروں کے متوازی علی الترتیب

ما^۲ + ۲ نہ لا ما + لا^۲ ، لا^۲ + ۲ مہ ی لا + ی^۲ ، ی^۲ + ۲ لہ ما ی + ما^۲

کے متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ توازن ممکن ہونے کی صورت میں ہمیں حاصل ہونا چاہیے

۲ لہ = ۲ مہ = ۲ نہ = ۱

۱۵ ـــ مائع کی کچھ کمیت قوتوں

لا = (ما + ی)^۲ - لا^۲ ، ما = (ی + لا)^۲ - ما^۲ ، ے = (لا + ما)^۲ - ی^۲

کے زیر عمل توازن میں ہے۔ کثافت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردشی زائدنما ہیں۔

۱۶ ـــ مائع قوت کے ایک میدان میں ساکن ہے جہاں

لا = ما^۲ + ی^۲ - لا ما - لا ی ، ما = ی^۲ + لا^۲ - ما ی - لا ما ، ے = لا^۲ + ما^۲ - ی لا - ی ما

ثابت کرو کہ مساوی دباؤ اور کثافت کے منحنی دائروں کا ایک جبٹ ہیں۔

۱۷ ـــ اگر لا = ما (ما + ی) ، ما = ی (ی + لا) ، ے = ما (ما - لا)
تو ثابت کرو کہ مساوی دباؤ اور کثافت کے منحنی ما (لا + ی) = مستقل، اور
ما + ی = مستقل سے حاصل ہوتے ہیں

۱۸ ـــ مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرو جبکہ کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کی قوتوں کے اجزاے
تحلیلی ما (ما + ی) ، ی (ی + لا) ، ما (ما - لا) ہوں۔ ثابت کرو کہ مطلوبہ سطحیں
زائدی مکافی نما ہیں

ما (لا + ی)^۲ = ج (ما + ی)

۱۹ ـــ مائع قوتوں کے دیے ہوئے نظام کے زیر عمل متوازن ہے اگر ث = فہ (لا، ما، ی)،
ث‌۱ = فہ (لا، ما، ی) کسی نقطہ پر کی کثافت کی دو ممکن قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ ہر
صورت میں مساوی دباؤ کی سطحوں کی مساواتیں

فہ (لا، ما، ی) + لہ × فہ (لا، ما، ی) = ۰

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں لہ اختیاری مبدل ہے۔

۲۰ — ایک کھوکھلا کرہ جس کا نصف قطر ا ہے اکائی کثافت کے متجانس مائع سے عین بھر دیا گیا ہے۔ اسکو دو خارجی جاذب مرکزی قوتوں $\frac{\text{م}}{\text{ر}^2}$ اور $\frac{\text{مَ}}{\text{رَ}^2}$ کے درمیان جن کا باہمی فاصلہ ج ہے ایسے مقام پر رکھدیا گیا کہ قوتوں کی وجہ سے اس کے مرکز پر کششیں مساوی مگر متقابل ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے

$$\frac{\text{م}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{مَ}^2}{\text{رَ}} - \frac{\text{م}^{\frac{1}{2}}\,\text{مَ}^{\frac{1}{2}}\,(\text{م} + \text{مَ})^2}{\left\{(\text{م} + \text{مَ})^2\,\text{ا}^2 + \text{م}\,\text{مَ}\,\text{ج}^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

(۲۷) ۲۱ — ایک کرہ جس کا نصف قطر ج ہے متجانس مائع سے تقریباً بھر دیا گیا ہے یہ کرہ قوت کے دو بیرونی مرکزوں کے زیر اثر ہے جو کرہ کے قطر پر مرکز کی متقابل جانبوں میں اس سے ا، اَ فاصلوں پر واقع ہیں کسی نقطہ پر قوت کے ہر مرکز کی کشش فاصلہ کے مربع کے تناسب معکوس میں ہے اور مائع کی کمیت پر ان کی کششیں بالترتیب $\frac{4}{3}\pi\,\text{ج}^3\,\text{س}$ اور $\frac{4}{3}\pi\,\text{ج}^3\,\text{سَ}$ ہیں۔

اگر $\left(\frac{\text{س}}{\text{سَ}}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{\text{اَ}(\text{ا} - \text{ج})}{\text{ا}(\text{اَ} + \text{ج})}$ اور $\frac{\text{اَ}(\text{ا} + \text{ج})}{\text{ا}(\text{اَ} - \text{ج})}$ کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\text{س}\,\text{ا} + \text{سَ}\,\text{اَ} - \left\{\frac{\text{ا}\,\text{اَ}\,(\text{ا}\,\text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{اَ}\,\text{سَ}^{\frac{2}{3}})^3}{(\text{ج}^2 + \text{ا}\,\text{اَ})(\text{ا} + \text{اَ})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

۲۲ — ایک مائع کی کثافت جو ایک اسطوانی برتن میں ہے ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کو دوسرے برتن میں منتقل کیا گیا ہے جس میں کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ اس نئے برتن کی شکل معلوم کرو۔

۲۳ — ایک مستدیر مخروط جس کا زاویہ راس $\frac{\pi}{3}$ ہے پانی سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کا ایک کون ایک افقی مستوی میں مضبوط جوڑ دیا گیا ہے مستوی کو یکساں زاوی رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد جو مخروط کے راس میں سے گزرتا ہے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی

رفتار معلوم کرو کہ جس سے بلند ترین نقطہ پر دباؤ صفر رہ سکے اور اس صورت میں قاعدہ پر کا دباؤ بھی معلوم کرو۔

۲۴ — ایک سیدھا ڈنڈا جسکا ہر ذرہ ایسی قوت سے کشش کرتا ہے جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے متجانس بے لچک سیال کی کمیت سے گھرا ہوا ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کرو۔

۲۵ — ایک وزن دار مائع افقی مستوی پر ٹھہرا ہوا ہے اور ایک ثابت مرکز کی طرف ایسی مستقل قوت سے جذب ہو رہا ہے جس کی شدت جاذبہ ارض کے مساوی ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کرو۔

نیز مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ جب مستوی قوت کے مرکز میں سے گزرتا ہے تو یہ دباؤ مائع کے وزن کا $\frac{۲}{۳}$ ہوتا ہے۔ نیز مستوی پر کا دباؤ اس صورت میں بھی معلوم کرو جبکہ مستوی قوت کے مرکز کے نیچے یا اوپر واقع ہو۔

۲۶ — ایک ہمذات خول کا دو کروی سطحیں احاطہ کرتی ہیں جو ہم مرکز نہیں۔ خول کا مادہ قدرت کے قانون کی بموجب کشش کرتا ہے۔ خول کے اندر کے حصہ کو متجانس مائع سے جزاً بھر دیا گیا ہے جو ایک ساتھ یکساں رفتار سے کروں کے مرکزوں میں سے گزرنیوالے خط مستقیم کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح گردشی مکافی نما ہے۔

۲۷ — ایک استوار کروی خول متجانس بے لچک سیال سے بھر دیا گیا ہے جس کا ہر ذرہ ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتا ہے جو فاصلے کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے ثابت کرو کہ سطح پر کے دباؤ اور سیال کے کسی اندرونی نقطہ پر کے دباؤ کا فرق اس نقطہ میں سے گزرنیوالی کرہ کی چھوٹی سے چھوٹی تراش کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۲۸ — ایک کھلا برتن جس میں مائع ہے یکساں زاوی رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھمایا گیا ہے برتن کی شکل اور اس کے ابعاد معلوم کرو کہ وہ عین خالی ہو جائے۔

۲۹ — متجانس سیال کی ایک غیر محدود کمیت ایک بند سطح کے گرد ہے اور سطح کے اندرونی نقطہ (و) کی طرف ایسی قوت سے جذب ہو رہی ہے جو فاصلے کے مکعب کے تناسب معکوس میں ہے اگر سطح کے کسی نقطہ ن پر کے عنصر پر جو دباؤ ہے اسے سمت ن و میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس طرح حاصل شدہ تمام نقطوں کے قطری دباؤں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے خواہ سطح کی جسامت اور اس کی شکل کچھ ہی ہو بشرطیکہ نقطہ ن سے لامتناہی

فاصلہ پر سیال کا دباؤ معدوم ہو جاتا ہو۔

۳۰ ـــ خط صنوبری (cardiod)

ر = ا (ا ـ جم طہ)

کو اس کے محور کے گرد جو انتصابی ہے (راس اوپر کی طرف) گھما کر ایک ظرف بنایا گیا ہے اور اسکو پانی سے مین بھر دیا گیا ہے۔ یکساں زاوی رفتار سے یہ اس محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ یہ رفتار معلوم کرو جبکہ صفر دباؤ کا خط طہ = ۲/۳ ہو کسی دوسرے نقطہ پر بھی دباؤ معلوم کرو۔ اور وہ نقاط بھی دریافت کرو جن پر کا دباؤ بڑے سے بڑا ہے

۳۱ ـــ تمام فضا ایک ایسے لچکدار سیال سے بھری ہوئی ہے جس کے ذرات ایک نقطہ کی (۲۸)
طرف ایسی قوت سے جذب ہوتے ہیں جو ایسی بدلتی ہے جیسے فاصلہ اس سیال کی پوری کیت دی گئی ہے۔ ایک دائری قرص پر کا دباؤ معلوم کرو جس کا مرکز قوت کے مرکز پر ہے۔

۳۲ ـــ ایسے دائرے کھینچے گئے جن کے مرکز محوری پر ہیں اور جو مستوی لاما کو مبدا و پر مس کرتے ہیں۔ کسی نقطہ ن کا تعین (ر، طہ، فہ) سے کیا گیا ہے جہاں نقطہ ن میں سے گذرنیوالے دائرہ کا نصف قطر اور اس کا مرکز ج ہے، زاویہ و ج ن کو طہ سے اور مستوی و ج ن اور محوری میں سے گذرنیوالے ایک ثابت مستوی کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اس کو فہ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ

فرد/ث = م ر (ا ـ جم طہ) فرر + ت جب طہ فرر + ف ار فرطہ + (ن) ر جب طہ فرفہ

جہاں مائع کے عنصر م پر قوتیں م ر، م ت، م (ن) علی الترتیب رج ن کی سمت میں، دائرہ کے نقطہ ن پر کے ماس کی سمت میں، اور دائرہ کی مستوی پر کے عماد کی سمت میں عمل کرتی ہیں۔

۳۳ ـــ ایک لچکدار سیال کی کیت ک ایک محور کے گرد یکساں زاوی رفتار مہ سے گھوم رہی ہے اور محور کے ایک نقطہ کی طرف ایسی کشش کے زیر عمل ہے جو فاصلہ کے مہ گنا کے مساوی ہے۔ مہ، سہ۲ سے بڑا ہے۔ ثابت کرو کہ مساوی کثافت ث کی سطح کی مساوات ہے

مہ (لا۲ + ما۲ + ی۲) ـ سہ۲ (لا۲ + ما۲) = م لوک { مہ (مہ ـ سہ۲)۲ / ۸ π ۳ × ک۲ / ث۲ ... }

۳۴ — مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک الٹے مکافی نما میں جس کا وتر خاص ج ہے ف ارتفاع تک بھری ہوئی ہے ثابت کرو کہ اس کی کثافت ایسے بدلے گی جیسے گہرائی کا مربع اگر اس کو ایسے برتن میں منتقل کیا جائے جسکی شکل منحنی

$$\text{ی}^2\,\text{ما}^2 = ۲\,\text{ج}\,\text{ف}^2\,\text{لا}\,(\text{ا} - \text{لا})(۲\text{ا} - \text{لا})$$

کو محور لا کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے جہاں ا کوئی مستقل ہے۔

۳۵ — جاذب بالذات مائع کی کمیت جسکی کثافت ث ہے توازن میں ہے قانون کشش معکوس مربع کا قانون ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کے کسی کرہ میں اوسط دباؤ مرکز پر کے دباؤ سے بقدر $\frac{۲}{۵}\pi$ ث² ر² کے کم ہوگا جہاں ر کرہ کا نصف قطر ہے۔

۳۶ — ایک بند کھوکھلا قائم مستدیر مخروط ایک افقی مستوی پر اپنے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔ اس کو مائع سے عین بھر دیا گیا جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کے بعد اسکو الٹ کر اس طرح تھاما گیا ہے کہ اس کا راس عین مستوی پر ہو اور محور انتصابی ہو۔ ثابت کرو کہ اسکی منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ مقدار میں غیر متغیر رہتا ہے لیکن مائع کی توانائی بالقوہ نسبت

$$۲\left\{\text{جا}\left(\frac{\text{ا}}{۴}\right)\right\}^2 : ۳\,\text{جا}\left(\frac{\text{ا}}{۲}\right)$$

سے بدلجاتی ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اگر مائع کو مستوی پر ڈالدیا جائے تو توانائی بالقوہ صفر ہوتی ہے۔

۳۷ — ایک سیال قانون

$$\frac{(\text{ث} - \text{ثٖ})}{\text{ثٖ}} = \text{ہ}\,\frac{(\text{د} - \text{دٖ})}{\text{دٖ}}$$

کے مطابق خفیف طور پر دبتا ہے جہاں ہ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس سیال کی $\frac{۴}{۳}\pi$ ثٖ ا³ کمیت اپنے ذاتی تجاذب اور بیرونی دباؤ دٖ کے زیر عمل ایک کروی شکل اختیار کرتی ہے جس کا نصف قطر تقریباً

$$\text{ا}\left(۱ - \frac{۲}{۴۵} \times \frac{\text{ہ}\,\text{م}\,\pi\,\text{ا}^2\,\text{ثٖ}^2}{\text{دٖ}}\right)$$

ہے جہاں م تجاذب کا مستقل ہے۔

۳۸ — گیس کی ک کمیت جو مستقل تپش پر ہے تمام فضا میں پھیلا دی گئی ہے اور ہر نقطہ

(لا، ما، ی) پر قوت (فی اکائی کمیت) کے اجزائے تحلیلی - ا لا ، - ب ما ، - ج ی ہیں۔ مبداء پر دباؤ اور کثافت علی الترتیب د. اور ث. کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ

ا ب ج ث. ک² = ۸ ہ³ د.³

۳۹ ـــــ ہوا کی دی ہوئی کمیت ایک ہوا بند اسطوانہ میں ہے جس کا محور انتصابی ہے۔ ہوا اسطوانہ کے محور کے گرد اضافی توازن میں گھوم رہی ہے۔ محور کے بلند ترین نقطہ پر دباؤ ک اور اس کی منحنی سطح کے بلند ترین نقاط پر دباؤ د ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سیال مطلق طور پر ساکن ہوتا تو محور کے بالائی نقطہ پر کا دباؤ (۳۹)

(د − ک) / (لوک د − لوک ک)

ہوتا، جہاں ہوا کا وزن بھی محسوب کیا گیا ہے۔

۴۰ ـــــ گیس کی کچھ کمیت مستقل تپش پر ایسی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کا قوہ فضا کے کسی نقطہ پر فہ ہے (فضا کے حدودی شرائط کچھ بھی ہو سکتے ہیں)۔ اس نقطہ پر جہاں فہ صفر ہوتا ہے، دباؤ ہ اور کثافت ث ہے۔

اب گیس پر سے قوتوں کا عمل ہٹا دیا گیا ہے اور اسکو ایسی فضا میں بند کیا گیا ہے جس میں اس کی کثافت یکساں ث. رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ پھیلاؤ کے باعث گیس میں ذاتی توانائی بالقوہ کا نقصان ہے

ث. ∭ فہ لو (ث.فہ / ہ) فرح

جہاں تکمل کل گیس بھر میں لئے گئے ہیں جبکہ وہ ابتدائی حالت میں تھی۔

۴۱ ـــــ ایک لچکدار سیال کی دی ہوئی کمیت ک ایک استوار خول میں داخل کی گئی اس خول کی مساوات لا²/ا² + ما²/ب² + ی²/ج² = ۱ ہے اور سیال کے لئے کلیہ د = م ث درست رہتا ہے یہ سیال ایسی قوتوں کے نظام کے زیر عمل سکون اختیار کرتا ہے جس کا قوتی تفاعل ہے م/۲ لوک (لا²/ا² + ما²/ب² + ی²/ج²) + مستقل

اگر سطح

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}+\frac{\text{ی}^{2}}{\text{ج}^{2}}=\frac{1}{\text{پ}^{2}}$$

کے کسی نقطہ پر کا دباؤ ث ہو تو ثابت کرو کہ خول کے اندر کمیت کے مساوی حصوں کے حساب سے اوسط دباؤ ہوگا

$$\frac{4\pi\,\text{ث}^{2}\,\text{پ}^{2}}{15\,\text{م}\,\text{ک}}\left(\frac{\text{ب ج}}{\text{ا}}+\frac{\text{ج ا}}{\text{ب}}+\frac{\text{ا ب}}{\text{ج}}\right)$$

۴۲ — ایک بند نصف کروی برتن کا نصف قطر ا ہے۔ اسکو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی مستوی سطح افقی اور اوپر وار رہے اس میں متجانس وزن دار مائع ڈالا گیا ہے جو محور کی طرف ایسی قوت سے جذب ہوتا ہے جو محور سے فاصلہ کے مکعب کے تناسب معکوس میں ہے۔ مائع کا حجم اسقدر ہے کہ اس کی آزاد سطح نصف کرہ کو راس سے زاوی فاصلہ $\frac{\pi}{3}$ پر ملتی ہے۔ اگر یہ نظام محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھومے تو آزاد سطح برتن کے مستوی رخ کو کنارہ پر ایسے دائرہ میں ملتی ہے جس کا نصف قطر ب ہے ثابت کرو کہ اکائی فاصلہ پر قوت سہ² ا ب² ہونی چاہیئے اور ب اور سہ مساوات ذیل سے مربوط ہیں

$$\frac{11\,\text{ج}\,\text{ا}^{3}}{6\,\text{سہ}^{2}}=\text{ا}^{4}-\text{ب}^{4}+2\,\text{ا}^{2}\text{ب}^{2}\,\text{لوک}\left(\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{3\,\text{ج}}{4\,\text{ا}\,\text{سہ}^{2}}\right)$$

۴۳ — مائع کی کچھ یکساں کمیت کروی شکل کی ہے۔ اس کی کثافت ث + ہ ہے اور نصف قطر ا اس کے گرد دوسرا بے لچک مائع ہے جس کی کثافت ث ہے اور بیرونی نصف قطر ب۔ یہ پورا نظام صرف اپنے ذاتی تجاذب کی وجہ سے توازن میں ہے اور نیز کوئی بیرونی دباؤ عمل نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{2}{3}\pi(\text{ث}+\text{ہ})^{2}\,\text{ا}^{2}+\frac{2}{3}\pi\,\text{ث}\left\{\frac{2\,\text{ا}^{2}}{\text{ب}}\,\text{ہ}+\text{ث}(\text{ا}+\text{ب})\right\}(\text{ب}-\text{ا})$$

۴۴ — ایک بے لچک سیال کی یکساں کروی کمیت جس کی کثافت ث اور نصف قطر ا ہے دوسرے بے لچک سیال سے جس کی کثافت ہ اور بیرونی نصف قطر ب ہے گھری ہوئی ہے پورا سیال اپنے جاذبہ کی وجہ سے متوازن ہے اور کوئی بیرونی دباؤ یا قوتیں عمل نہیں کرتیں دونوں سیالوں کو ملا کر اسی حجم کا ایک متجانس سیال تیار کیا گیا ہے اور پھر یہ کمیت کروی شکل

میں متوازن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی صورت میں مرکز پر کا دباؤ دوسری صورت میں مرکز پر کے دباؤ سے بقدر

$$\frac{۸}{۳}\pi\,\text{ه}\,(\text{ث}-\text{ه})\,\text{ا}^{۲}\left(۱-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)\left[۱+\frac{۱}{۴}\left(\frac{\text{ث}}{\text{ه}}-۱\right)\left(۱+\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)\left(۱+\frac{\text{ا}^{۲}}{۲\text{ب}}\right)\right]$$

کے بڑا ہے۔

۴۵ — ایک متجانس تجاذبی ٹھوس سطح $\text{ر} = \text{ا}\left\{۱+\text{عه}\,\text{ع}_{\text{ن}}(\text{جم}\,\text{طه})\right\}$ سے محدود ہے۔ اس ٹھوس کی کمیت ک اور کثافت ه ہے اور عه اتنا چھوٹا ہے کہ اس کا مربع نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یہ ٹھوس ایک تجاذبی مائع سے جسکی کمیت ک اور کثافت ث ہے گھرا ہوا ہے ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات تقریباً

(۳۱) $$\text{ر} = \text{ب}\left\{۱+\text{ہ}\,\text{ع}_{\text{ن}}(\text{جم}\,\text{طه})\right\}$$

ہے جہاں

$$\text{ب}^{۳} = \frac{۳}{۴\pi}\left\{\frac{\text{ک}}{\text{ث}}+\frac{\text{ک}}{\text{ه}}\right\}$$

اور

$$\text{ہ} = \frac{۳(\text{ه}-\text{ث})\,\text{ا}^{\text{ن}+۳}\,\text{عه}}{\left\{(۲\text{ن}-۲)\,\text{ث}\,\text{ب}^{۳}+(۲\text{ن}+۱)(\text{ه}-\text{ث})\,\text{ا}^{۳}\right\}\text{ب}^{\text{ن}}}$$

۴۶ — ایک یکساں بے لچک سیال کی کمیت تجاذبی اکائیوں میں ک ہے۔ اپنی ذاتی کشش کے زیر اثر یہ ایک کرہ کی شکل اختیار کرتا ہے جس کا نصف قطر ا ہے اسکو ایک کمزور قوت کے میدان میں رکھا گیا ہے جس کا تجاذبی قوہ ہے

$$\sum \text{مس}_{\text{ن}}\,\frac{\text{ر}^{\text{ن}}}{\text{ا}^{\text{ن}+۱}}\,\text{ع}_{\text{ن}}(\text{جم}\,\text{طه})' \quad (\text{ن} > ۱)$$

جہاں مائع کی اوسط کروی سطح کے مرکز سے ر ناپا گیا ہے۔ مس کے نمونہ کی رقموں کے مربعے نظر انداز کئے جا سکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات ہے۔

$$\frac{\text{ر}}{\text{ا}} = ۱ + \sum \frac{\text{م}^{\text{ن}}}{\text{ک}} + \frac{۲\text{ن}+۱}{۲\text{ن}-۲}\ \text{ع}_{\text{ن}}\ (\text{جمطہ})$$

۴۷ — اگر زمین کو متجانس مائع کا ایک کرہ خیال کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز پر دباؤ ½ ث ۱
پونڈ فی مربع فٹ ہوگا جہاں زمین کے مادہ کے ایک مکعب فٹ کمیت کا وزن ث۱ پونڈ ہے اور زمین
کا نصف قطر ا فٹ۔

۴۸ — تجاذبی مائع کا ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے۔ کسی نقطہ پر اس کی کثافت یکساں طور
پر بڑھتی جاتی ہے جیسے وہ نقطہ مرکزہ کے قریب آتا جاتا ہے سطحی کثافت ث۱ اور اوسط
کثافت ثَ ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{۲}{۹}\ \pi\ \text{ا}^۲ \left\{ ۱۰\ \text{ثَ}\ (\text{ثَ} - \text{ث}_۱) + ۳\ \text{ث}_۱^۲ \right\}$$

۴۹ — تجاذبی سیال کا ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے۔ مساوی کثافت کی سطحیں
حدودی سطح کے ساتھ ہم مرکز کرے ہیں۔ اور آزاد سطح سے مرکز کی طرف جانے میں کثافت کسی
قانون کی بموجب بڑھتی جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ اُس دباؤ سے جبکہ کثافت یکساں
ہو بقدر

$$\frac{۸}{۹}\ \pi\ \text{جہ} \int^{\text{ا}} (\bar{\text{ث}}^۲ - \text{ثَ}^۲)\ \text{ر فر}$$

کے بڑا ہوتا ہے جہاں ث پوری کمیت کی اوسط کثافت کو اور ثَ اس حصہ کی اوسط کثافت
کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز سے ر نا صلہ کے اندر ہے اور جہ تجاذب کا مستقل ہے۔

(۳۱)

باب سوم

سطحوں پر سیالات کا حاصل دباؤ

۳۴۔۔۔ ہم نے گذشتہ باب میں یہ دیکھا ہے کہ سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے جبکہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیرِ عمل ساکن ہو۔ اب ہم اُن دباؤں کے حاصل دریافت کرینگے جو سیال سطحوں پر پیدا کرتے ہیں جن کے ساتھ وہ تماس رکھتے ہوں۔

سطحوں پر سیال کے عمل کو ہم اس ترتیب سے بحث میں لائیں گے۔ پہلے سیالات کا عمل مستوی سطحوں پر بھر جاذبہ ارض کے ماتحت سیال کا عمل منحنی سطحوں پر اور آخر میں کسی دی ہوئی قوتوں کے ماتحت ساکن سیال کا عمل منحنی سطحوں پر۔

مستوی سطحوں پر سیالی دباؤ

چونکہ مستوی کے تمام نقطوں پر دباؤ مستوی پر عمود وار ہوتے ہیں اور ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں اس لئے حاصل دباؤ ان تمام دباؤں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

پس اگر سیال بے لچک ہو اور صرف جاذبہ ارض کے زیرِ عمل ہو تو کسی مستوی پر کا حاصل دباؤ

= Σ ج ث ی فر ا جہاں مستوی رقبہ کے عنصر فر ا کی گہرائی ی ہے

= ج ث یَ ا

جہاں ا ہے مستوی کا رقبہ اور یَ ہے اس کے مرکزِ ہندسی کی گہرائی تعبیر ہوتی ہے۔

عام طور پر اگر سیال کسی قسم کا ہو اور دی ہوئی قوتوں کے زیرِ عمل ساکن ہو تو مستوی کے اندر محور لا اور ما لو اور فرض کرو کہ نقطہ (لا ، ما) پر دباؤ د ہے۔

تو رقبہ کے عنصر مف لا مف ما پر کا دباؤ = د مف لا مف ما

∴ حاصل دباؤ = ∫∫ د فر ما فر لا

جہاں تکمل کل رقبہ زیر بحث پر لیا گیا ہے۔

اگر قطبی محدد استعمال کئے جائیں تو حاصل دباؤ

= ∫∫ د ر فر ر فر طہ

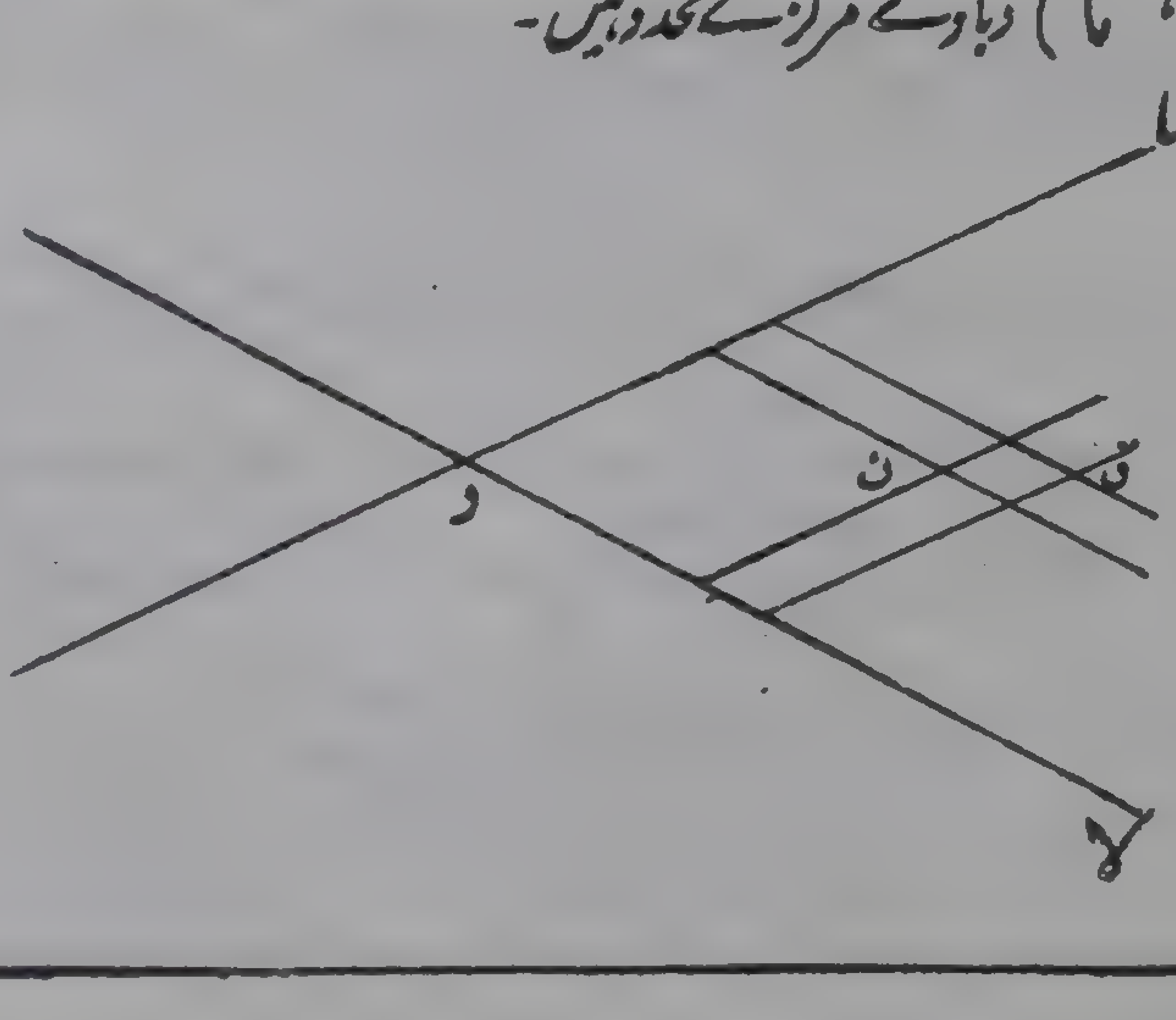
۳۴۔ تعریف۔ سطح مستوی کی صورت میں دباؤ کا مرکز وہ نقطہ ہے جہاں مستوی سے اُس تنہا قوت کی سمت ملتی ہے جو مستوی سطح پر کے تمام سیالی دباؤں کے حاصل کے مساوی ہے۔

یہاں دباؤ کے مرکز کی تعریف مستوی سطحوں کے لحاظ سے کی گئی ہے۔ آیندہ یہ معلوم ہوگا کہ منحنی سطحوں پر سیالات کا حاصل عمل ہمیشہ ایک تنہا قوت میں تحلیل نہیں کیا جا سکتا۔ (۳۲)

وزن دار سیال کی صورت میں یہ ظاہر ہے کہ افقی رقبہ کا دباؤ کا مرکز اس کا مرکز ہندسی ہوگا کیونکہ اس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ مساوی ہے اور چونکہ گہرائی کے بڑھنے کے ساتھ دباؤ بھی بڑھتا جاتا ہے اس لئے غیر افقی مستوی میں دباؤ کا مرکز مرکز ہندسی کے نیچے واقع ہوگا۔

کسی مستوی رقبہ کا دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کے لئے ضابطے۔ فرض کرو کہ مستوی کے اندر علی القوائم محاور کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہیں اور اس پر کا دباؤ د، اور اس کے ساتھ کے نقطہ کے محدد (لا + مف لا، ما + مف ما) ہیں۔

نیز (لاَ، ماَ) دباؤ کے مرکز کے محدد ہیں۔



تو $\overline{\text{ما}} \times \iint \text{د فرما فرلا} = $ ولا کے گرد حاصل دباؤ کا معیار

= ولا کے گرد رقبہ کے تمام عناصر پر کے دباؤں کے معیاروں کا مجموعہ

$$= \sum \text{د سف ما سف لا} \times \text{ما}$$

$$= \iint \text{د ما فرما فرلا}$$

$$\therefore \quad \overline{\text{ما}} = \frac{\iint \text{د ما فرما فرلا}}{\iint \text{د فرما فرلا}}$$

اسی طرح

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\iint \text{د لا فرما فرلا}}{\iint \text{د فرما فرلا}}$$

تکملے رقبہ زیر بحث پر لئے گئے ہیں۔
اگر قطبی محدد استعمال کئے جائیں تو اسی طرح کے طریق عمل سے

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\iint \text{د ر}^{2}\text{ جم طہ فرر فرطہ}}{\iint \text{د ر فرر فرطہ}} \ , \quad \overline{\text{ما}} = \frac{\iint \text{د ر}^{2}\text{ جب طہ فرر فرطہ}}{\iint \text{د ر فرر فرطہ}}$$

(۴۴) ۳۵ — اگر سیال متجانس اور بے لچک ہو اور صرف جاذبہ ارض ہی عمل کرے تو

$$\text{د} = \text{جَ ث گ}$$

جہاں گ سطح کے نیچے نقطہ ن کی گہرائی ہے۔ اس لئے اس صورت میں

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\iint \text{گ لا فرما فرلا}}{\iint \text{گ فرما فرلا}} \ , \quad \overline{\text{ما}} = \frac{\iint \text{گ ما فرما فرلا}}{\iint \text{گ فرما فرلا}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

بعض اوقات مستوی اور سیال کی سطح کے خط تقاطع کو ایک محور مقرر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اگر اس خط کو ہم محور لا فرض کریں اور مستوی اور افق کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

د = ج ث ما جب طہ ا اور اس لئے

لاَ = ∫∫ لا ما فر ما فر لا ÷ ∫∫ ما فر ما فر لا ، ماَ = ∫∫ ما² فر ما فر لا ÷ ∫∫ ما فر ما فر لا ……… (بہ)

ان آخری مساواتوں (بہ) سے ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کا مقام مستوی اور افق کے درمیانی زاویہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ اس لئے اگر مستوی اور سیال کی سطح کے خط تقاطع کے گرد مستوی کو گھمایا جائے تو دباؤ کے مرکز کے مقام میں تبدیلی واقع نہیں ہوگی۔

اگر مساواتوں (ہ) میں گ کو مستقل قرار دیا جائے یعنی اگر مستوی کو افقی فرض کیا جائے تو لاَ اور ماَ رقبہ کے مرکز ہندسی کے محدد ہو جاتے ہیں اور یہ نتیجہ دفعہ ۳۴۴ کے مطابق ہے۔ لیکن مساواتوں (بہ) میں لاَ اور ماَ کی قیمتیں طہ پر منحصر نہیں ہیں اور طہ کے معدوم ہونے سے ان کی شکل میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس صورت میں مرکز ہندسی کے محدد حاصل نہیں ہوتے۔ اس ظاہری بے ضابطگی کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے۔ طہ کو کتنا ہی چھوٹا لیا جائے مستوی اور سیال کی سطح کا درمیانی سیال ہمیشہ فانہ کی شکل میں ہوگا۔ اور مستوی کے مختلف نقاط پر کے دباؤ اگرچہ انتہا میں سب معدوم ہوتے ہیں لیکن یہ مساویت کی نسبتوں میں معدوم نہیں ہوتے بلکہ طہ کی کسی محدود قیمت کے لئے یہ دباؤ جو مستقل نسبتیں آپس میں رکھتے ہیں اُن مستقل نسبتوں میں یہ صفر ہوتے ہیں۔

اس دفعہ کی مساواتیں استدلال ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں۔

مستوی رقبہ کو محدود کرنے والے خط کے ہر نقطہ سے انتصابی خطوط سیال کی سطح تک کھینچو اس طرح سیال کی کچھ کمیت ان میں گھر جائیگی۔ اب مستوی کے تعامل کا انتصابی جزو تحلیلی سیال کی اس کمیت کے وزن کے برابر ہوگا اور یہ وزن کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرے گا اور جہاں پر یہ خط مستوی رقبہ کو ملے گا وہ دباؤ کا مرکز ہوگا۔

وہی محور لو تو ایک عنصری منشور کا وزن جو مستوی کے نقطہ (لا ، ما) میں سے عمل کرتا ہے ج ث گ مف لا مف ما جم طہ ہوگا جہاں افق کے ساتھ مستوی کا میلان طہ ہے، اور اس لئے مستوی کے نقطوں پر عمل کرنے والی ان متوازی قوتوں کا مرکز مساواتوں (۳۳۴)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iint \text{ج ث گ لا جم طہ فرما فرلا}}{\iint \text{ج ث گ جم طہ فرما فرلا}} \text{ ، } \bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{ج ث گ ما جم طہ فرما فرلا}}{\iint \text{ج ث گ جم طہ فرما فرلا}}$$ سے یعنی

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iint \text{گ لا فرما فرلا}}{\iint \text{گ فرما فرلا}} \text{ ، } \bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{گ ما فرما فرلا}}{\iint \text{گ فرما فرلا}}$$ سے حاصل ہوتا ہے۔

بس یہ ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی گھرے ہوئے سیال کی کمیت کے مرکز کی گہرائی کا دوچند ہے۔

۳۶ — وزن دار مائع کی صورت میں دباؤ کے مرکز کا مقام مسئلہ ذیل سے ہندسی طور پر حاصل ہوسکتا ہے۔

اگر رقبہ کے مستوی میں ایک ایسا خط مستقیم لیا جائے جو مائع کی سطح کے متوازی اور رقبہ کے مرکز ہندسی سے اتنا ہی نیچے واقع ہو جتنا اس سے (مرکز ہندسی سے) مائع کی سطح اوپر واقع ہے تو اس خط مستقیم کا قطب بلحاظ مرکز ہندسی پر کے معیاری قطع ناقص کے جس کے نیم محور اس نقطہ پر گردش کے صدری نیم قطر ہیں دباؤ کا مرکز ہوگا۔

رقبہ کو ! اور گردش کے صدری نصف قطروں کو ا، ب، فرض کرو تو یہ صدری نصف قطر ان مساداتوں سے معلوم ہوتے ہیں:-

$$\text{!}\,\text{ا}^{2} = \iint \text{لا}^{2}\ \text{فرلا فرلا} \qquad \text{!}\,\text{ب}^{2} = \iint \text{ما}^{2}\ \text{فرلا فرما}$$

معیاری (Momental) ناقص کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$$

جہاں حوالے کے محور مرکز ہندسی پر کے صدری محور ہیں۔

فرض کرو کہ $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$ دباؤ کے مرکز کے محدد ہیں اور سطح میں کے خط کی مساوات ہے

$$\text{لا جم طہ} + \text{ما جب طہ} = \text{ع}$$

$$\text{تو}\ \bar{\text{لا}} = \frac{\iint(\text{ع} - \text{لا جم طہ} - \text{ما جب طہ})\ \text{لا فرلا فرما}}{\iint(\text{ع} - \text{لا جم طہ} - \text{ما جب طہ})\ \text{فرلا فرما}} = -\frac{\text{ا}^2}{\text{ع}}\ \text{جم طہ}$$

اور اسی طرح $\bar{\text{ما}} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ع}}\ \text{جب طہ}$

$\therefore$ ($\bar{\text{لا}}$ ، $\bar{\text{ما}}$) خط مستقیم

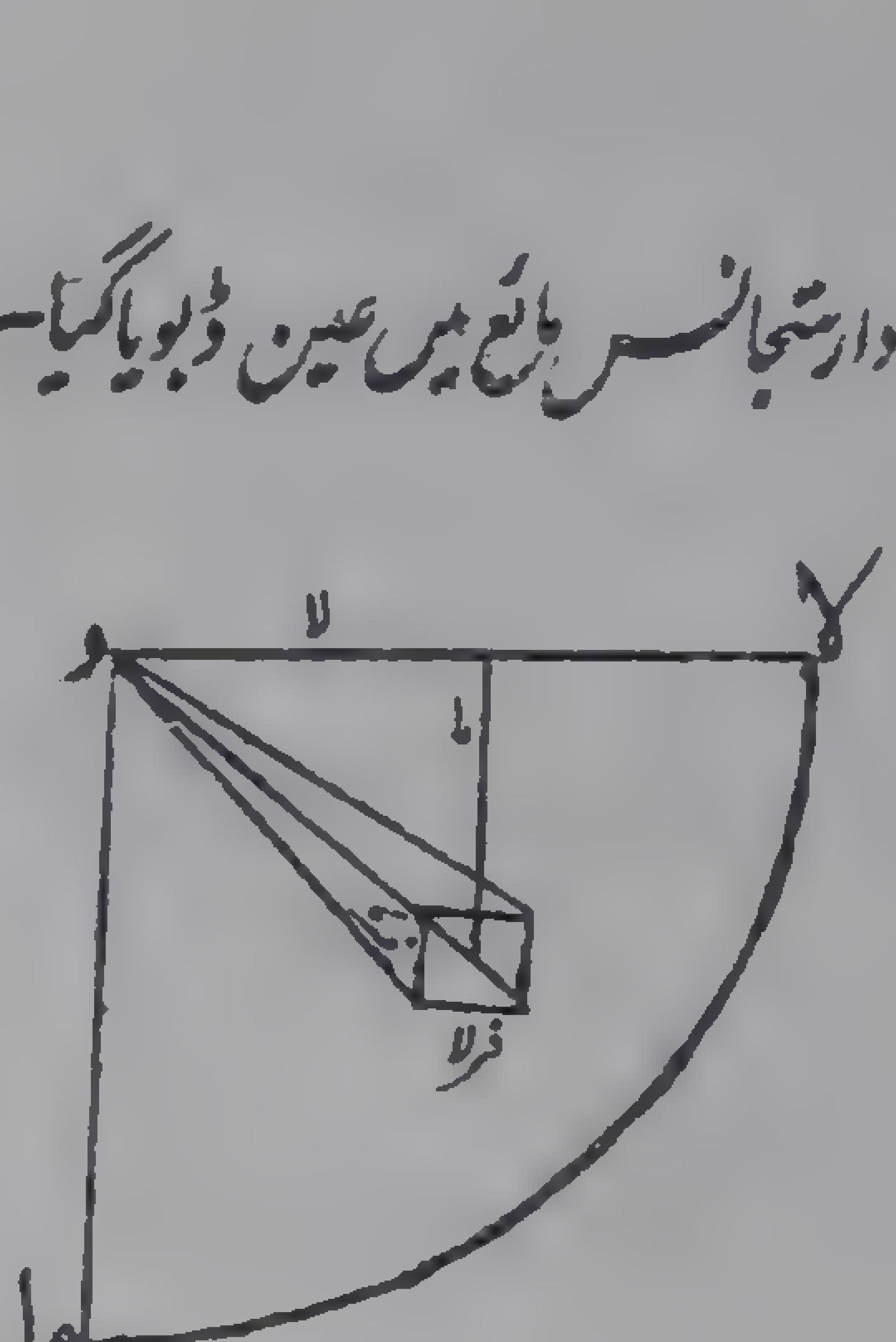
$$\text{لا جم طہ} + \text{ما جب طہ} = -\ \text{ع}$$

کا قطب بلحاظ معیاری ناقص کے ہے ۔

۳۷ — دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کی مثالیں ۔

(۱) دائرہ کا ایک ربع انتصابی سمت میں ایک وزن دار متجانس مائع میں عین ڈبویا گیا ہے اور اس کا ایک کنارہ مائع کی سطح میں ہے ۔

(۳۵)



اگر سطح کے اندر کے کنارے و لا کو محور لا قرار دیا جائے تو

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_0^{\text{ا}}\int_0^{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} \text{لا ما فرما فرلا}}{\int_0^{\text{ا}}\int_0^{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} \text{ما فرما فرلا}}$$

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{ما}^2\ \text{فرما فرلا}}{\iint \text{ما فرما فرلا}}$$

$\bar{\text{ما}}$ کے لئے حدود تکمل وہی ہیں جو $\bar{\text{لا}}$ کے لئے ہیں ۔

اب چونکہ $\iint \text{ما فرلا فرما} = \frac{1}{2}\int(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\ \text{فرلا} = \frac{1}{3}\ \text{ا}^3$

$$\iint \text{لا ما فرلا فرما} = \frac{1}{2}\int \text{لا}\ (\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\ \text{فرلا} = \frac{1}{8}\ \text{ا}^4$$

$$\iint \text{ما}^2\ \text{فرلا فرما} = \frac{1}{3}\int(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}\ \text{فرلا} = \frac{\pi}{16}\ \text{ا}^4$$

∴ $\bar{لا} = \frac{۳}{۸}\,ا$ ، $\bar{ما} = \frac{۳}{۱۶}\,\pi\,ا$

قطبی محددِ استعمال کرنے سے اور و لا کو ابتدائی خط لینے سے ہمیں د = ج ث ا ر جب طہ حاصل ہونا چاہیے اور

$$\bar{لا} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{ا} ر^{۳}\,\text{جم طہ جب طہ}\,\text{فر ر فر طہ}}{\int\int ر^{۲}\,\text{جب طہ}\,\text{فر ر فر طہ}} = \frac{۳}{۸}\,ا$$

$$\text{اور}\quad \bar{ما} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{ا} ر^{۳}\,\text{جب}^{۲}\text{طہ}\,\text{فر ر فر طہ}}{\int\int ر^{۲}\,\text{جب طہ}\,\text{فر ر فر طہ}} = \frac{۳}{۱۶}\,\pi\,ا$$

(۲) ایک دائری رقبہ جس کا نصف قطر ا ہے انتصابی سمت میں ڈبویا گیا ہے اور اس کا مرکز ہندسی گہرائی گ پر واقع ہے۔

مرکز کو مبدا اور اس میں سے گزرنے والے نیچے مار انتصابی خط کو ابتدائی خط قرار دو۔ اگر نقطہ (ر، طہ) پر کا دباؤ د ہو تو

$$د = \text{ج ث}\,(گ + ر\,\text{جم طہ})$$

اور مرکز کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$= \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{ا} ۲\,ر^{۲}\,\text{جم طہ}\,(گ + ر\,\text{جم طہ})\,\text{فر ر فر طہ}}{\int\int ۲\,ر\,(گ + ر\,\text{جم طہ})\,\text{فر ر فر طہ}} = \frac{ا^{۲}}{۴\,گ}$$

یہ نتیجہ دفعہ (۴۶) کے مسئلہ سے فوراً اخذ کیا جاسکتا ہے۔

(۳) ایک انتصابی مستطیل جس کا عرض افقی ہے کرہ ہوائی کے زیر عمل ہے جو مستقل تپش پر ہے۔ اگر مستطیل کے قاعدہ پر کرہ ہوائی کا دباؤ π ہو تو ی بلندی پر دباؤ $\pi\, \text{و}^{-\frac{\text{ج ی}}{\text{م}}}$ ہوگا دفعہ (۲۴)، اور اگر ب سے مستطیل کا عرض تعبیر ہو تو مستطیل کی ایک افقی پٹی پر کا دباؤ

$$= \pi\, \text{و}^{-\frac{\text{ج ی}}{\text{م}}} \times \text{ب فر ی}$$

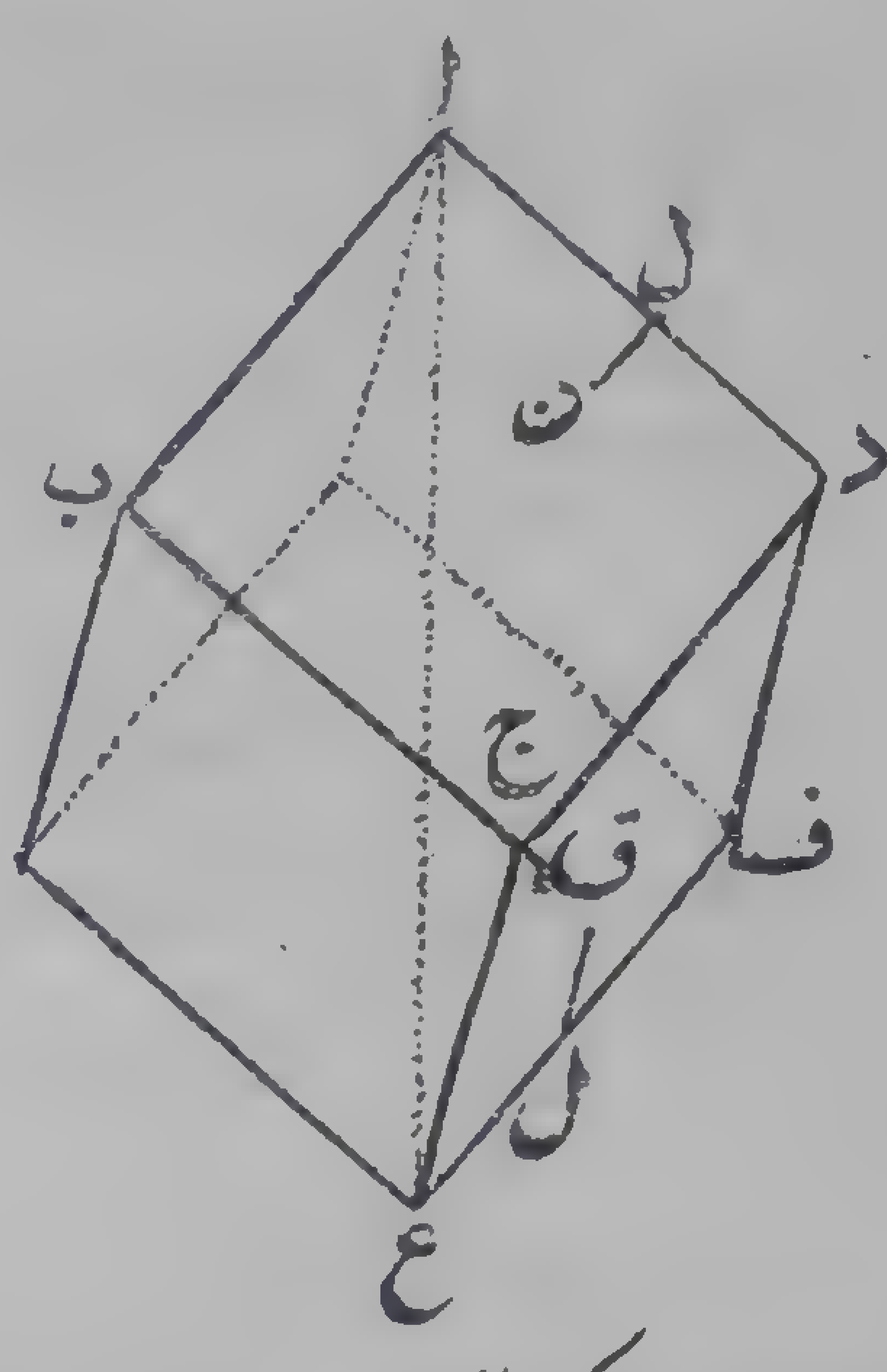
∴ اگر مستطیل کا طول ﻫ ہو تو اس پر کا حاصل دباؤ

$$= \int_{ب}^{ا} ۲\, \text{و}\, \text{م}^{\frac{\text{ج ی}}{}}\, \text{ب فری} = ۲\, \frac{\text{ب م}}{\text{ج}} \left(۱ - \text{و}\, \text{م}^{\frac{\text{ج ا}}{}}\right)$$

اور دباؤ کے مرکز کی بلندی

$$= \frac{\int \text{ی}\, \text{و}\, \text{م}^{\frac{\text{ج ی}}{}}\, \text{فری}}{\int \text{و}\, \text{م}^{\frac{\text{ج ی}}{}}\, \text{فری}} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} - \frac{۱}{۱ - \text{و}\, \text{م}^{\frac{\text{ج ا}}{}}}$$

(۳۶) (۴) ایک کھوکھلا مکعب مائع سے تقریباً بھر دیا گیا ہے۔ یہ مکعب اپنے ایک انتصابی وتر کے گرد یکساں طور پر گھومتا ہے۔ ان کے مختلف رخوں پر کے دباؤ اور ان کے دباؤ کے مرکز معلوم کرو۔



۱۔ اوپر کے رخ ا ب ج د کے لئے۔

ا د ، ا ب کو محور لا اور محور ما قرار دو۔ اور فرض کرو کہ کسی نقطہ ن (لا ، ما) کے نقطہ ا سے افقی اور انتصابی فاصلے ی اور ر ہیں تو

$$\frac{\text{د}}{\text{ث}} = \frac{۱}{۲}\, \omega^{۲}\, \text{ر}^{۲} + \text{ج ی}$$

ی = $\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\sqrt{۲}}$ ، شکستہ خط ا ل ن کا ا ع پر ظل لینے سے،

$$\text{ر}^{2} = \text{ان}^{2} - \text{ی}^{2} = \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - \text{ی}^{2} = \frac{۲}{۳}\left(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - \text{لا ما}\right)$$

∴ رخ ا ب ج د پر کا دباؤ (د)

$$= \int\int \text{د فرما فرلا}$$

$$= \text{ث} \int\int \left\{ \frac{\text{سہ}^{2}}{۳}\left(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - \text{لا ما}\right) + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۳}}\left(\text{لا} + \text{ما}\right) \right\} \text{فرما فرلا}$$

$$= \text{ث} \left\{ \frac{۵}{۳۶}\,\text{ا}^{۴}\,\text{سہ}^{2} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۳}}\,\text{ا}^{۳} \right\}$$

دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$\overline{\text{لا}}\ \text{د} = \overline{\text{ما}}\ \text{د} = \text{ث} \int\int \text{لا} \left\{ \frac{\text{سہ}^{2}}{۳}\left(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - \text{لا ما}\right) + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۳}}\left(\text{لا} + \text{ما}\right) \right\} \text{فرما فرلا}$$

یعنی

$$\overline{\text{لا}} = \overline{\text{ما}} = \text{ا} \times \frac{۲۱\,\text{ج} + ۳\sqrt{۳}\,\text{سہ}^{2}\,\text{ا}}{۳۶\,\text{ج} + ۵\sqrt{۳}\,\text{سہ}^{2}\,\text{ا}}$$

سے حاصل ہوگا۔

۲۔ نچلے رخ ع ج د ف کے لئے۔

ع ف اور ع ج کو محاور قرار دو۔ تو کسی نقطہ ق کے لئے

$$\text{ی} = \text{ا}\sqrt{۳} - \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{ر}^{2} = \frac{۲}{۳}\left(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} - \text{لا ما}\right)$$

اور بقیہ عمل بالکل پہلی صورت کی طرح۔

(۴۷ ۵ ـــــ دائرہ کا ایک ربع انتصابی سمت میں ایک مائع میں عین ڈبویا گیا۔ دائرہ ایک کنارہ مائع کی سطح میں ہے اور مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔
سطح کے اندر کے کنارے کو محور لا قرار دیں تو ث = مہ ما، د = $\frac{۱}{۲}$ مہ ج ما^{2}

اس لئے دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$\text{لاَ} = \frac{\int\int \text{لا ما}^2 \text{ فر ما فر لا}}{\int\int \text{ما}^2 \text{ فر ما فر لا}} \text{ ، اور } \text{ماَ} = \frac{\int\int \text{ما}^3 \text{ فر ما فر لا}}{\int\int \text{ما}^2 \text{ فر ما فر لا}} \text{ سے حاصل ہوگا}$$

قطبی محددوں میں

$$\text{لاَ} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\text{ب}} \text{ر}^4 \text{ جب}^2\text{ط جم ط فر ر فر ط}}{\int\int \text{ر}^3 \text{ جب}^2\text{ط فر ر فر ط}} \text{ ، اور } \text{ماَ} = \frac{\int\int \text{ر}^4 \text{ جب}^3\text{ط فر ر فر ط}}{\int\int \text{ر}^3 \text{ جب}^2\text{ط فر ر فر ط}}$$

جنسے

$$\text{لاَ} = \frac{16\,\text{ا}}{15\,\pi} \text{ ، اور } \text{ماَ} = \frac{32\,\text{ا}}{15\,\pi}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

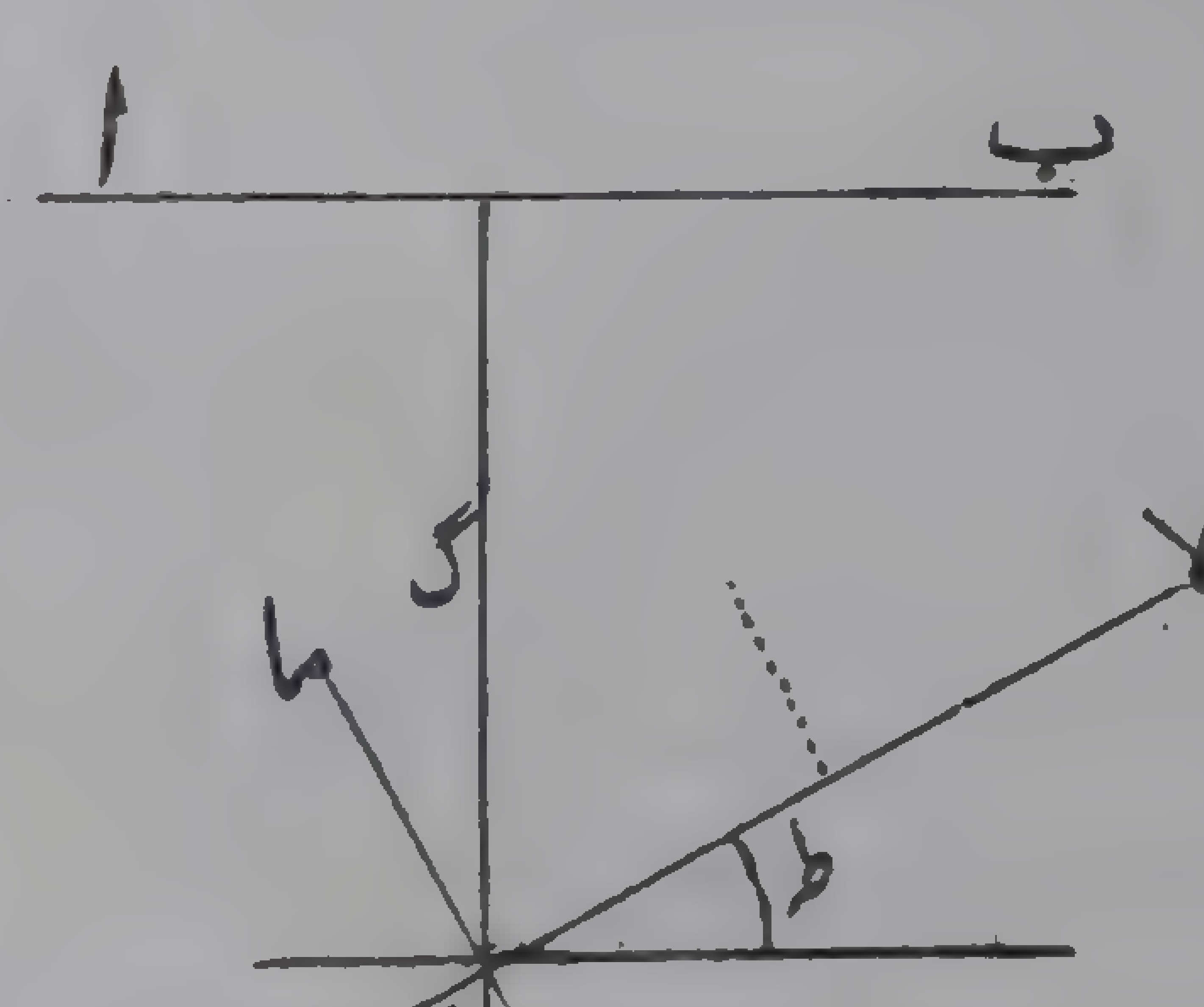
(۶) ایک نصف دائری رقبہ پانی میں پوری طرح ڈبو دیا گیا ہے دائرہ کی سطح انتصابی ہے اس کو احاطہ کرنے والے قطر کا ایک سرا ا مائع کی سطح میں ہے

فرض کرو کہ قطر اور مائع کی سطح کا درمیانی زاویہ عہ ہے اور قطر اور ا پر کے مماس کو محاور مان کر دباؤ کے مرکز کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں تو

$$\text{لاَ} \int\int \text{ر}^2 \text{ جب(ط + عہ) فر ر فر ط} = \int\int \text{ر}^3 \text{ جم ط جب (ط + عہ) فر ر فر ط}$$

$$\text{اور ماَ} \int\int \text{ر}^2 \text{جب (ط + عہ) فر ر فر ط} = \int\int \text{ر}^3 \text{جب ط جب (ط + عہ) فر ر فر ط}$$

ر کے حدود ۰ سے ۲ ا جم ط تک اور ط کے ۰ سے $\frac{\pi}{2}$ تک لئے جائیں۔



۳۸ — اگر ایک دیا ہوا مستوی رقبہ اپنے ہی مستوی میں ایک ثابت نقطہ کے گرد گھومے تو دباؤ کا مرکز اپنا مقام بدلتا ہے اور رقبہ پر ایک منحنی مرتسم کرتا ہے۔

اگر مستوی رقبہ اور آزاد سطح کا خط تقاطع اب ہو تو اب سے دباؤ کے مرکز کا فاصلہ رقبہ اور انتصابی سمت کے درمیانی زاویہ پر منحصر نہیں ہوتا (دفعہ ۳۵) اس لئے ہم رقبہ کو انتصابی لے سکتے ہیں۔

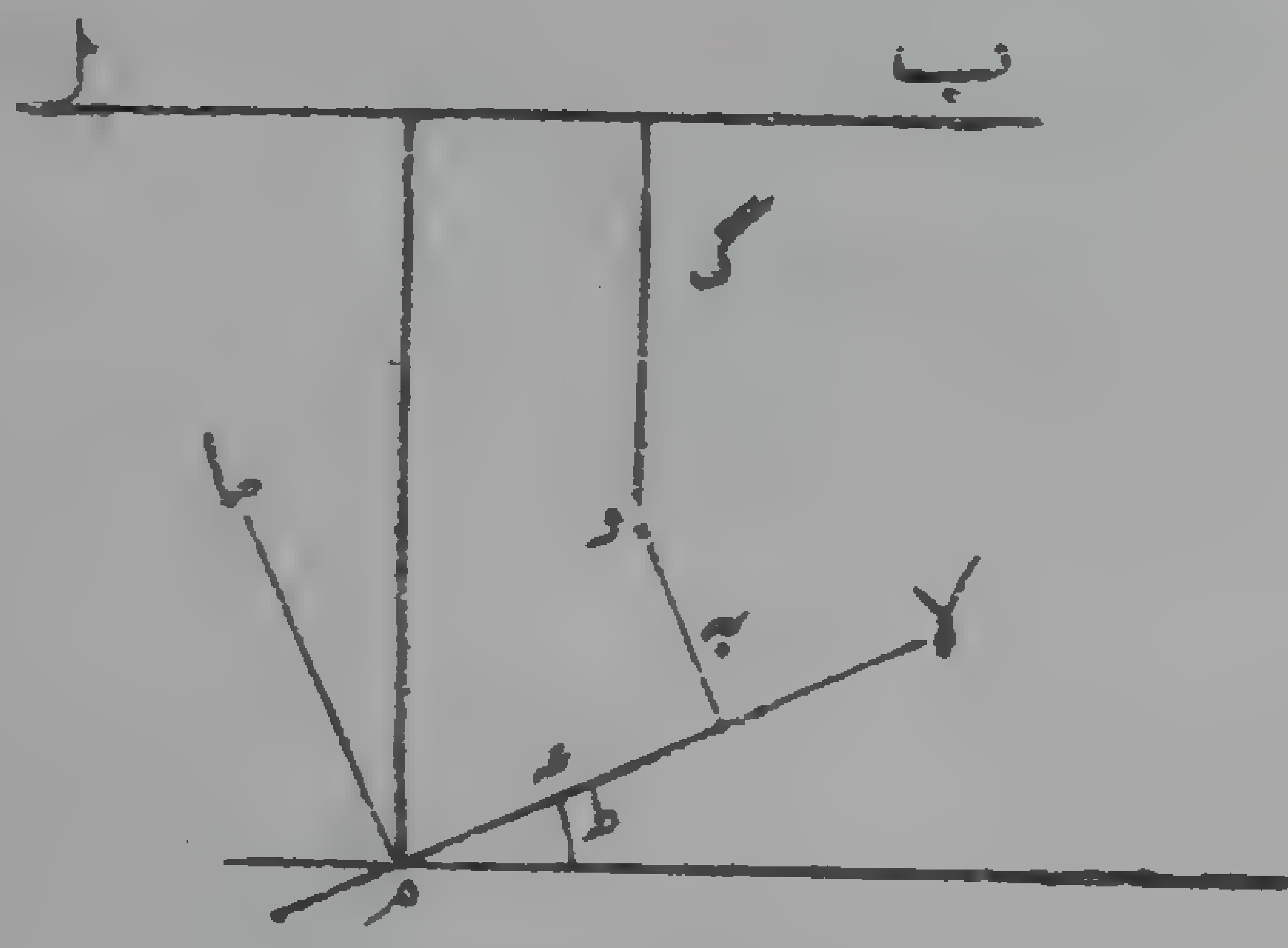
(۳۸) فرض کرو کہ ثابت نقطہ و کی گہرائی گ ہے اور رقبہ کے اندر و لا، و ما ثابت محور ہیں۔
اگر و لا کا میلان افق کے ساتھ ط ہو تو

د = ج ش (گ - لا جب ط - ما جم ط)

∴ لاَ = ∫∫ د لا فر لا فر ما / ∫∫ د فر لا فر ما = ا + ب جب ط + ج جم ط / د + ف جب ط + ق جم ط

اور ماَ = اَ + بَ جب ط + جَ جم ط / د + ف جب ط + ق جم ط

جہاں ا، ب، ج وغیرہ معلومہ مستقل ہیں۔ اب ط کو ساقط کرنے سے دباؤ کے مرکز کا طریق ایک مخروطی تراش ہوگی۔



دفعہ (۳۶) کے مسئلہ کی مدد سے بھی ہم اس نتیجہ کو اخذ کر سکتے ہیں۔
ہندسی مرکز م میں سے گزرنے والے صدری محوروں کو حوالے کے محور قرار دیکر اور و کے محدد (ع، ہ) فرض کر کے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دباؤ کا مرکز خط مستقیم

لا جب ط + ما جم ط = - (گ + ع جب ط + ہ جم ط)

کا قطب (ضنا، عا) بلحاظ معیاری ناقص کے ہے اور مساواتوں

$$\frac{\text{ا}^{2}\,\text{جب طہ}}{\text{ضنا}} = \frac{\text{ب}^{2}\,\text{جم طہ}}{\text{عا}} = -(\text{گ} + \text{عہ جب طہ} + \text{جہ جم طہ})$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ ان مساواتوں سے مساواتیں

$$\left(\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ضنا}} + \text{عہ}\right)\text{جب طہ} + \text{بہ جم طہ} = -\text{گ}$$

$$\left(\frac{\text{ب}^{2}}{\text{عا}} + \text{بہ}\right)\text{جم طہ} + \text{عہ جب طہ} = -\text{گ}$$

حاصل ہوتی ہیں۔

پہلے جب طہ کو اور پھر جم طہ کو ساقط کر کے حاصل شدہ نتیجوں کا مربع لیکر جمع کریں تو ہمیں مطلوبہ طریق کی مساوات معلوم ہو جاتی ہے جو

$$(\text{ا}^{2}\text{ب}^{2} + \text{عہ ب}^{2}\,\text{ضنا} + \text{بہ ا}^{2}\,\text{عا})^{2} = \text{گ}^{2}(\text{ا}^{4}\,\text{عا}^{2} + \text{ب}^{4}\,\text{ضنا}^{2})$$

ہے۔

اگر د اور م ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنی اگر عہ = ۰، اور بہ = ۰ تو طریق کی مساوات ہو جائیگی

$$\frac{\text{ضنا}^{2}}{\text{ا}^{4}} + \frac{\text{عا}^{2}}{\text{ب}^{4}} = \frac{1}{\text{گ}^{2}}$$

۳۹ — ایک برتن میں دو قسم کے مائع میں جو ایک دوسرے کے ساتھ آمیز نہیں ہوتے۔ (۳۹)
برتن کا قاعدہ مستوی ہے اور اس کے پہلو مستوی اور انتصابی ہیں۔ ایک پہلو پر حاصل دباؤ اور اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ث اور گہرائی گ ہے اور نیچے کے مائع کے لئے متناظر ارقام ثَ، اور گَ ہیں۔ مشترک سطح افقی مستوی ہونی چاہیئے جس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ ج ث گ ہوگا اور مشترک سطح کے نیچے ی گہرائی پر کا دباؤ ہوگا

$$\text{ج ث گ} + \text{ج ثَ ی}$$

انتصابی پہلو کا عرض ب لینے سے اس پر اوپر کے مائع کا دباؤ $= \frac{1}{2}$ ج ث ب گ^{2}

اور نیچے کے مائع کا دباؤ = $\int$ ج (ث گ + ثَ ی) ب فزی

= ج ب گَ (ث گ + ½ ثَ گَ)

حاصل دباؤ ان دونوں کا مجموعہ ہوگا جو

= ج ب {½ ث گ² + ث گ گَ + ½ ثَ گَ²}

اس پہلو پر کے سیالی دباؤ کا معیار (اس کے اور آزاد سطح کے خط تقاطع کے گرد)

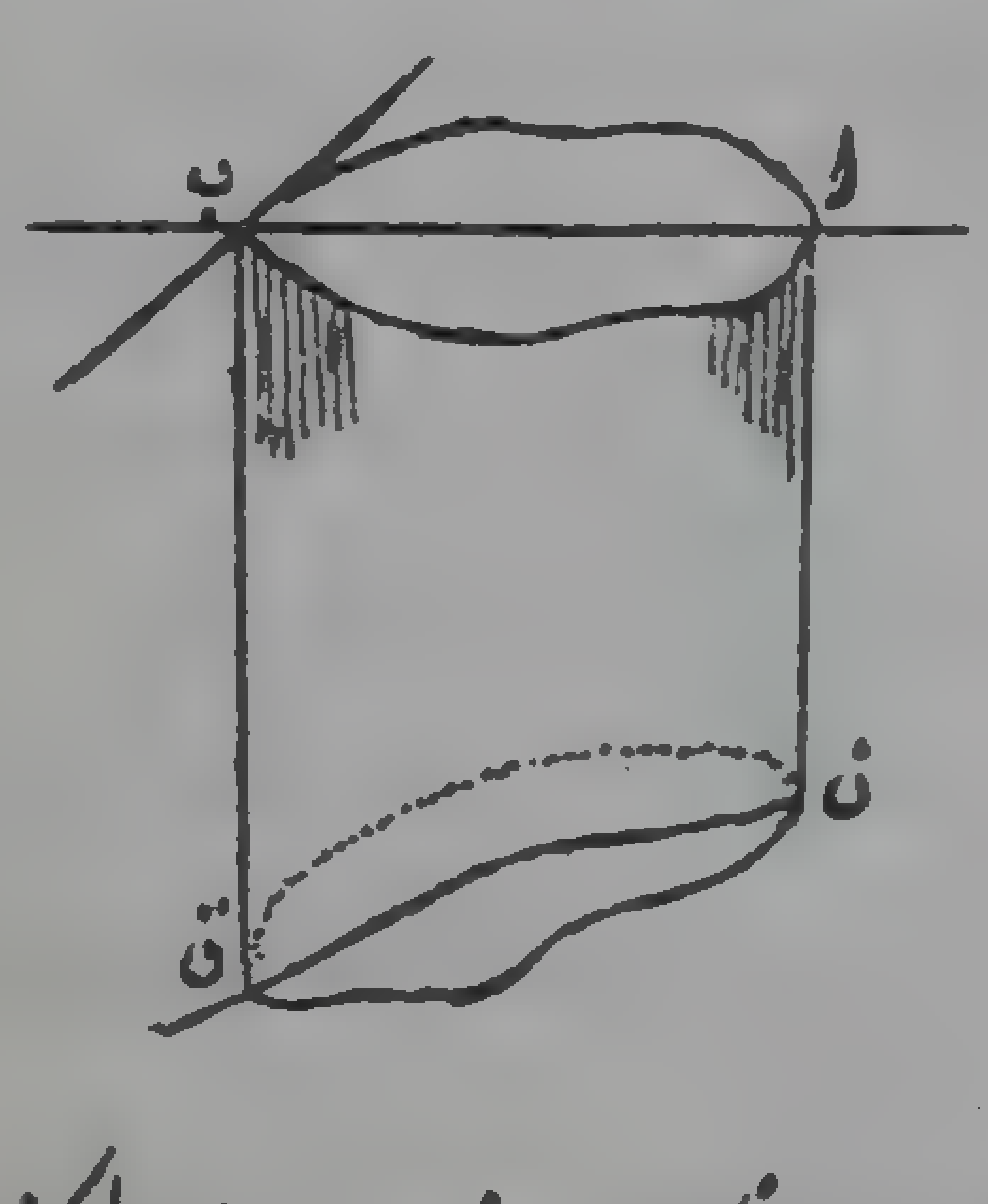
= $\int$ ج ث ب ی² فزی + $\int$ ج (ث گ + ثَ ی) ب (گ + ی) فزی

اعمال تکمیل کو پورا کر کے متذکرہ بالا حاصل دباؤ کے جملہ سے اسکو تقسیم کرنے سے ہمیں دباؤ کے مرکز کی گہرائی حاصل ہوجاتی ہے۔

منحنی سطحوں پر کے حاصل دباؤ

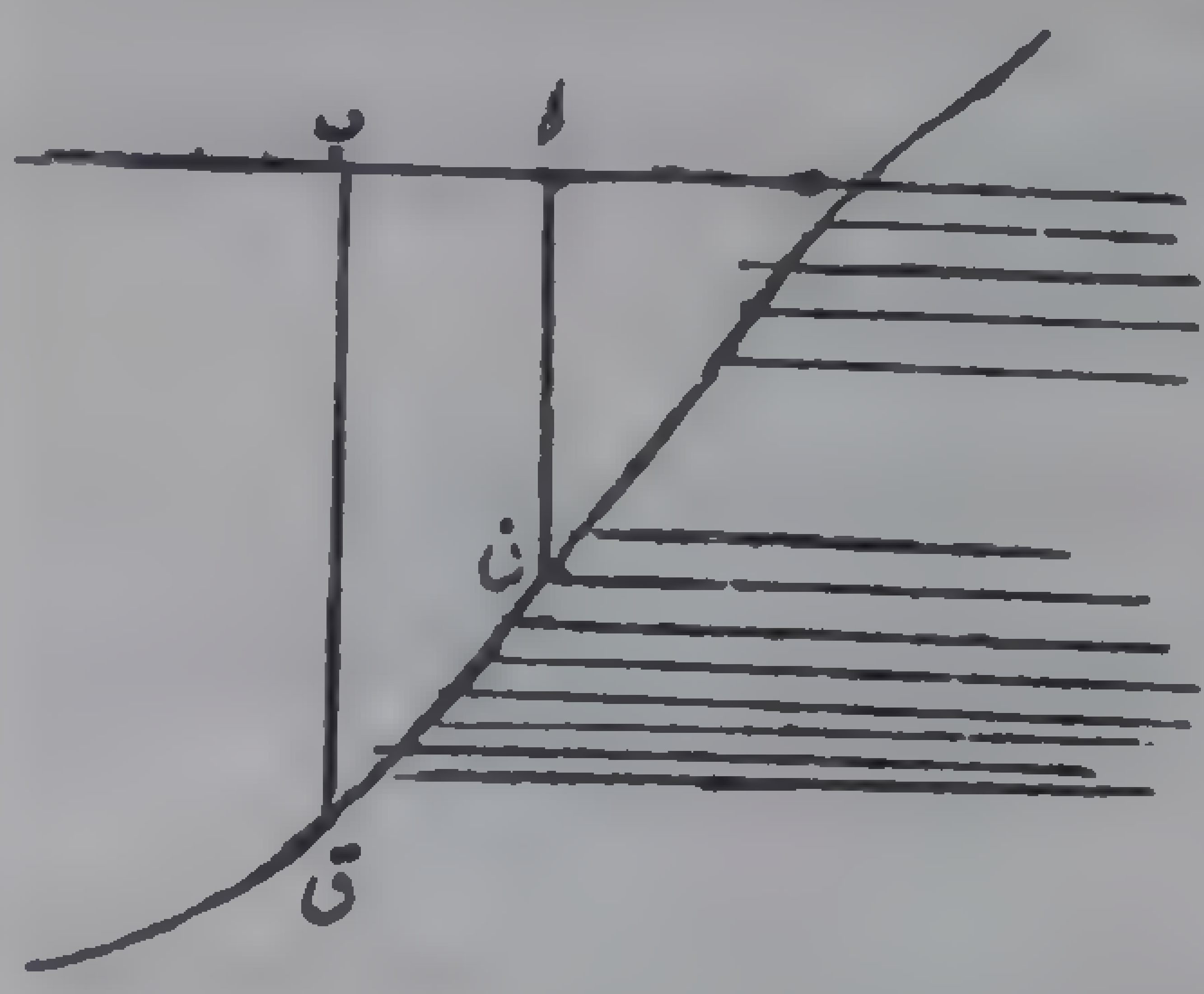
۱۴۔ ایک متجانس مائع کا جو جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے کسی سطح پر حاصل انتصابی دباؤ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح ن ق پر ایک وزن دار مائع کا عمل ہو رہا ہے اور مائع کی آزاد سطح پر اس کا ظل ا ب ہے۔ مائع کی کمیت ا ق، مائع کے افقی دباؤ اور ن ق کے تعامل کے باعث متوازن ہے۔ اس تعامل کو انتصابی سمت میں تحلیل کیا جائے تو یہ جزو تحلیلی ا ق کے وزن کے برابر ہونا چاہیئے اور برعکس اس کے ن ق پر کا انتصابی دباؤ ا ق کے وزن کے برابر ہوگا اور اس کی کمیت کے مرکز میں سے عمل کریگا۔



اگر ن ق کو مائع اوپر کی طرف دبائے جس طرح کہ دوسری شکل سے ظاہر ہے تو سطح کو خارج کرو۔ اور ن ق کا ظل پہلے کی طرح مائع کی سطح پر لو اور فرض کرو کہ فضا ر ا ق اسی قسم کے

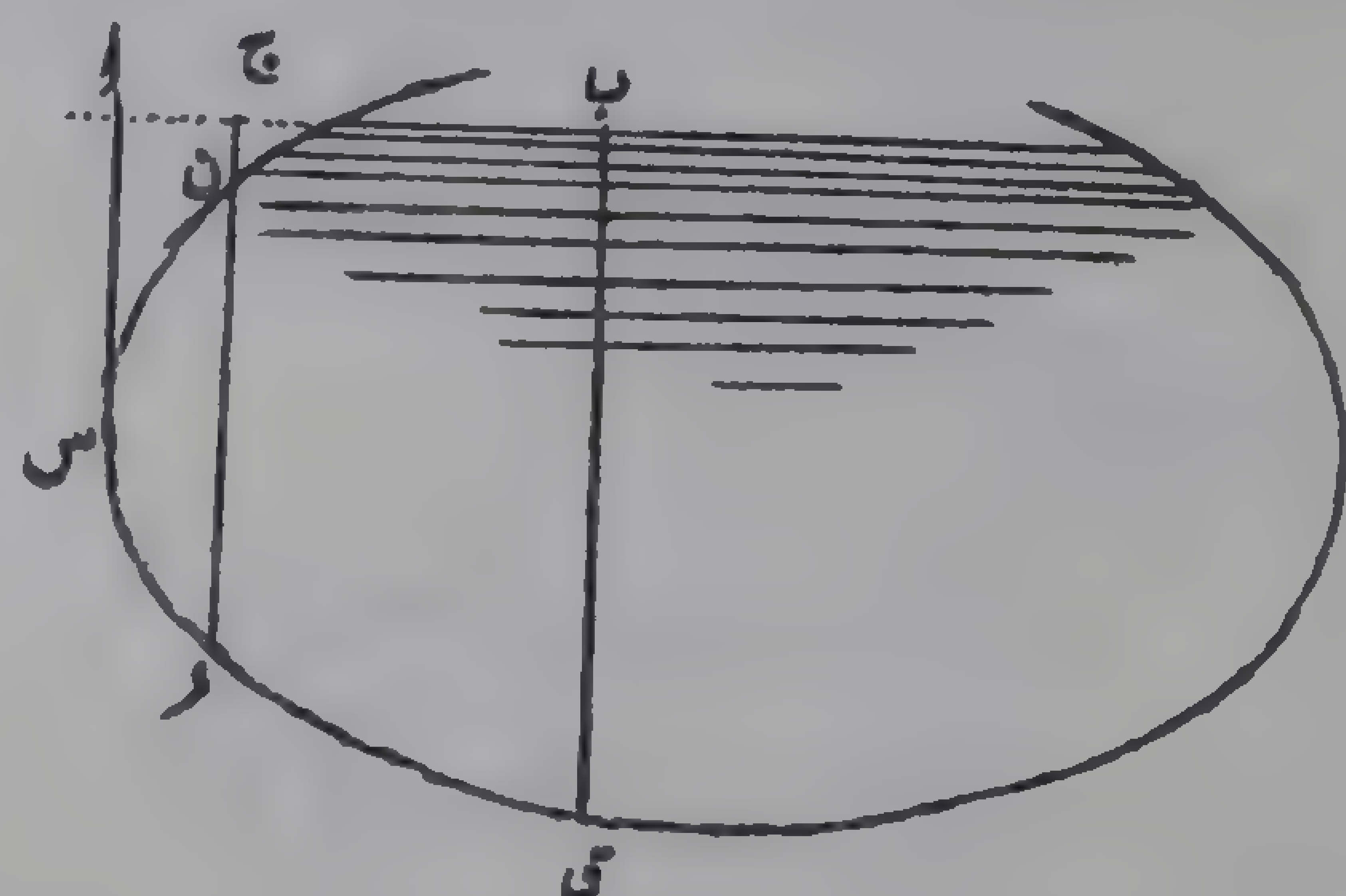
(۴۰)



مائع سے بھری ہوئی ہے اور مائع کو نیچے سے خارج کر دیا گیا ہے۔
ن ق کے تمام نقطوں پر کے دباؤ وہی ہیں جو پہلے تھے لیکن مقابل سمتوں میں اور چونکہ اس مفروضہ صورت میں انتصابی دباؤ اق کے وزن کے مساوی ہے اس لئے اصلی صورت میں حاصل انتصابی دباؤ اوپر کی جانب ا ق کے وزن کے برابر ہوگا۔

اگر سطح کو مائع جزاً اوپر کی طرف اور جزاً نیچے کی طرف دبائے تو نقطہ ن میں سے جو سطح کے زیر بحث حصہ کا بلند ترین نقطہ ہے ایک انتصابی سطح مستوی ن ر کھینچو اور فرض کرو کہ مائع کی سطح پر ن س ق کا ظل ا ج ب ہے۔

تو، حاصل انتصابی دباؤ ن س ر پر
= ن س ر کے اندرونی مائع کا وزن



اور ر ق پر = ج ق کے اندرونی مائع کا وزن
اور پورا انتصابی دباؤ = ج ق کے اندرونی مائع کا وزن + ن س ر کے اندرونی مائع کا وزن۔

یہ نتیجہ گزشتہ دو صورتوں کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کیونکہ ن ر کو انتصابی

مماسی ستویوں کے خط تماس سے دو حصوں ن س ، س ر میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن پر کے دباؤ علی الترتیب اوپر دار اور نیچے دار ہیں۔ اور چونکہ

ن س پر کا دباؤ = مائع ا ن س کا وزن

اور س ر پر کا دباؤ = مائع ا س ر کا وزن

اس لئے ان کا فرق یعنی ن س ر پر کا انتصابی دباؤ = مائع ن س ر کا وزن

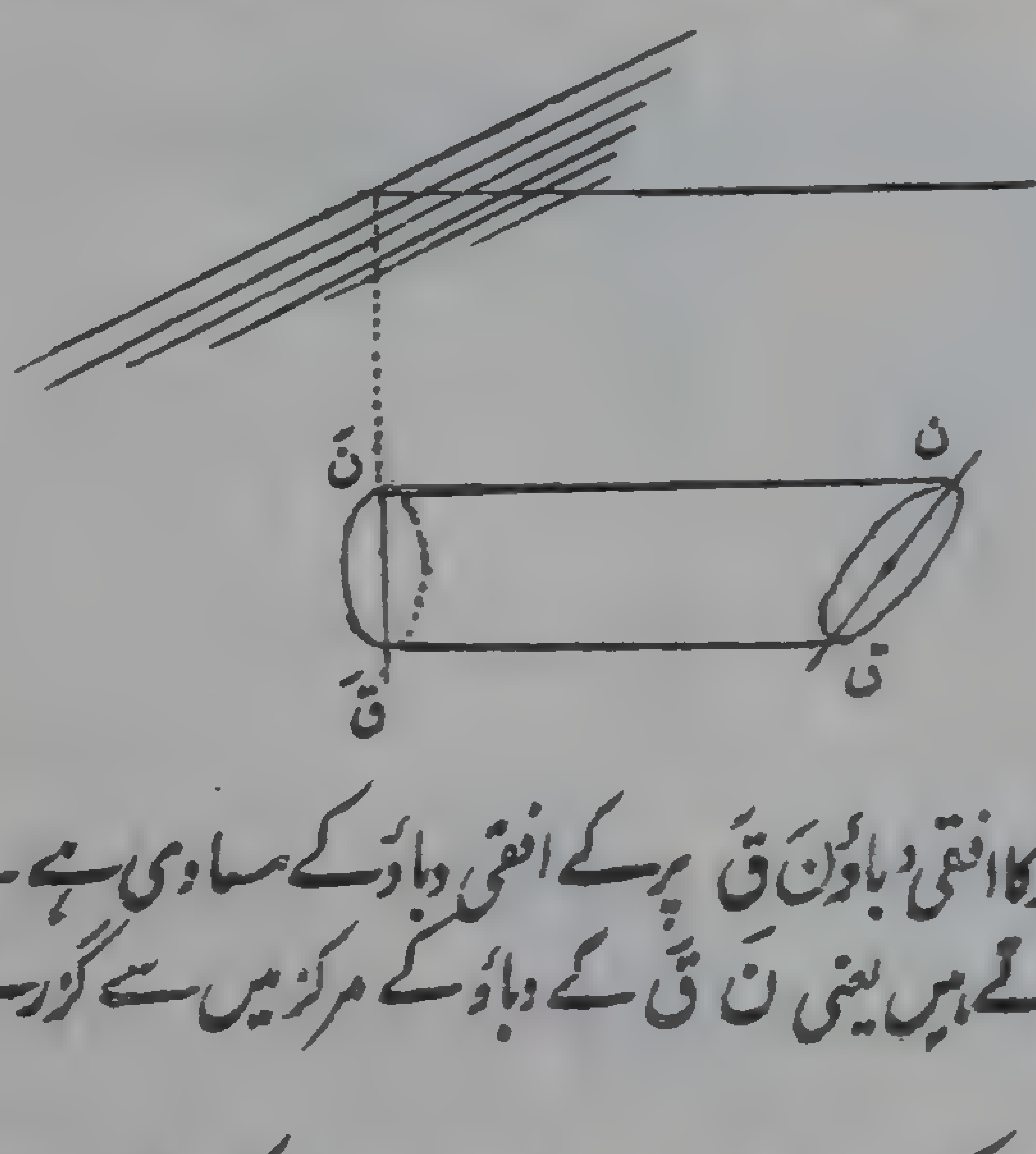
اسی طرح دوسری صورتوں پر غور کیا جاسکتا ہے۔

(۴۱) مشاہدہ طلب ہے کہ یہ تحقیق غیر متجانس مائع (جس میں کثافت گہرائی کا ایک تفاعل ہونی چاہیے کیونکہ مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں ہوتی ہیں) کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ قانون کثافت مائع کی مفروضہ وسعت میں بھی وہی خیال کیا جائے۔

۴۱ ـــ سطح ن ق پر کا حاصل افقی دباؤ کسی دی ہوئی سمت میں معلوم کرنا۔

دی ہوئی سمت کے علی القوائم انتصابی مستوی پر ن ق کا ظل لو اور فرض کرو کہ یہ ظل نَ قَ ہے،

کمیت نَ ق ، نَ قَ پر کے دباؤ، ن ق پر کے حاصل افقی دباؤ، اور مستوی نَ قَ کے متوازی انتصابی ستویوں میں عمل کرنے والی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔



اس لئے ن ق پر کا افقی دباؤ نَ قَ پر کے افقی دباؤ کے مساوی ہے۔ اور یہ دباؤ ایک ہی خط مستقیم میں عمل کرتے ہیں یعنی نَ قَ کے دباؤ کے مرکز میں سے گزرنے والے افقی خط میں سے۔

اس لئے عام طور پر کسی سطح پر حاصل دباؤ معلوم کرنے کے لئے اس پر کا انتصابی دباؤ

اور علی القوائم سمتوں میں حاصل افقی دباؤ معلوم کرو۔ یہ تین قوتیں بعض صورتوں میں ایک تنہا قوت میں تحویل ہوسکیں گی جس کے لئے شرط سکونیات کے عام طریقوں سے حاصل کیجاسکتی ہے۔

مثال ۲:- ایک نصف کرہ متجانس مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو مرکز میں سے گذرنے والے دو علی القوائم انتصابی مستویوں سے چار حصوں میں تقسیم کر دیا گیا۔ ان چار منحنی حصوں میں سے ایک حصہ پر کا حاصل عمل دریافت کرو۔

مرکز کو مبدا مانو احاطہ کرنے والے افقی نصف قطروں کو محور لا اور محور ما، اور انتصابی نصف قطر کو محور ی فرض کرو تو لا کے متوازی دباؤ، ربع ما و ی پر کے دباؤ کے مساوی ہوگا جہاں ما و ی، و لا کے علی القوائم مستوی پر منحنی سطح کا ظل ہے۔

اس لئے و لا کے متوازی دباؤ

$$= \text{ج ث}\ \frac{\text{ط ا}^{۲}}{۴} \times \frac{۴\ \text{ا}}{۳\ \text{ط}} = \frac{۱}{۳}\ \text{ج ث ا}^{۳}$$

اور اس کے نقطہ عاملہ کے محدد ہیں (۴۲)

$$\left(۰،\ \frac{۳}{۸}\text{ا}،\ \frac{۳}{۱۶}\text{ط ا}\right)$$ دفعہ (۴۷) مثال (۱)

اسی طرح و ما کے متوازی دباؤ $= \frac{۱}{۳}\ \text{ج ث ا}^{۳}$ جو نقطہ

$$\left(\frac{۳}{۸}\text{ا}،\ ۰،\ \frac{۳}{۱۶}\text{ط ا}\right)$$

پر عمل کرتا ہے۔

حاصل انتصابی دباؤ = مائع کا وزن $= \frac{۱}{۶}\ \text{ج ث ط ا}^{۳}$ اور خط مستقیم لا = ما $= \frac{۳}{۸}$ ا کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

تینوں قوتوں کی سمتیں نقطہ

$$\left(\frac{۳}{۸}\text{ا}،\ \frac{۳}{۸}\text{ا}،\ \frac{۳}{۱۶}\text{ط ا}\right)$$

میں سے گذرتی ہیں۔ اور اس لئے وہ ایک تنہا قوت

$$\frac{1}{6}\ \text{ج ث ا}^{3}\ \text{ما}\ \overline{(\pi^{2}+8)}$$

کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$\text{لا} - \frac{3}{8}\,\text{ا} = \text{ما} - \frac{3}{8}\,\text{ا} = \frac{2}{\pi}\left(\text{ی} - \frac{3}{16}\,\pi\,\text{ا}\right)$$

$$\text{یعنی}\qquad \text{لا} = \text{ما} = \frac{2}{\pi}\ \text{ی}$$

میں عمل کرتی ہے ۔ یہ خط مستقیم مرکز میں سے گذرتا ہے اور ایسا ہونا بھی چاہیئے کیونکہ تمام سیالی دباؤ کرہ کی سطح پر عمودوار عمل کرتے ہیں۔ یہ خط مستقیم سطح کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہے اس کو "دباؤ کا مرکز" کہہ سکتے ہیں ۔

۴۲ـــــ وزن دار مائع میں ایک ٹھوس جسم جزاً یا کلاً ڈبویا گیا ہے اس کی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹھوس کو نکالدیا گیا ہے اور اس کی بجائے اسی قسم کا مائع بھر دیا گیا ہے تو اسپر کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو اصلی ٹھوس پر تھا۔ لیکن اس مائع کی کمیت اپنے وزن اور اس کو گھیرنے والے مائع کے دباؤ کے زیر اثر ساکن ہے ۔ اس لئے حاصل دباؤ ہٹائے ہوئے مائع کے وزن کے برابر ہوگا اور اس کے مرکز ثقل میں سے انتصابی سمت میں عمل کریگا۔

اسی طرح کے استدلال سے صریحاً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کسی ٹھوس جسم پر لچکدار سیال کا حاصل دباؤ جسم کے ہٹائے ہوئے لچکدار سیال کے وزن کے برابر ہوتا ہے۔

یہ نتیجہ دفعات (۴۰) اور (۴۱) کی مدد سے اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی افقی خطوط مستقیم کھینچو جن سے ایک استوانہ بنے جس کے اندر ٹھوس گھر جائے۔ تماس کا منحنی سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن پر کے حاصل افقی دباؤ اسطوانے کے محور کے متوازی ہیں اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں مگر مقابل سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ اس لئے جسم پر کے افقی دباؤ ایک دوسرے کے اثر کو زائل کرتے ہیں اور اس لئے حاصل صرف انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے ۔ اب اس حاصل انتصابی دباؤ کو معلوم کرنے کے لئے سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی انتصابی خطوط کھینچو تاکہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہو جائے ۔ ایک حصہ کا حاصل انتصابی دباؤ اوپر وار عمل کرتا ہے اور دوسرے حصہ

پر کا نیچے وار - ان دونوں کا فرق صریحاً ٹھوس کے ہٹائے ہوئے سیال کا وزن ہے -

۴۳ — ایک ٹھوس جسم پورے طور پر وزن دار مائع میں غرق کیا گیا ہے، اگر اس کی سطح کا کچھ حصہ منحنی سطح اور بقیہ حصہ معلومہ مستوی رقبے ہوں اور اگر اس کا حجم (ح) دیا جائے تو منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

کیونکہ مستوی سطحوں کا رقبہ اور ان کا محل معلوم ہے اس لئے ہم ان رقبوں پر کے حاصل افقی دباؤ لا اور حاصل انتصابی دباؤ ما معلوم کر سکتے ہیں اور چونکہ جسم کی پوری سطح پر کا دباؤ ج ث ح کے مساوی ہے اور اوپر وار انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے اس کی منحنی سطح پر کا حاصل افقی دباؤ لا ہوگا اور حاصل انتصابی دباؤ ج ث ح - ما

مثال — دائری رقبہ کو ایک مماسی خط کے گرد زاویہ طہ میں گھمانے سے ایک ٹھوس جسم بنایا گیا ہے۔ اس کو پانی میں اس طرح تھاما گیا ہے کہ اس کا نچلا مستوی رخ افقی اور گہرائی گ پر رہے -

اس صورت میں،

ح = ہ ا

$$ح = \text{ہ}\ \text{ا}^{۲}\ \text{طہ}\ ،\quad لا = ج\ ث\ \text{ہ}\ \text{ا}^{۲}\ (\text{گ} - \text{ا}\ \text{جب}\ \text{طہ})\ \text{جب}\ \text{طہ}$$

$$\text{اور}\quad ما = ج\ ث\ \text{ہ}\ \text{ا}^{۲}\ (\text{گ} - \text{گ}\ \text{جم}\ \text{طہ} + \text{ا}\ \text{جب}\ \text{طہ}\ \text{جم}\ \text{طہ})$$

۴۴ — کسی سطح پر ایک ایسے سیال کا حاصل دباؤ دریافت کرو جو کسی معلومہ قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے زیر عمل سطح ء = ۰ کے نقطہ (لا ، ما ، ی) پر کا دباؤ د ہے جو باب دوم میں حاصل کردہ دباؤ کی طرح معلوم کیا گیا ہے۔

تب اگر

$$\frac{۱}{ع^{۲}} = \left(\frac{\text{جف}\ ء}{\text{جف}\ لا}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف}\ ء}{\text{جف}\ ما}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف}\ ء}{\text{جف}\ ی}\right)^{۲}$$

تو نقطہ (لا ، ما ، ی) پر کے عماد کے جیوب التمام ہونگے

$$ع\,\frac{\text{جف}\ ء}{\text{جف}\ لا}\ ،\quad ع\,\frac{\text{جف}\ ء}{\text{جف}\ ما}\ ،\quad ع\,\frac{\text{جف}\ ء}{\text{جف}\ ی}$$

فرض کرو کہ اس نقطہ کو گھیرنے والے رقبہ کا عنصر مف س سے تعبیر ہوتا ہے تو محور لا کے متوازی اس عنصر پر کے دباؤ ہونگے

د ع (جف ء / جف ی) مف س ، د ع (جف ء / جف ما) مف س ، د ع (جف ء / جف لا) مف س ،

اس لئے اگر محوروں کے متوازی حاصل دباؤ لا ، ما ، ے اور حاصل جفت ل ، م ، ن ہوں تو

لا = ∬ د ع (جف ء / جف لا) فر س

ما = ∬ د ع (جف ء / جف ما) فر س

ے = ∬ د ع (جف ء / جف ی) فر س

اور ل = ∬ د ع (ما (جف ء / جف ی) − ی (جف ء / جف ما)) فر س

م = ∬ د ع (ی (جف ء / جف لا) − لا (جف ء / جف ی)) فر س

ن = ∬ د ع (لا (جف ء / جف ما) − ما (جف ء / جف لا)) فر س

سب تکمل کل سطح زیر بحث پر ہیں
یہ حاصل ایک تنہا قوت کے معادل ہونگے اگر (۴۴)

لا ل + ما م + ے ن = ۰

۴۵ — جوڑے کی مستویوں کے متوازی مستوی لینے سے جسم کی سطح تین مختلف طریقوں سے عناصر میں تقسیم ہو سکتی ہے

مثلاً مف لا مف ما = لا یا پر مف س کا ظل = ع (جف ء / جف ی) مف س

اور اس لئے ے = ∬ د فر لا فر ما ، اور اسی طرح لا = ∬ د فر ما فر ی ، اور

ما = ∫∫ د فری فرلا

ل = ∫∫ د (ما فرلا فرما - ی فری فرلا)

= ∫∫ د (ما فرما - ی فری) فرلا

م = ∫∫ د (ی فری - لا فرلا) فرما

ن = ∫∫ د (لا فرلا - ما فرما) فری

٤٦ ـــ اگر سیال صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہو اور محور ی انتصابی ہو تو د، ی کا تفاعل ہوگا جسکو فرض کرو کہ فہ (ی) ہے ۔

تب

لا = ∫∫ فہ (ی) فرما فری

مستوی ما ی پر دی ہوئی سطح کا جو ظل ہے یہ جملہ حصہ کا محور لا کے متوازی اس ظل پر کے دباؤ کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح ما مستوی لا ی پر کے ظل پر کے دباؤ کے مساوی ہے ۔

اگر سیال بے لچک ہو اور صرف جاذبہ ارض اس پر عمل کرے تو د مف لا مف ما سیال کے اس حصہ کے وزن کے مساوی ہے جو مف س اور سیال کی سطح پر اس کے ظل کے درمیان واقع ہے ۔

∴ ے یا ∫∫ د فرلا فرما دی ہوئی سطح کے اوپر کے سیال کا وزن ہے ۔

یہ نتائج دفعات (٤٠) و (٤١) کے نتائج کے ساتھ متوافق ہیں۔

٤٧ ـــ اگر ایک ٹھوس جسم جزاً یا کلاً کسی سیال میں غرق کیا جائے اور یہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو تو جسم پر کا حاصل سیالی دباؤ اُن قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا جو ہٹائے ہوئے سیال پر عمل کرتیں ۔

کیونکہ ہم جسم کو سیال سے علیحدہ کرکے اس کی جگہ کو اسی قسم کے سیال سے پُر کیا ہوا تصور

کر سکتے ہیں۔ اب یہ داخل شدہ سیال ان قوتوں اور گرد کے سیال کے دباوں کے زیر عمل ساکن ہوگا۔ اور اس لئے حاصل دباؤ ان دی ہوئی قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا مگر سمت مقابل میں عمل کرے گا۔

جسم کی جگہ کو سیال سے پُر کرتے وقت قانون کثافت کی پابندی کرنی چاہیئے یعنی مساوی کثافت کی سطحیں گرد کے سیال کی کثافت کی سطحوں کے ساتھ مسلسل ہونی چاہئیں۔

امثلہ

۱۔ ایک وزندار موٹی رسی جس کی کثافت پانی کی کثافت کی دوچند ہے ایک سرے سے جو پانی کے باہر ہے اس طرح لٹکائی گئی ہے کہ اس کا کچھ حصہ غرق آب رہے۔ غرق شدہ حصہ کے وسط پر رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

۲ ــ ایک کھوکھلے کرہ کا نصف قطر ا ہے۔ اسکو پانی سے عین بھر دیا گیا ہے اس کی سطح کو ایک ایسے مستوی سے جو مرکز کے نیچے ج گہرائی پر واقع ہے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ ان حصوں پر کے حاصل انتصابی دباؤ معلوم کرو۔

۳ ــ ایک برتن مخروط مضلع کی شکل کا ہے جسکا قاعدہ ن ضلعوں والا مستوی کثیر الاضلاع ہے اس کو اس طرح رکھا گیا کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار رہے۔ اس کو سیال سے بھر دیا گیا۔ برتن کا ہر رخ یا پہلو اس پر کے قبضہ کے گرد حرکت کر سکتا ہے لیکن اس کو اپنی جگہ پر قائم رکھنے کے لئے ایک رسی کے ذریعہ اسکو تھاما گیا ہے جو رخ کے قاعدہ کے نقطہ وسطی اور کثیر الاضلاع کے مرکز سے باندھ دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ہر رسی کے تناؤ اور سیال کے کل وزن میں نسبت ۱ : ن جب ۲ ع ہے جہاں ع افق کے ساتھ ہر رخ کا میلان ہے۔

۴ ــ ایک رقبہ دو ہم مرکز نصف دائروں سے گھرا ہوا ہے اور ان کا مشترک قطر آزاد سطح میں واقع ہے ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{\frac{3}{16}\pi\,(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}^2+\text{ب}^2)}{(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ا}\,\text{ب})}$$

ہے جہاں ا اور ب نصف قطر ہیں۔

۵ ــ ایک مربع پترے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جس کا ایک راس سیال کی سطح میں ہے

اگر اس کو اس راس کے گرد اس کے اپنے مستوی میں گھمایا جائے اور پتھر ہمیشہ پوری طرح مائع میں ڈوبا رہے تو اس کے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۶ — ایک ناقص پتھر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو پانی میں عین ڈوبا ہوا ہے۔ اگر اس کو اپنے انتصابی مستوی میں اس طرح گھمایا جائے کہ یہ ہمیشہ پانی میں غرق رہے تو اس کے محوروں کے لحاظ سے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۷ — ایک مکعب صندوق پانی سے بھر دیا گیا ہے اس کا ڈھکن وزن دار اور ٹھیک بیٹھنے والا ہے اور اسکو چکنے قبضوں کے ذریعہ ایک کنارہ پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ باری باری سے اسکو قاعدہ کے ہر کنارے کے گرد اتنے زاویہ میں گھمایا گیا ہے کہ پانی عین خارج ہونے لگے۔ ان زاویوں کے ماسوں کا مقابلہ کرو۔

۸ — ہم محور دائروں کے ایک نظام کو پانی میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ مرکزوں والا خط ایک دی ہوئی گہرائی پر رہے۔ ثابت کرو کہ پورے طور پر ڈوبے ہوئے دائری رقبوں کے دباؤ کے مرکز ایک مکافی پر واقع ہوتے ہیں۔

۹ — ایک نیم قطع ناقص (محاور ۲ ا اور ا) کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو ایسے قطر سے محدود ہے جس کا میلان محور اعظم کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ ہے۔ ناقص کی سطح انتصابی ہے اور قطر سیال کی سطح میں واقع ہے۔

۱۰ — ایک نیم قطع ناقص اپنے محور اصغر سے محدود ہے اور ایسے مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اگر محور اصغر مائع کی سطح میں واقع ہو تو خروج المرکز دریافت کرو تاکہ ماسکہ دباؤ کا مرکز ہو سکے۔

۱۱ — ایک مربع پتھر ا ب ج د پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کا ضلع ا ب پانی کی سطح میں واقع ہے۔ نقطہ ب سے ج د کے نقطے تک خط مستقیم ب ے ایسا کھینچو کہ دونوں حصوں پر کے دباؤ مساوی ہوں۔

ایسی صورت میں ثابت کرو کہ

دباؤ کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ : مربع کا ضلع :: √۵۰۵ : ۸۴

۱۲ — ایک نصف دائرہ میں سے جس کا قطر مائع کی سطح میں ہے ایک دائرہ کاٹ لیا گیا ہے اس دائرہ کا قطر نصف دائرہ کا انتصابی نصف قطر ہے۔ بقیہ حصے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

۱۳۔۔۔ ایک نصف دائری انتصابی پتر پوری طرح پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کے محدود کرنے والے قطر کا سرا ا پانی کی سطح میں ہے اور پانی کی سطح کے ساتھ اس قطر کا میلان ع ہے۔ اگر ے دباؤ کا مرکز ہو اور قطر اور اے کا درمیانی زاویہ ط ہو تو ثابت کرو کہ ۴۶

$$\text{مس ط} = \frac{3\pi + 16\,\text{مس ع}}{16 + 15\pi\,\text{مس ع}}$$

۱۴۔۔۔ اگر ایک مثلث کے راسوں کی گہرائیاں مائع کی سطح کے نیچے ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ مرکز ثقل کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہوگی

$$\frac{(\text{ب}-\text{ج})^2+(\text{ج}-\text{ا})^2+(\text{ا}-\text{ب})^2}{12(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

۱۵۔۔۔ ایک مستوی رقبہ جو ایک سیال میں ڈوبا ہوا ہے اپنے متوازی اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی انتصابی خط میں رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) دباؤ کے مرکز کا طریق قطع زائد ہے جس کا ایک متقارب دیا ہوا انتصابی خط ہے اور (۲) اگر مختلف محلوں میں اس کے مرکز ثقل کی گہرائیاں ا، ا + ه، ا + هَ، ا + هً اور ان کے متناظر دباؤ کے مرکز کی گہرائیاں ا، ا + ک، ا + کَ، ا + کً ہوں تو

$$\begin{vmatrix} \text{ک} & \text{ه} & \text{ه}(\text{ک}-\text{ه}) \\ \text{ک}' & \text{ه}' & \text{ه}'(\text{ک}'-\text{ه}') \\ \text{ک}'' & \text{ه}'' & \text{ه}''(\text{ک}''-\text{ه}'') \end{vmatrix} = 0$$

۱۶۔۔۔ مکافی کے ایک قطعہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو وتر خاص سے محدود ہے اور وتر خاص کے ایک سرے پر کا مماس مائع کی سطح میں ہے۔

اگر مائع کی سطح اوپر چڑھے اور مکافی ساکن رہے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز ایک خط مستقیم مرتسم کرتا ہے۔

۱۷۔۔۔ ایک مخروط پانی میں پوری طرح غرق ہے۔ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی دی گئی ہے۔ اگر اس کی محدب سطح پر کے حاصل دباؤ د، دَ، دً ہوں جبکہ افق کے ساتھ اسکے محور کے میلان کے جیوب بالترتیب س، سَ، سً ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{د}^2(\text{س}'-\text{س}'') + \text{د}'^2(\text{س}''-\text{س}) + \text{د}''^2(\text{س}-\text{س}') = 0$$

۱۸ — محوروں اور منحنی ما آلا + ما آما = ما آا کے درمیانی رقبہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔ محاور علی القوائم ہیں اور ایک محور سیال کی سطح میں واقع ہے۔

۱۹ — مائع کی کچھ مقدار دو متوازی مستویوں کے درمیان ہے۔ یہ مائع ایک مرکزی قوت کے زیر عمل ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ۔ اگر مستویوں کے اُن حصوں کے رقبے جہاں سیال مس کرتا ہے ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ ان حصوں پر کے دباؤں میں نسبت ا^{۲} : ب^{۲} ہے۔

۲۰ — ایک ٹھوس کرہ ایک افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور ایک مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے۔ انتصابی قطر میں سے گزرنے والے دو علی القوائم مستویوں سے اس کرہ کو تقسیم کیا گیا ہے۔ اگر کرہ کی کثافت ث اور سیال کی ثہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ حصے ایک دوسرے سے جدا نہیں ہونگے بشرطیکہ ثہ > $\frac{۱}{۴}$ ث

۲۱ — زائد کا ایک متقارب سیال کی سطح میں ہے۔ اُس رقبہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی معلوم کرو جو ڈوبے ہوئے متقارب، منحنی، اور زائد کی سطح میں کے دو افقی خطوط مستقیم سے محدود ہے۔

۲۲ — ایک مخروط پانی میں اس طرح ڈوبا ہوا ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکز پانی کی سطح کے نیچے اس کے ارتفاع کے $\frac{۵}{۹}$ گہرائی پر واقع ہے۔ اُسی قاعدہ اور ارتفاع کا ایک مکانی نما بھی اس طرح غرق ہے کہ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی سطح کے نیچے وہی ہے جو مخروط کے قاعدہ کے مرکز کی ہے۔ نیز انتصابی سمت کے ساتھ اس کے محور کا میلان بھی وہی ہے جو مخروط کے محور کا ہے۔ یہ میلان کیا ہونا چاہیئے کہ ان دونوں مجسموں کی محدب سطحوں پر کے دباؤ مساوی ہوں۔

۲۳ — ایک بند اسطوانہ مائع سے تقریباً بھرا ہوا ہے اور اپنے ایک تکوینی خطے کے گرد جو انتصابی ہے یکساں رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اس کی منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔
اس کے اوپر کے سرے پر جو دباؤ ہے اس کا نقطہ عمل بھی معلوم کرو۔

۲۴ — ثابت کرو کہ جو رقبہ منحنی (ر-ا) جم ط = ب کے متقارب اور اس کی قوس کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{ا}{۴} \times \frac{۳\pi ا + ۱۶ ب}{۳\pi ب + ۴ ا}$$

جہاں متقارب سیال کی سطح میں ہے اور منحنی کا مستوی انتصابی ہے۔

۲۵ — ایک مخروط مائع سے بھر دیا گیا ہے۔ اس کا ڈھکن وزن دار اور ٹھیک بیٹھنے والا ہے اور ایک قبضہ کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ اس مخروط کو قبضہ میں سے گزرنے والے تکوینی خط کے گرد (جو انتصابی ہے) یکساں رفتار سے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی زاوی رفتار معلوم کرو کہ مائع نکل نہ پڑے۔

۲۶ — کروی خول کا ایک حصہ ایک مستوی سے تراش لیا گیا ہے اور بقیہ حصہ کو ایک افقی مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ دائری تراش مستوی کو مس کرے۔ پھر اس کو بلند ترین نقطہ پر کے ایک چھوٹے سوراخ کے ذریعہ پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ کروی خول کا بڑے سے بڑا حصہ دریافت کرو جو کاٹ لیا جا سکے اس طرح کہ پانی باہر نکل پڑنے نہ پائے خواہ خول کتنا ہی ہلکا ہو۔

ایسی صورت میں ثابت کرو کہ خول پر کا پورا دباؤ مائع کے وزن کے ساتھ ۲ : ۱ کی نسبت رکھتا ہے۔

۲۷ — اگر ایک غرق شدہ مستوی رقبہ اپنے مستوی میں کے ایک خط مستقیم کے گرد گھومے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز اس مستوی میں ایک خط مستقیم مرتسم کرتا ہے۔

۲۸ — ایک مکعب کا کنارہ ۲ ا ہے اس کے رخ افقی اور انتصابی ہیں۔ اس کے گرد ایک وزن دار مائع ہے جس کا حجم ۸ ا۳ { ۲√۶ - ۱ } ہے۔ مائع پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جو مکعب کے مرکز کی طرف مائل ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس مرکز سے فاصلہ۔ فاصلہ ا پر قوت کی مقدار ج ہے۔ آزاد سطح کی شکل اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر ایک انتصابی رخ اپنے مستوی کے ایک افقی خط مستقیم کے گرد حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ یہ رخ ساکن ہوگا بشرطیکہ یہ خط اس رخ کے زیرین کنارے سے ½ ا فاصلے پر واقع ہو۔

۲۹ — ایک ٹھوس مکافی نما ماسکہ میں سے گزرنے والے مستوی سے تراشا گیا ہے جو اس کے محور پر علی القوائم ہے۔ یہ مکافی نما پوری طرح مائع میں غرق ہے اس طرح کہ اس کا راس دی ہوئی گہرائی پر ہے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ دیا ہوا زاویہ بناتا ہے۔ اس کی منحنی سطح پر کے حاصل دباؤ کی سمت اور اس کی مقدار معلوم کرو۔

۳۰ — ایک مکافی رقبہ وتر خاص سے محدود ہے۔ اس کو وتر خاص کے گرد زاویہ ط میں گھما کر ایک ٹھوس بنایا گیا ہے اور اس ٹھوس کو پانی میں اس طرح تھاما گیا ہے کہ یہ عین غرق رہے اور اس کا نچلا مستوی رخ افقی رہے۔ اگر منحنی سطح پر کے حاصل دباؤ کا میلان افق کے

ساتھ فہ ہو تو ثابت کرو کہ

۲ جب۲ طہ مس فہ = ۵ جب طہ - ۳ جب فہ جم طہ - ۲ طہ

۳۱ — سیال کی کچھ کمیت ایک محور کے گرد اضافی توازن میں گھوم رہی ہے - یہ سیال قانون قدرت کی بموجب کشش کرتا ہے - اس میں ایک چھوٹا ذرہ داخل کر دیا گیا ہے اور اس کو وہی رفتار دی گئی ہے جو کہ اس جگہ کے سیال کے ذرہ کی ہے - کیا اپنی حرکت میں یہ محور کی طرف آئے گا یا اس سے پرے ہٹے گا -

۳۲ — سیال کی ایک غیر محدود کمیت میں دو خول داخل کئے گئے ہیں - سیال کی کثافت ث ہے اور اس کا ہر حصہ ہر دوسرے حصہ کو قانون قدرت کے بموجب جذب کرتا ہے خولوں کے اندرونی و بیرونی نصف قطر علی الترتیب ا، ب اور اَ، بَ ہیں اور ان کی کثافتیں ثَ، ثً ہیں - خول بھی ایک دوسرے کو اور سیال کو قانون قدرت کے بموجب جذب کرتے ہیں ہر خول پر کی حاصل قوت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ بعض صورتوں میں یہ قوت دافعی ہوگی -

۳۳ — ایک دیا ہوا رقبہ انتصابی طور پر ایک وزن دار مائع میں غرق ہے اس رقبہ کو قاعدہ مان کر ایک مخروط بنایا گیا ہے جو کلیتًا مائع میں غرق ہے راس کا طریق معلوم کرو جبکہ منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ مستقل ہو اور ثابت کرو کہ یہ دباؤ غیر متغیر رہیگا اگر مخروط کو اس افقی خط کے گرد گھمایا جائے جو قاعدہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور قاعدہ کے مستوی پر عمود وار ہے -

۳۴ — ایک مخروطی برتن کو جس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے محور میں سے گزرنے والے ایک مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان حصوں کو راس پر کے ایک قبضہ اور ایک ڈوری کے ذریعہ جو برتن کے کنارہ کا قطر ہے اور فاصل مستوی پر عمود وار ہے جدا ہونے سے روکا گیا ہے - اگر برتن کو پانی سے بھر دیا جائے تو رسی کے تناؤ کا پانی کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو -

۳۵ — ایک کھوکھلے مخروط کو جسکی چوٹی کھلی ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے اس کے محور میں سے گزرنے والے دو مستویوں سے (جن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہے) مخروط کے ایک طرف جو سطح کا حصہ کٹتا ہے اس پر کا حاصل دباؤ اور اس کا خط عمل معلوم کرو -

اگر زاویہ راس قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ خط مخروط کی چوٹی کے مرکز میں سے گزرے گا -

۳۶ — ایک برتن ناقصی مکافی نما کی شکل کا ہے اس کا محور انتصابی ہے اور اس کی مساوات

$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = \frac{ی}{ھ}$ ہے۔ صدری مستویوں سے اسے چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان میں سے ایک حصہ میں گ گہرائی تک پانی ڈالا گیا ہے۔ اگر منحنی حصہ پر کے حاصل دباؤ کو انتصابی اور افقی سمت میں تحلیل کیا جاے تو ثابت کرو کہ افقی جزو تحلیلی کا خط عمل نقطہ ($\frac{5}{16}$ ا، $\frac{5}{16}$ ب، $\frac{3}{8}$ گ) میں سے گذریگا۔

۳۷ — نصف کروی شکل کا ایک پیالہ پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر اسکو ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور افق کے ساتھ دیا ہوا زاویہ بناتا ہے تو پیالے کے اوپر کے حصہ پر حاصل دباؤ کی سمت اور مقدار دریافت کرو۔

۳۸ — ایک کھلے مخروطی خول میں جس کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے پانی بھر دیا گیا ہے اور اس کے کنارے کے ایک نقطہ سے اس کو لٹکا کر توازن کا محل بتدریج اختیار کرنے دیا گیا ہے۔ اگر اس کا زاویہ راس جتم$^{-1}$ $\frac{2}{3}$ ہو تو ثابت کرو کہ پانی کی سطح نقطہ تعلیق میں سے گذرنے والے تکوینی خط کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کریگی۔

۳۹ — ایک منتظم کثیر الاضلاع جو پوری طرح مائع میں غرق ہے اپنے مرکز ثقل کے گرد حرکت کر سکتا ہے ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق ایک کرہ ہے۔

۴۰ — ایک نصف کروی ظرف پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس کے وسطی نصف قطر میں سے دو انتصابی مستوی کھینچے گئے ہیں۔ جو سطح کو نصف پھانک میں تراشتے ہیں۔ اگر مستویوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہو تو ثابت کرو کہ اس پھانک پر حاصل دباؤ انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ

$$مس^{-1}\left(\frac{جب\ عہ}{عہ}\right)$$

بناتا ہے۔

۴۱ — نیم قطر ب کا ایک ثابت کرہ ہے اس کو ث کثافت والے سیال کی کمیت $\frac{4\pi ا^3}{3}$ احاطہ کئے ہوئے ہے یہ سیال ایک ایسے نقطہ کی طرف قوت مہ ر نی اکائی کمیت سے جذب ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج (< ب) ہے۔ بیرونی دباؤ کو صفر فرض کر کے ثابت کرو کرہ پر کا حاصل دباؤ دریافت کرو۔

۴۲ — گردشی سطح کی شکل کا ایک ظرف حسب ذیل خاصیت رکھتا ہے۔ اگر اس کو اس طرح رکھیں کہ

کہ اس کا محور انتصابی رہے اور پھر پانی کی کوئی مقدار اس میں ڈالدیں اور اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کریں تو کل ظرف پر کا حاصل انتصابی دباؤ اس حصہ پر کے حاصل افقی دباؤ کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔ سطح کی شکل معلوم کرو۔

۴۳ — ایک منحنی انتصابی محور کے گرد متناکل ہے اگر اس کو مائع میں اس طور پر غرق کیا جائے کہ سب سے اونچے نقطہ کی گہرائی سب سے نچلے نقطہ کی گہرائی کی نصف ہو تو اس کے دباؤ کا مرکز محور کی تنصیف کرتا ہے۔ اس کی مساوات دریافت کرو۔

۴۴ — ایک مستطیلی رقبہ لچکدار مائع میں اس طرح غرق ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کا ایک ضلع
(۴۹) مائع کی سطح میں ہے جہاں دباؤ صفر ہے۔ اگر کثافت دباؤ کا خطی تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{\text{ا}}{\text{م}} \times \frac{(\text{م} - ۱)\,\text{ث}_{۱} + (۱ - \tfrac{۱}{۲}\text{م}^{۲})\,\text{ث}_{۲}}{\text{ث}_{۱} - (\text{م} + ۱)\,\text{ث}_{۲}}$$

جہاں انتصابی ضلع کا طول ا ہے اور رقبہ کی چوٹی پر کثافت $\text{ث}_{۲}$ اور اس کے پائیں پر کثافت $\text{ث}_{۱}$ ہے۔ اور

$$\text{م} = \text{لوک}\left(\frac{\text{ث}_{۱}}{\text{ث}_{۲}}\right)$$

۴۵ — ایک مثلثی پترے کے راس ا، ب، ج ایک متجانس مائع میں بالترتیب $\text{گ}_{۱}$، $\text{گ}_{۲}$، $\text{گ}_{۳}$ گہرائیوں تک غرق ہیں۔ اگر ا، ب، ج، سے ب ج، ج ا، ا ب پر عمود علی الترتیب $\text{ع}_{۱}$، $\text{ع}_{۲}$، $\text{ع}_{۳}$ ہوں تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کے سہ خطی (Trilinear) محدد ہوں گے

$$\frac{\text{ع}_{۱}}{۴}\left(۱ + \frac{\text{گ}_{۱}}{\text{گ}_{۱} + \text{گ}_{۲} + \text{گ}_{۳}}\right)،\quad \frac{\text{ع}_{۲}}{۴}\left(۱ + \frac{\text{گ}_{۲}}{\text{گ}_{۱} + \text{گ}_{۲} + \text{گ}_{۳}}\right)،$$

$$\frac{\text{ع}_{۳}}{۴}\left(۱ + \frac{\text{گ}_{۳}}{\text{گ}_{۱} + \text{گ}_{۲} + \text{گ}_{۳}}\right)$$

۴۶ — ایک مثلثی پترا ایک متجانس مائع میں پوری طرح غرق ہے اس کے راسوں کی گہرائیاں ف، ق، ر ہیں اگر مثلث کے دباؤ کا مرکز راسوں پر اضعاف ل، م، ن کے اوسط مرکز پر

منطبق ہو جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف} : \text{ق} : \text{ر} :: ۲\,\text{ل} - (\text{م} + \text{ن}) : ۲\,\text{م} - (\text{ن} + \text{ل}) : ۲\,\text{ن} - (\text{ل} + \text{م})$$

۴۷ — ایک مکعب صندوق کے ضلع کا طول ل ہے اور اس کے وزن دار ڈھکن کا وزن و ہے جو ایک کنارے کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ صندوق کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس کنارہ کے ایک سرے میں سے گزرنے والے قطر کے ذریعہ اس کو انتصابی طور پر لٹکایا گیا ہے اب اگر اس کو یکساں زاوی رفتار سہ سے گھمایا جائے تو ثابت کرو کہ و کو

$$\left(\frac{۷}{۹} + \frac{۱}{۳۴۲} \times \frac{\text{سہ}^{۲}\,\text{ل}}{\text{ج}} \right) \bar{\text{و}}$$

سے کم نہ ہونا چاہیئے تاکہ پانی گر نہ جائے جہاں $\bar{\text{و}}$ صندوق کے اندرونی پانی کا وزن ہے۔

۴۸ — ایک ناقص نما کو مرکز میں سے گذرنے والے کسی مستوی سے تراش کر اس کی منحنی سطح اور مستوی تراش سے ایک بند استوار برتن تیار کیا گیا ہے۔ برتن کو پانی سے عین بھر کر ایک افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مستوی قاعدہ میز پر ٹکا رہے۔ ثابت کرو کہ منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ ایک انتصابی قوت کے مساوی ہے جو پانی کے نصف وزن کے مساوی ہے اور جس کا خط عمل مستوی قاعدہ کو مرکز سے $\frac{۳}{۴}\,\text{ر} / \sqrt{\text{ر}^{۲} - \text{ع}^{۲}}$ فاصلہ پر قطع کرتا ہے جہاں ر قاعدہ کا مزدوج نصف وتر اور ع مرکز سے افقی مماسی مستوی پر عمود ہے۔

۴۹ — ایک چھوٹا ٹھوس جسم ایک سیال میں ساکن رکھا گیا ہے جس میں کسی نقطہ پر کا دباؤ قایم محددوں لا، ما، یا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔ ثابت کرو کہ اُس جفت کے اجزائے ترکیبی جو جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد گھمانے کا میلان رکھتا ہے

$$(\text{ج} - \text{ب}) \frac{\text{فر}^{۲}\text{د}}{\text{فرما}\,\text{فری}} - \text{د} \left(\frac{\text{فر}^{۲}\text{د}}{\text{فر}^{۲}\text{ا}} - \frac{\text{فر}^{۲}\text{د}}{\text{فری}^{۲}} \right) - \text{ع} \frac{\text{فر}^{۲}\text{د}}{\text{فرما}\,\text{فرلا}}$$

$$+ \text{ف} \frac{\text{فر}^{۲}\text{د}}{\text{فری}\,\text{فرلا}}$$

اور اسی طرح کے دو اور جملے ہیں جہاں ا، ب، ج، د، ع، ف مرکز ثقل میں سے گزرنے والے محاوروں کے لحاظ سے جسم کے حجم کے جمودی معیاروں اور جمود کے حاصل ضربوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

۵۰۔ ایک استوار کروی خول کا نصف قطر ا ہے۔ اس میں گیس کی کمیت ک ہے جس میں دباؤ کثافت کا ل گنا ہے۔ گیس ایک ثابت بیرونی نقطہ د سے (جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے) ایسی قوت سے دفع ہوتی ہے جو فی اکائی کمیت $\frac{ل}{فاصلہ}$ کے مساوی ہے۔

ثابت کرو کہ خول پر گیس کا حاصل دباؤ ہے

$$\frac{ل ک}{ف} \times \frac{۵ ف^۲ - ا^۲}{۵ ف^۲ + ا^۲}$$

۵۱۔ پانی سے بھرا ہوا ایک ظرف ناقص نما (محاور ا، ب، ح) کے آٹھویں حصہ کی شکل کا ہے جو تین صدری مستویوں سے محدود ہے۔ محور ح انتصابی ہے اور کرۂ ہوائی کا دباؤ نظر انداز ہو سکتا ہے۔ (۵۰)

ثابت کرو کہ منحنی سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ایک ایسی قوت ہے جس کی شدت ہے

$$\frac{۱}{۴} ج ث \left\{ ب^۲ ح^۴ + ا^۲ ح^۴ + \frac{۱}{۴} \pi^۲ ا^۲ ب^۲ ح^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

۵۲۔ ایک کھوکھلا ناقص نما پانی سے بھروایا گیا ہے اور اس طرح رکھا گیا کہ محور ا افق کے ساتھ زاویہ عہ بنائے اور محور ج افقی رہے۔ ثابت کرو کہ محور ا میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کے ہر طرف کی منحنی سطح پر کا سیالی دباؤ ایک رنچ (Wrench) کے مساوی ہے جس کی گھمائی ہے

$$\frac{۳ ج جب عہ جم عہ}{۲} \times \frac{ا^۲ - ب^۲}{۴ ج^۲ + ۹ (ا^۲ جب^۲ عہ + ب^۲ جم^۲ عہ)}$$

۵۳۔ ایک مثلث ایک مائع میں غرق ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس مثلث کے راس مائع کی سطح کے نیچے عہ، بہ، جہ فاصلوں پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{۳}{۵} \times \frac{(عہ + بہ + جہ)(عہ^۲ + بہ^۲ + جہ^۲) + عہ بہ جہ}{عہ^۲ + بہ^۲ + جہ^۲ + عہ بہ + بہ جہ + جہ عہ}$$

۵۴۔ ایک مستوی رقبہ ایک وزن دار غیر متجانس سیال میں کلیتاً غرق ہے اور ایک ایسے

افقی ثابت محور کے گرد گھومتا ہے جو گ گہرائی پر ہے اور مستوی پر عمود وار ہے۔ اگر گ گہرائی پر سیال کی کثافت مہ ی کے مساوی ہو اور اگر محور اور مستوی کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرنے والے دو علی القوائم محاور میں سے ہر ایک کے لحاظ سے مستوی رقبہ متشاکل ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق فضا میں ایک قطع ناقص ہے جس کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\text{گ}_{2} - \frac{\text{گ}\,(\text{ا}^{4} - \text{ک}_{1}^{2}\,\text{ک}_{2}^{2})}{(\text{ا}^{2} + \text{ک}_{1}^{2})(\text{ا}^{2} + \text{ک}_{2}^{2})}$$

جہاں متشاکل محوروں کے لحاظ سے رقبہ کے گردش کے نصف قطر ک_{1}، ک_{2} ہیں اور کرہ ہوائی کا دباؤ ہے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{مہ}\,(\text{ا}^{2} - \text{گ}^{2})$$

۵۵ — ثابت کرو کہ کسی غرق آب مستوی رقبہ کا دباؤ ایک قوت میں جو رقبہ کے مرکز ہندسی پر عمل کرتی ہے اور ایک جفت میں جو رقبہ کے مستوی میں ایک محور کے گرد ہے تحلیل ہو سکتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس جفت کا محور اس مماس پر عمود وار ہے جو مرکز ہندسی پر کے معیاری ناقص کے افقی قطر کے سرے پر کھینچا گیا ہے۔

باب چہارم

تیرنے والے اجسام کا توازن

۴۸ —— تیرنے والے جسم کے توازن کی شرطیں معلوم کرنا۔
ہم یہ فرض کریں گے کہ سیال صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اور جسم بھی صرف اسی قوت کے زیر اثر سیال میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اس طرح جسم پر عمل کرنے والی قوتیں صرف اس کا وزن اور گرد کے سیال کا دباؤ ہوگا۔ اس لئے توازن کے قیام کے لئے حاصل سیالی دباؤ جسم کے وزن کے مساوی ہوگا اور انتصابی سمت میں عمل کریگا۔

اب ہمیں یہ معلوم ہے کہ جزاً یا کلاً غرق شدہ ٹھوس کی سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہونا چاہیئے اور یہ کہ جسم اور ہٹائے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہونے چاہئیں۔

یہ شرطیں توازن کے لئے ضروری اور کافی ہیں خواہ سیال جس میں جسم تیر رہا ہے کسی نوعیت کا ہو۔ اگر سیال غیر متجانس ہے تو ہٹائے ہوئے سیال کو اس طرح خیال کرنا ہوگا کہ وہ بھی جسم کو گھیرنے والے سیال کے قانون کثافت کی پابندی کرتا ہے۔ بالفاظ دیگر اس میں ایسے طبقات فرض کرنے ہونگے جو گرد کے افقی طبقات کے ساتھ مسلسل ہوں نیز اسی قسم کے اور اسی کثافت کے ہوں۔

مثلاً اگر ایک ٹھوس جسم جزاً غرق شدہ پانی میں تیر رہا ہو تو اس کا وزن ہٹائے ہوئے پانی کے وزن اور ہٹائی ہوی ہوا کے وزن کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔ اور اگر ہوا کو خارج کر دیا جائے یا اس کے دباؤ کو کثافت یا تپش کی تخفیف سے گھٹا دیا جائے

تو ٹھوس کا کچھ حجم پانی میں اور ڈوب جائے گا جو اس کے وزن اور پانی اور ہوا کی کثافتوں پر منحصر ہوگا۔ اس کی مزید تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ ہوا کا دباؤ پانی کی سطح پر بمقابلہ کسی اوپر کے نقطہ پر کے دباؤ کے زیادہ ہے اور ہوا کا یہ سطحی دباؤ پانی کے ذریعہ تیرنے والے جسم کے غرق شدہ حصہ پر منتقل ہو جاتا ہے جس کا یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ اس پر ہوا کا اوپر وار دباؤ اس کے نیچے وار دباؤ سے بڑا ہوتا ہے۔ (۵۲)

۹۴ —— ہم چند خاص صورتیں لیکر شرائط بالا کے اطلاق کی توضیح کرینگے۔

مثال (۱) ٹھوس مکافی نما کا ایک حصہ جس کا ارتفاع دیا گیا ہے، ایک متجانس مائع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے اس کے توازن کا محل معلوم کرو۔

تکوینی مکافی کے وتر خاص کو ۴ ا، ارتفاع کو ف، اور راس کی گہرائی کو لا سے تعبیر کیا جائے تو پورے ٹھوس اور غرق شدہ حصہ کے حجم علی الترتیب ۲ ط ا ف^۲ اور ۲ ط ا لا^۲ ہونگے۔ اور اگر ٹھوس اور مائع کی کثافتیں ث، ثہ ہوں تو توازن کی ایک شرط ہے

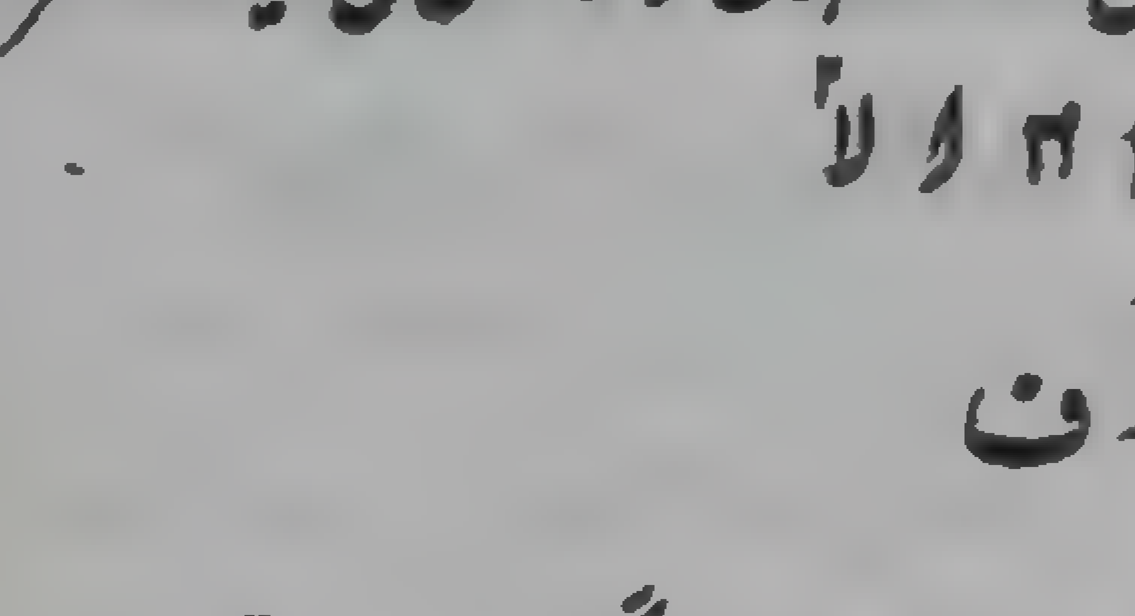
$$ث \times ۲ ط ا ف^۲ = ثہ \times ۲ ط ا لا^۲$$

$$\therefore \quad لا = \sqrt{\frac{ث}{ثہ}}\, ف$$

جس سے غرق شدہ حصہ کا تعین ہو جاتا ہے۔ دوسری شرط صریحاً پوری ہوتی ہے۔

مثال (۲) ایک مربع پترا ایک مائع میں جس کی کثافت اسکی کثافت کا دو چند ہے انتصاباً تیر رہا ہے۔ اس کے توازن کے محل معلوم کرو۔

شرائط توازن صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر پترے کا نصف حصہ مائع میں اس طرح غرق ہو کہ وتر انتصابی رہے یا دو اضلاع انتصابی ہوں۔



اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی اور محل بھی توازن کا محل ہو سکتا ہے یا نہیں۔ فرض کرو کہ پترا اس طرح تھاما گیا ہے کہ خط مستقیم د گ ج مائع کی سطح میں ہے اس صورت میں پہلی شرط پوری ہوتی ہے۔ لیکن اگر ∠ ج گ ا = ط اور مربع کا ضلع = ۲ ا تو نقطہ گ کے گرد سیالی دباؤ کا معیار جو

مستطیل اِک کے معیار اور مثلث گ ب د کے دو چند معیار کے فرق کے مساوی ہے

$$۲\,اَ^{۲} \times \frac{اَ}{۲}\ \text{جب}\ ط - اَ^{۲}\ \text{مس}\ ط \times \frac{\text{اقط}\ ط + \text{اجم}\ ط}{۳}$$

یا

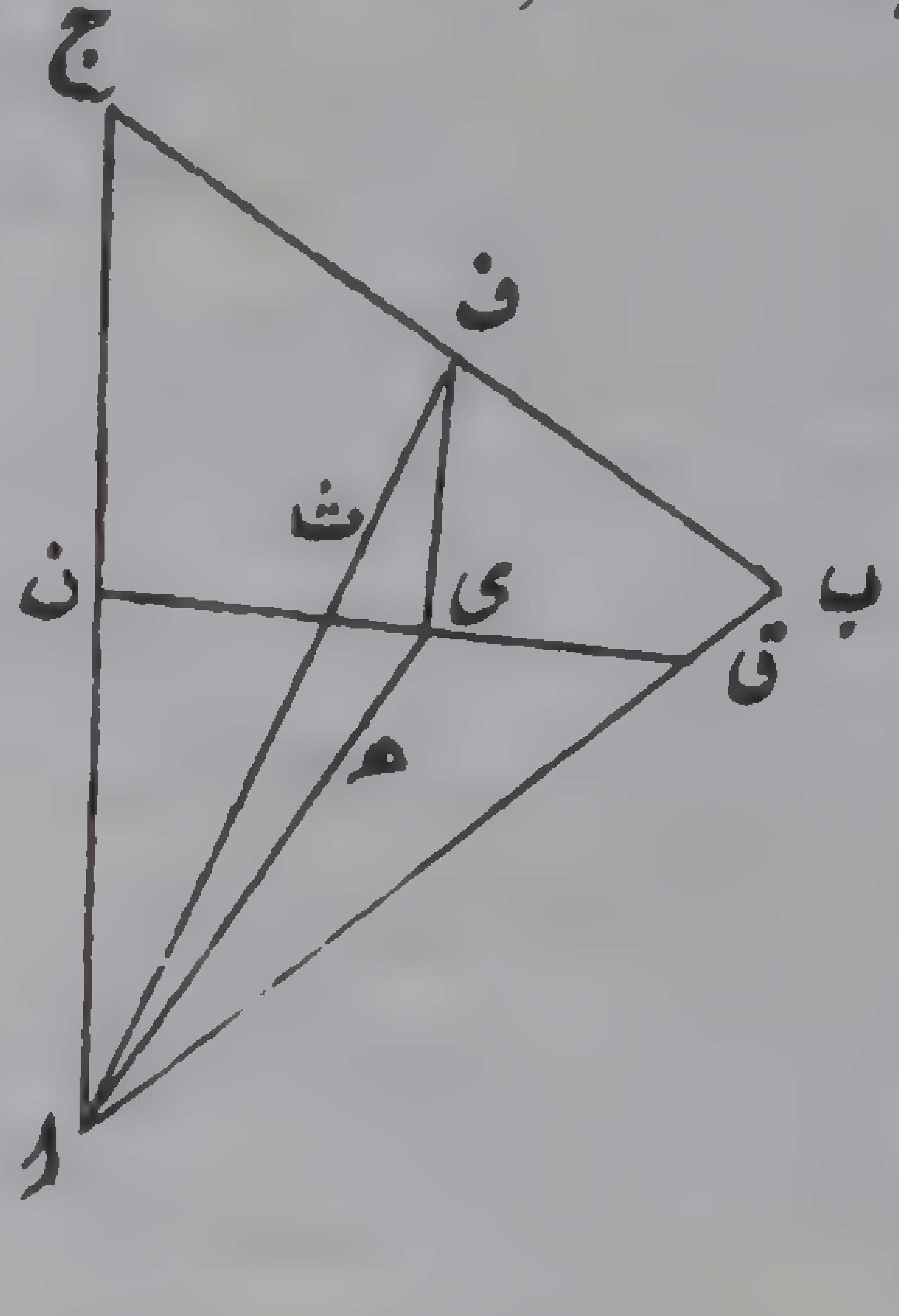
$$\text{جب}\ ط\ (۱ - \text{مس}^{۲}\ ط)$$

کے متناسب ہوگا اور یہ اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ ط = ۰، یا $\frac{\pi}{۴}$،

(۵۳) اس لئے توازن کا کوئی دوسرا محل نہیں ہو سکتا۔

مثال ۳ — ایک مثلثی منشور اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے توازن کے محل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ شکل ذیل منشور کی وہ تراش ہے جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے پیدا ہوتی ہے۔



ن ق تیراؤ کا خط اور ھ ہٹائے ہوئے مائع کا مرکز ثقل ہے۔ توازن کی صورت میں رقبہ ا ن ق : رقبہ ا ب ج :: منشور کی کثافت : مائع کی کثافت

اور اس لئے ن ق کے تمام محلوں کے لئے ا ن ق مستقل ہے۔ اس لئے ن ق ہمیشہ اپنے وسطی نقطہ پر ایک ایسے زائد کو مس کرتا ہے جس کے متقارب ا ب اور ا ج ہیں۔

نیز ھ ث، ن ق پر عمود وار ہونا چاہیئے اور چونکہ

ا ھ : ھ ی = ا ث : ث ف

اس لئے ف ی، ن ق پر عمود وار ہوگا۔ یعنی ف ی زائد کے نقطہ ی پر کا عماد ہے۔ اس لئے اب یہ مسئلہ ف سے منحنی پر عماد کھینچنے کے مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے

فرض کرو کہ محاور ا ب، ا ج کے حوالہ سے منحنی کی مساوات ہے

لا ما = ج²

اور زاویہ ب ا ج = ط، ا ب = ۲ ا، ا ج = ۲ ب

نیز فرض کرو کہ نقطہ ے کے محدد (لا، ما) ہیں۔ ا، ب نقطہ ف کے محدد ہیں اور نقطہ ے پر کے عماد کی مساوات ہے

عا − ما = (ما جم ط − لا) / (لا جم ط − ما) (فا − لا)

اور اگر یہ نقطہ ف میں سے گزرے جس کے محدد ا، ب ہیں تو

(ب − ما)(لا جم ط − ما) = (ا − لا)(ما جم ط − لا)

یا لا² − (ا + ب جم ط) لا = ما² − (ا جم ط + ب) ما .... (۲۴)

مساواتیں (۲۳) اور (۲۴) زائد کے تمام نقطوں کا تعین کرتی ہیں جن پر کے مماس تیراؤ کے خطوط ہو سکتے ہیں۔

نیز مساوات (۲۴) ا ب، ا ج کے متوازی مزدوج قطروں کے حوالہ سے ایک قائم زائد کی مساوات ہے۔ اس لئے ان دونوں زائدوں کے نقاط تقاطع ے کے محل ہیں۔

مساوات

لا⁴ − (ا + ب جم ط) لا³ + (ا جم ط + ب) ج² لا − ج⁴ = ۰

سے لا معلوم ہو سکتا ہے۔ اس مساوات میں صرف ایک اصل منفی ہے اور ایک یا تین مثبت اصلیں ہیں۔ اس لئے توازن کے محل تین ہو سکتے ہیں یا صرف ایک۔

اگر منشور اور مائع کی کثافتیں ثہ اور ث ہوں تو چونکہ رقبہ ن ا ق

= ½ ا ن × ا ق جب ط = ۲ لا ما جب ط = ۲ ج² جب ط،

اس لئے ۲ ث ج² جب ط = ۲ × ثہ × ا × ب جب ط

یا ث ج² = ثہ × ا × ب

جس سے ج معین ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ منشور متساوی الساقین ہے تو ا = ب رکھنے سے لا کو متعین کرنے کی

کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لا}^{۴} - \text{ج}^{۴} - \text{ا}\,(۱ + \text{جم طہ})(\text{لا}^{۳} - \text{ج}^{۲}\,\text{لا}) = ۰$$

اس سے ہمیں لا = ج ملتا ہے جس سے ما = ج حاصل ہوتا ہے اور ب ج افقی قرار پاتا ہے جو صریحاً توازن کا محل ہے اور نیز

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{۲}\,(۱ + \text{جم طہ}) \pm \left\{ \frac{\text{ا}^{۲}}{۴}\,(۱ + \text{جم طہ})^{۲} - \text{ج}^{۲} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \text{ا جم}^{۲}\,\frac{\text{طہ}}{۲} \pm \left(\text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۴}\,\frac{\text{طہ}}{۲} - \text{ج}^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

اس لئے متساوی الساقین منشور کے توازن کا محل صرف ایک ہوگا تا آنکہ

$$\text{ا جم}^{۲}\,\frac{\text{طہ}}{۲} > \text{ج}$$

اور چونکہ $\text{ت ج}^{۲} = \text{ثہ ا}^{۲}$ اس لئے یہ

$$\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{طہ}}{۲} > \sqrt{\frac{\text{ثہ}}{\text{ت}}}$$

کے مماثل ہے۔

مثال ۴۔ دی ہوئی شکل اور وزن کے غبارہ کے توازن کا محل معلوم کرو جبکہ کرۂ ہوائی کے مختلف ارتفاعوں پر تپش کے تغیرات نظر انداز کئے جائیں۔

تپش مستقل ہو تو ی ارتفاع پر ہوا کا دباؤ $= \text{ہ}\,\text{تو}^{-\frac{\text{ج ی}}{\text{ک}}}$ اور اس کی کثافت $= \frac{\text{ہ}}{\text{ک}}\,\text{تو}^{-\frac{\text{ج ی}}{\text{ک}}}$ جہاں ہ اُس مستوی پر کے ہوائی دباؤ کو تعبیر کرتا ہے جہاں سے ارتفاع کی پیمائش ہوئی ہے۔ ہٹائی ہوئی ہوا متغیر کثافت کے طبقات کے سلسلوں پر مشتمل ہوگی اور اگر غبارہ کے زیریں ترین نقطہ کا ارتفاع ی ہو اور اس نقطہ سے غبارہ کی کسی افقی تراش (لا) کا فاصلہ لا ہو اور ف غبارہ کا ارتفاع ہو تو ہٹائی ہوئی ہوا کے ایک طبقہ کا وزن ہوگا

$$\frac{\text{ہ ج}}{\text{ک}}\,\text{تو}^{-\frac{\text{ج}(\text{ی} + \text{لا})}{\text{ک}}}\;\text{لا معّ لا}$$

اور ہٹائی ہوا کا کل وزن

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{ف}} \frac{\text{مہ ج}}{\text{ک}}\, \text{و}^{\frac{\text{مہ ج(ی + لا)}}{\text{ک}}}\ \text{لا فرلا}$$

$$= \frac{\text{مہ ج}}{\text{ک}}\, \text{و}^{\frac{\text{ج ی}}{\text{ک}}} \int_{\text{ب}}^{\text{ف}} \text{و}^{\frac{\text{ج لا}}{\text{ک}}}\ \text{لا فرلا}$$

اب چونکہ غبارہ کی شکل دیگئی ہے اس لئے لا، لا کا ایک معلومہ تفاعل ہے اور اگر غبارہ اور اس کی اندرونی گیس کا وزن و ہو تو ارتفاع ی کا تعین و کو ہٹائی ہوئی ہوا کے کل وزن کے مساوی رکھنے سے ہو جاتا ہے۔

۵۰ — ایک متجانس ٹھوس جسم کلاً غرق شدہ ایک مائع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ جسم کی کمیت کے مرکز کی گہرائی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ جسم کے بلند ترین اور زیر ترین نقاط کی گہرائیاں ا، ب ہیں، اور ی گہرائی پر اس کی افقی تراش کا رقبہ سے ہے اور اس گہرائی پر مائع کی کثافت مہ ی ہے

تو

$$\text{ہٹائے ہوئے مائع کا وزن} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ج مہ ی سے فری}$$ (۵۵)

فرض کرو کہ جسم کے حجم (ح) کے مرکز ہندسی کی گہرائی $\bar{\text{ی}}$ ہے تو

$$\text{ح}\ \bar{\text{ی}} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{سے ی فری}$$

اس لئے ہٹائے ہوئے مائع کا وزن = ج مہ $\bar{\text{ی}}$ ح، اور اگر جسم کی کثافت ث ہو تو اس کا وزن = ج ث ح اس لئے ث = مہ $\bar{\text{ی}}$ یعنی جسم ایک ایسے محل میں تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کے مرکز ہندسی کی گہرائی پر مائع کی کثافت جسم کی کثافت کے مساوی ہے۔

۵۱ — اگر ایک ٹھوس جسم کسی قید کے تحت تیر رہا ہو تو توازن کی شرطیں قید کے حالات کی نوعیت پر منحصر ہونگی لیکن ہر صورت میں قید کرنے والی قوتوں کا حاصل انتصابی سمت میں عمل کرے گا کیونکہ دوسری قوتیں (سیالی دباؤ اور جسم کا وزن) انتصاباً عمل کرتی ہیں۔

مثلاً اگر ٹھوس جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو تو توازن کی شرط یہ ہے کہ اس نقطہ کے گرد جسم کے وزن اور ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے معیار مساوی ہونے چاہئیں۔

اگر یہ شرط پوری ہو تو جسم ساکن ہوگا اور ثابت نقطہ پر کا دباؤ ان دو وزنوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔
اور مثال یہ ہو سکتی ہے کہ ہم ایسے ٹھوس جسم پر غور کریں جو پانی میں تیر رہا ہو اور ایک رسی کے ذریعہ لٹکایا گیا ہو جو پانی کی سطح کے اوپر ایک نقطہ سے بندھی ہوئی ہے۔ توازن کی حالت میں رسی انتصابی ہوگی اور اس کے تناؤ اور حاصل سیالی دباؤ (جو ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہے) کا مجموعہ جسم کے وزن کے مساوی ہوگا۔ اس لئے رسی کا تناؤ جسم کے وزن اور ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے فرق کے مساوی ہوگا اور یہ دونوں وزن اُن فاصلوں کی نسبت معکوس میں ہونگے جو ان کے خطوط عمل اور ڈوری کے خط کے درمیان ہیں اور یہ تینوں خطوط ایک ہی انتصابی مستوی میں ہونگے۔

۵۲ــــ آیندہ کی تحقیق میں حسب ذیل ہندسی مسئلے کارآمد ثابت ہونگے۔
اگر ایک مستوی سطح ایک ٹھوس جسم کو قطع کرے اور اس مستوی کو ایک بہت چھوٹے زاویہ میں ایسے خط مستقیم کے گرد گھمایا جائے جو اسکی مستوی میں واقع ہو تو قطع کردہ حجم وہی رہے گا بشرطیکہ خط مستقیم مستوی تراش کے رقبہ کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہو۔
اس کو ثابت کرنے کے لئے کسی قسم کے ایک اسطوانہ پر غور کرو جس کو ایسی مستوی سطح قطع کرتی ہے جو اس کے قاعدہ کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے۔
فرض کرو کہ تراش ا کے مرکز ہندسی کا فاصلہ اسطوانہ کے قاعدہ سے یَ ہے
اور تراش کے رقبہ کا عنصر معـ ا اور مستویوں کا درمیانی حجم ح ہے تو (۵۶)

یَ = (∑ معـ ا × ن ل) / ا

∴ ا جم ط × یَ = ∑ (معـ ا جم ط × ن ل) = ح
یا
ح = یَ (قاعدہ کا رقبہ)



اب رقبہ ا کا مرکز ہندسی اُن تمام تراشوں کا مرکز ہندسی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والے مستوی قطع کرتے ہیں۔ یہ بات ان تراشوں کے ظل اسطوانہ کے قاعدہ پر لینے سے بخوبی ظاہر ہو جاتی ہے۔
اب چونکہ تمام تراشوں کے لئے یَ وہی ہے

اس لئے قطع کردہ حجم بھی وہی ہونگے۔

کسی ٹھوس کی صورت میں اگر قاطع مستوی کو اپنے مرکز ہندسی کے گرد ایک بہت چھوٹے زاویہ میں گھمایا جائے تو تراشوں کو محدود کرنے والے منحنیوں کے نزدیک کی سطح بغیر کسی قابل قدر غلطی کے اسطوانی خیال کیجا سکتی ہے۔ اور اس لئے مسئلہ بالا کی تصدیق ہو جاتی ہے[1]

بالفاظ دیگر قاطع مستوی کے مقام میں تبدیلی سے حجم میں جو نقصان اور اضافہ ہوتا ہے ان دونوں کا فرق کسی ایک کے مقابلہ میں لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

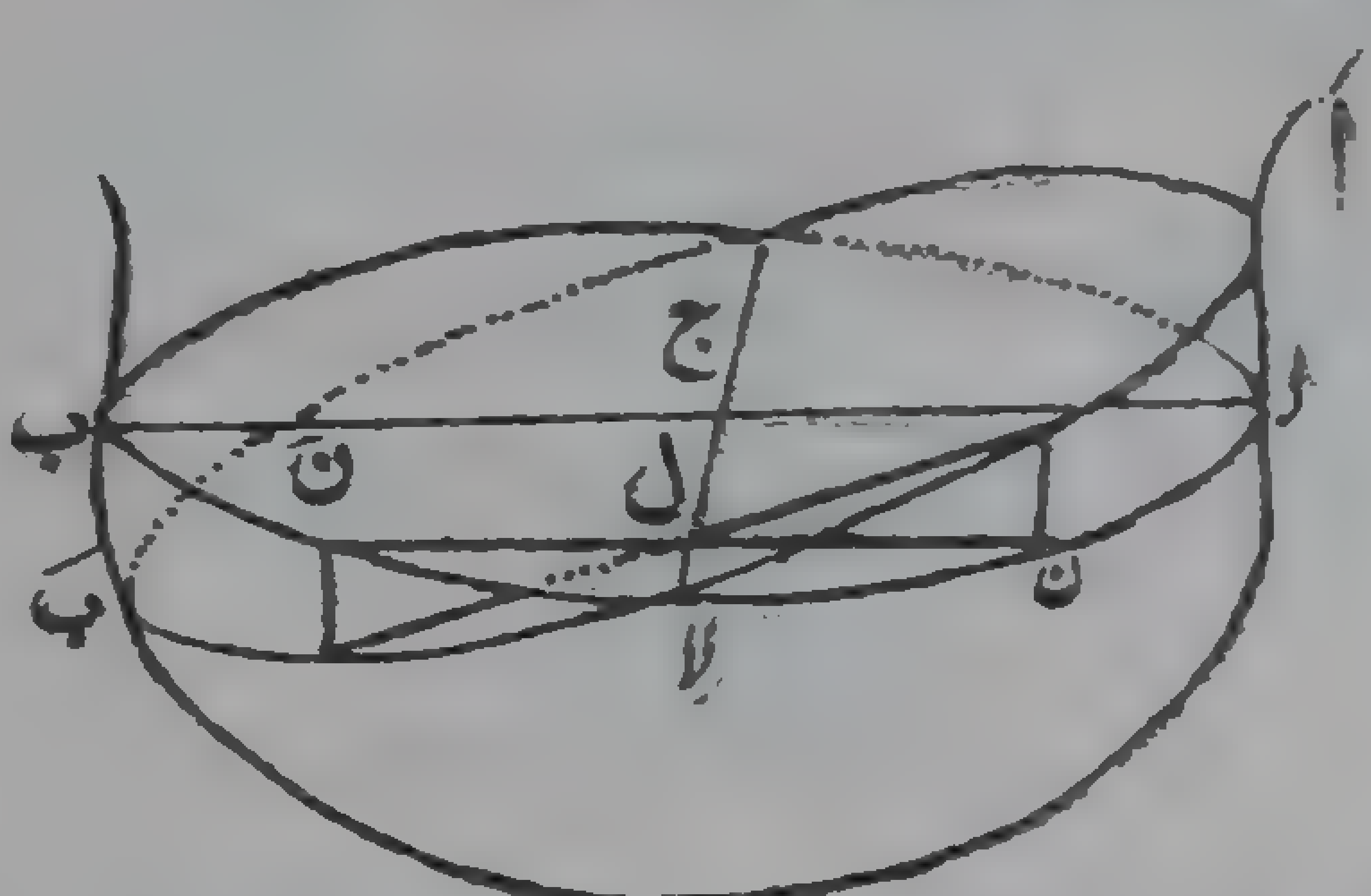
۵۳ — **تعریفات** ۔ اگر ایک جسم متجانس مائع میں تیر رہا ہو تو مائع کی سطح جسم کو جس مستوی پر قطع کرتی ہے اس کو تیراؤ کا مستوی کہا جائے گا۔

ہٹائے ہوئے مائع کی کمیت کا مرکز ۃ **اچھال کا مرکز** کہلاتا ہے۔

---

[1] حسب ذیل ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ قاطع مستوی ا ج ب، ایک خط ج لا کے گرد ایک چھوٹے زاویہ (طہ) میں گھمایا گیا ہے اور اس کے رقبہ کا عنصر فرا ہے۔



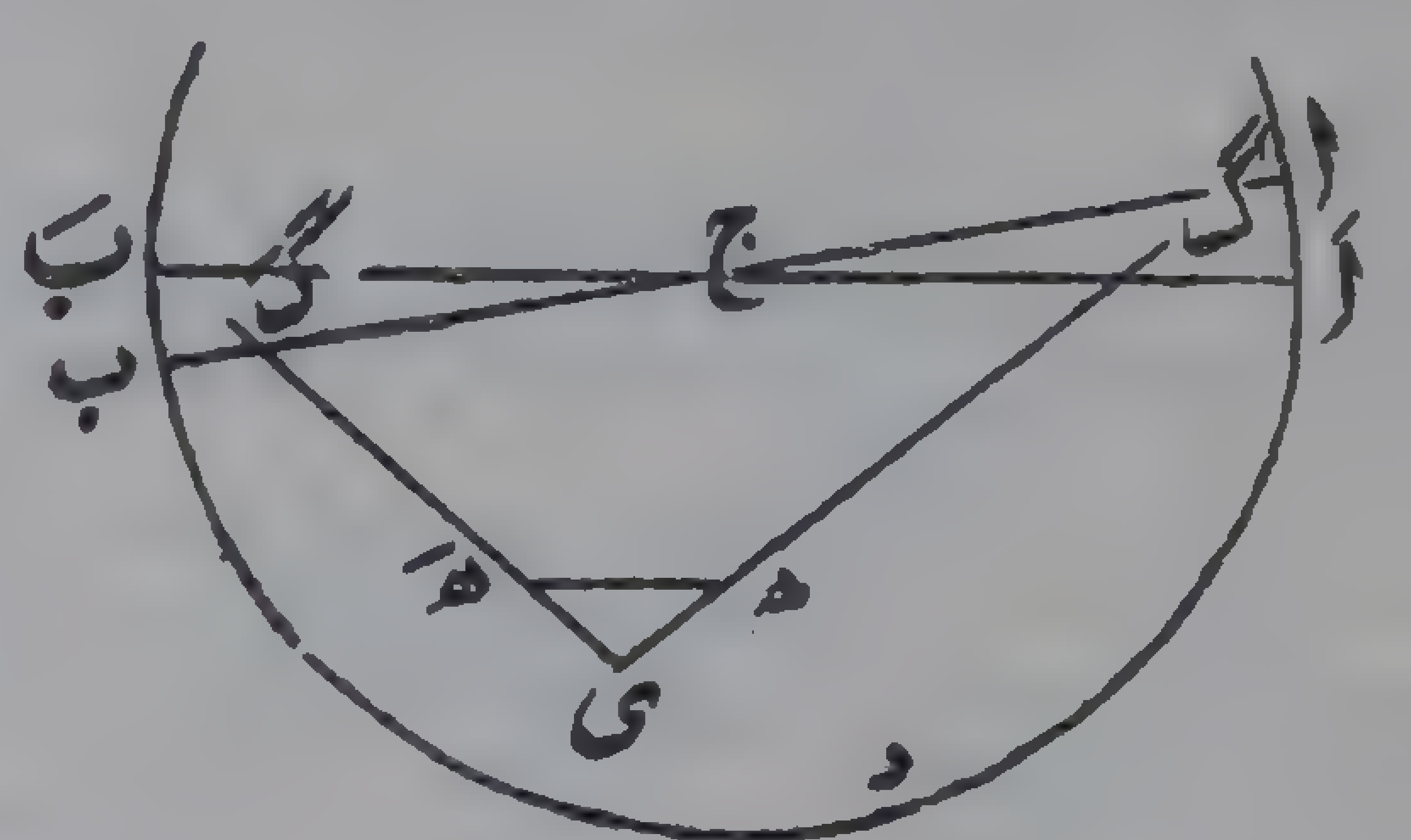
تو قطع شدہ حجم میں جو اضافہ ہوگا اس کی جبری قیمت ∫طہ ما فرا کے مساوی ہوگی۔ اب اگر یہ معدوم ہو جائے تو ∫ما فرا = ۰، جو اس بات کی شرط ہے کہ ا کا مرکز ہندسی محور لا پر واقع ہو۔ اس طرح اگر ج کو مرکز ہندسی فرض کیا جائے تو ج میں سے گزرنے والا ہر مستوی اس شرط کو پورا کرے گا۔

مخفی نہ رہے کہ قطع شدہ حجم کا جبری معیار محور ما کے گرد ∫طہ لا ما فرا ہے جو معدوم ہوگا اگر ∫لا ما فرا = ۰ یعنی اگر محاور ج لا، ج ا، رقبہ کے صدری محاور ہوں۔

اگر جسم اس طرح حرکت کرے کہ ہٹائے ہوئے مائع کا حجم نہ بدلے تو تیراؤ کی مستوی سطحوں کے لفاف کو تیراؤ کی سطح اور ھ کے طریق کو اچھال کی سطح کہتے ہیں۔

۵ — اگر ایک مستوی حرکت کرے اس طور پر کہ اس سے ایک ٹھوس جسم کا ہمیشہ مستقل حجم قطع ہو اور اگر قطع شدہ حجم کا مرکز ہندسی ھ ہو تو ھ پر اُس سطح کا مماسی مستوی جو ھ کا طریق ہے قاطع مستوی کے متوازی ہوگا۔

دوسرے الفاظ میں تیراؤ کی سطح کے کسی نقطہ پر اور اچھال کی سطح کے متناظر نقطہ پر کے مماسی مستوی ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔



قاطع مستوی ا ج ب کو ایک چھوٹے زاویہ میں پھراؤ فرض کرو کہ اس کا نیا مقام اَ ج بَ ہے قانون ا ج اَ اور ب ج بَ کے حجم مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ ان قانوں کے ہندسی مرکز گ، گَ ہیں۔

گ ھ ممدودہ میں نقطہ ی لو اس طور پر کہ

ی ھ : ھ گ :: حجم ا ج اَ : حجم اَ د ب

گَ ی کو ملاؤ اور نقطہ ھَ لو اس طور پر کہ

ی ھَ : ھَ گَ :: حجم ب ج بَ : حجم اَ د ب

تو ھَ، اَ د بَ کا مرکز ہندسی ہوگا۔

لیکن ی ھ : ھ گ :: ی ھَ : ھَ گَ

اور اس لئے ھ ھَ، گ گَ کے متوازی ہے۔

(۵۸) جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر زاویہ ا ج اَ کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو انتہا میں

ھ ھَ، ا ج ب کے متوازی ہوگا

اور ھ ھَ، ھ کے طریق کے نقطہ ھ پر کا مماس ہوگا

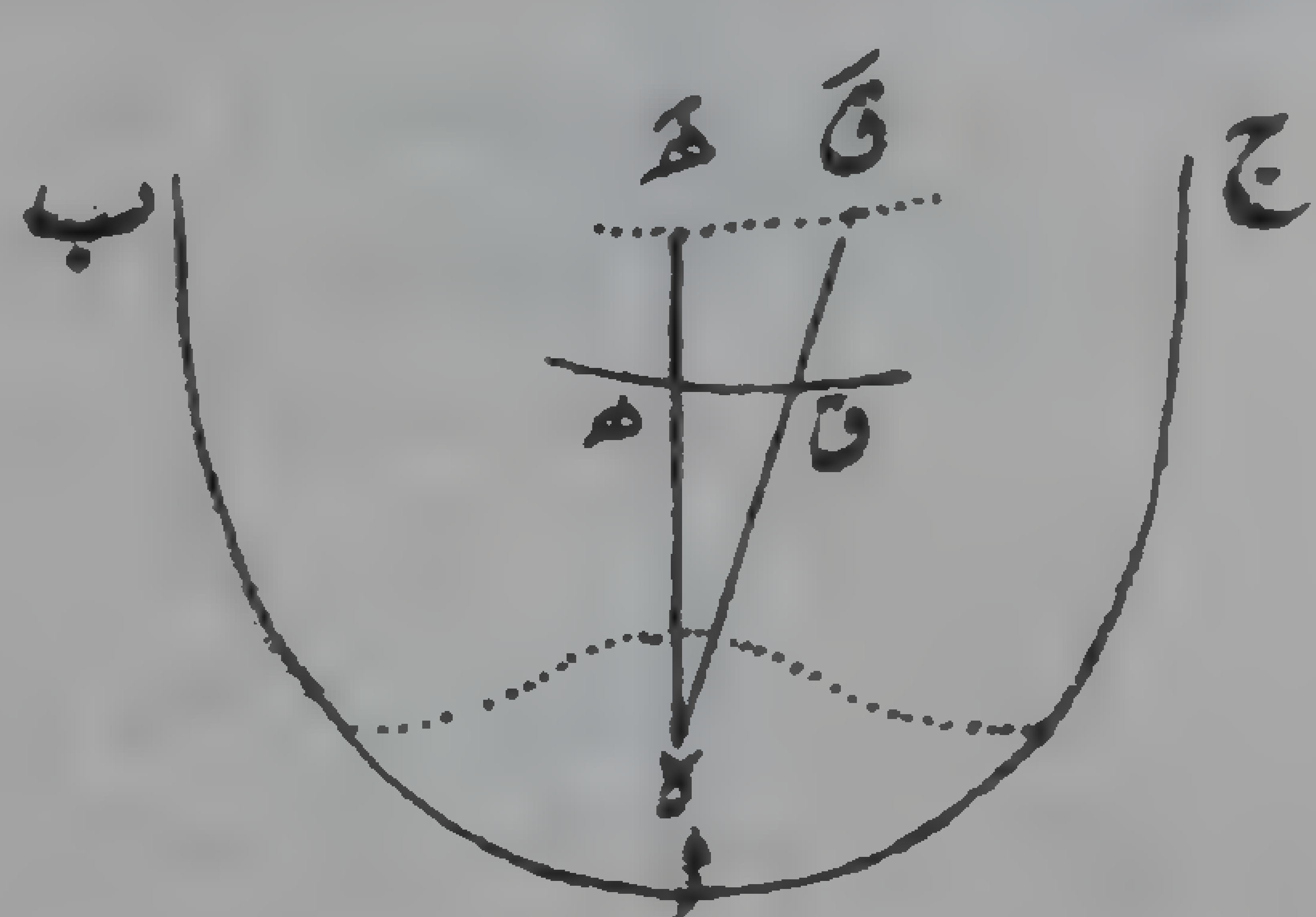
اب چونکہ مستوی ا ج ب گ کے (اس کے مرکز ہندسی کے گرد) کسی ہٹاؤ کے لئے یہ بات صادق آتی ہے اس لئے ھ کے طریق کے نقطہ ھ پر کا مماسی مستوی، مستوی ا ج ب کے متوازی ہوگا۔

۵۵ —— ایک متجانس مائع میں تیرنے والے جسم کے توازن کے محل، جسم کی کمیت کے مرکز گ سے اچھال کی سطح پر کے عماد کھینچنے سے معلوم کئے جاتے ہیں۔

کیونکہ اگر اچھال کی سطح کا ایک عماد گ ھ ہو تو ھ پر کا مماسی مستوی تیراؤ کی سطح کے متوازی ہونیکی وجہ سے افقی ہوگا اور اس لئے گ ھ انتصابی ہوگا۔

اس طرح توازن کی دونوں شرطیں پوری ہوتی ہیں اور توازن کے محل کا تعین ہوجاتا ہے۔ یہ مسئلہ دراصل یہی ہے کہ ایک وزن دار جسم (جو اچھال کی سطح سے محدود ہے) کے توازن کے محل ایک افقی مستوی پر معلوم کئے جائیں۔

۵۶ —— یہ بات معلوم رہے کہ اچھال کے منحنی کی شکل محدود یا احاطہ کرنے والی سطح کی شکل سے پوری طرح متعین ہوجاتی ہے اور جسم کے اس حصہ کی شکل کی تبدیلی سے جو ہمیشہ غرق رہتا ہے اس پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔



فرض کرو کہ حدود ب ا ج اور غرق شدہ حجم ح کے لئے اچھال کی سطح کی قوس ھ ق ہے۔ ایسا خیال کرو کہ حجم حَ کاٹ دیا گیا ہے اور اس کا مرکز ہندسی ک ہے۔ لو ک ھَ : ک ھ :: ک قَ : ک ق :: ح : ح - حَ، تو سطح ھَ قَ اچھال کی نئی

سطح ہوگی جو صریحاً سطح ھ ق کے متشابہ ہے۔

ھ ــــ اچھال کے منحنیوں کی خاص صورتیں۔

مثلثی منشور کے لئے، بوجب دفعہ (۴۹) تیراؤ کا منحنی ن ق کا لفاف ہے جو ایک زائدہ ہے جس کے متقارب اب، اج ہیں اور چونکہ ا ھ = ۲/۳ ا ی اس لئے اچھال کا منحنی ایک متشابہ زائدہ ہے۔

اگر جسم ایک مستوی پترا ہو جو ایک مکافی سے محدود ہے تو تیراؤ اور اچھال کے منحنی مساوی مکافی ہونگے۔

لیکن اگر پترا ناقصی قوس سے محدود ہو تو منحنی ہم مرکز ناقص ہونگے جو باہم متشابہ اور متشابہ طور پر واقع ہونگے۔

اگر کسی پترے (یا منشور) کا غرق شدہ حصہ مستطیل ہو تو تیراؤ کا منحنی صریحاً ایک تنہا نقطہ ہوگا اور اچھال کا منحنی ایک مکافی ہوگا۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ تیراؤ کے خط کے محلول اج ب اور اَج بَ کے جواب میں ہندسی مرکزوں کے مقامات ھَ، ھ ہیں۔

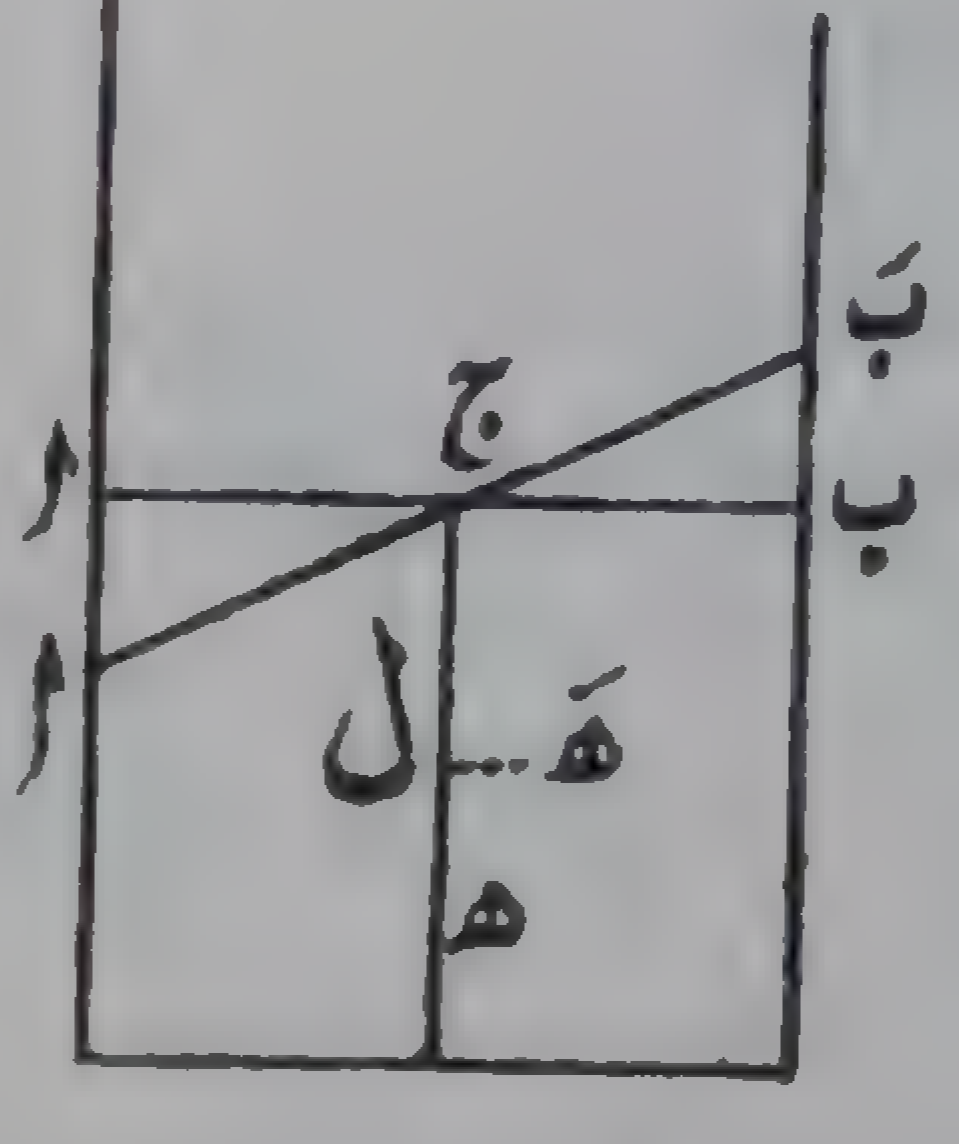
$$\text{اگر } \text{اج} = \text{ج ب} = \text{ا}،\ \text{ب بَ} = \text{ہ}،\ \text{ج ھ} = \text{ج}،\ \text{س} =$$

کل رقبہ جو قطع ہوتا ہے

$$\text{تو س ا} = \text{سَ} \times \text{ھَ ل} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا ہ} \times \tfrac{\text{۲ا}}{3} - \tfrac{1}{2}\,\text{ا ہ} \left(- \tfrac{\text{۲ا}}{3} \right) = \tfrac{2}{3}\,\text{ا}^2\,\text{ہ}$$

$$\text{س لا} = \text{س} \times \text{ھ ل} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا ہ} \left(\text{ج} + \tfrac{\text{ہ}}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{ا ہ} \left(\text{ج} + \tfrac{\text{ہ}}{3}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{ا ہ} \left(\text{ج} - \tfrac{\text{ہ}}{3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\text{ا ہ}^2$$



$$\text{اور} \quad \therefore \text{س ا}^2 = \tfrac{\text{۲ا}}{3}\,\text{ۃ}^3\,\text{لا}$$

یہ مثلثی منشور کی خاص صورت ہے اور جیسا وہاں یہاں بھی تیراؤ کی اور اچھال کے منحنی متشابہ منحنی ہیں۔ درحقیقت تیراؤ کا منحنی ایک مکافی ہے جس کا ماسکس ج پر ہے جو چپٹا ہوکر ایک خط مستقیم بن گیا ہے۔

مثال (۲) دفعہ ۴۹ کی صورت میں س = ۲ ا^۲

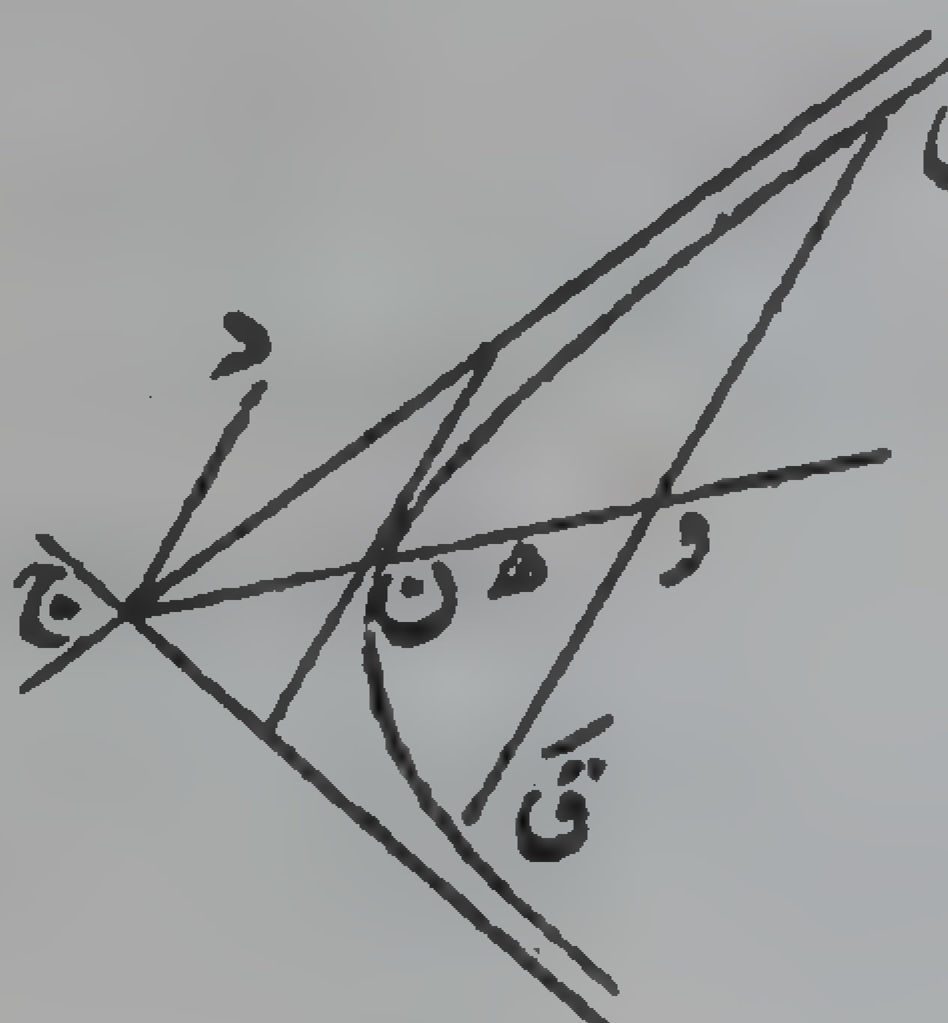
اور اچھال کا منحنی مکافی ۳ م^۲ = ۲ ا لا ہے۔

اس مکافی کے راس ھ پر انحنا کا نصف قطر ⅔ ا ہے جو ھ گ سے کم ہے۔

اس طرح ظاہر ہے کہ اچھال کے منحنی کے تین عماد کھینچ سکتے ہیں جن سے توازن کے تین محل ملیں گے۔

۵۸ — اگر جسم ایک تیرا ہو جو زائدی قوس سے محدود ہو تو منحنی متشابہ زائد ہونگے۔

اگر ق قَ تیراؤ کا خط ہو اور ۲ اَ، ۲ بَ ق قَ کے متوازی اور اُس کے مزدوج قطر ہوں اور ان کے درمیان زاویہ طہ ہو اس طرح کہ اَ بَ جب طہ = ا ب ، تو



رقبہ ق ن قَ = ۲ ∫ (از اَ تا لاَ) (بَ/اَ) √(لا^۲ − اَ^۲) جب طہ فرلا

= ا ب { (لاَ/اَ) √(لاَ^۲/اَ^۲ − ۱) − لوک (لاَ/اَ + √(لاَ^۲/اَ^۲ − ۱)) }

اس طرح لاَ کو اَ کے ساتھ یعنی ج ھ کو ج ن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ مستقل ہے

نیز

(رقبہ)(ج ھ) = ۲ (بَ/اَ) جب طہ ∫ (از اَ تا لاَ) لا √(لا^۲ − اَ^۲) فرلا

= ⅔ ا ب (لاَ^۲/اَ^۲ − ۱)^(۳/۲) اَ

اور اس لئے ج ھ کو ج ن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ مستقل ہے۔

یہ نتیجے خالص ہندسی استدلال سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔

۵۹ — ایک مستدیرہ مخروط کی صورت میں جو اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس آزاد سطح کے نیچے ہے تیراؤ کی اور اچھال کی سطحیں گردشی زائد نما ہونگی۔

اگر مخروط کا راس و، کسی تراش کا محور اعظم ا ج ب اور ا ب پر کا عمود و ک

ہو تو حجم و ا ب

$$= \frac{1}{2}\,\text{وک} \times \frac{1}{2}\,\pi\,\text{اب} \left\{ \text{او} \times \text{ب و جب}^{2}\,\text{ع} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{لیکن}\quad \text{وک} \times \text{اب} = \text{وا} \times \text{وب جب}\,2\,\text{ع}$$

کیونکہ ہر جلہ رقبہ و ا ب کا دو چند ہے۔ اس لئے حجم مستقل ہونے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ رقبہ و ا ب مستقل ہے۔

اس لئے مستوی تراش کے مرکز ہندسی جَ کا طریق ایک گردشی زائد نما ہے اور و ہ چونکہ و ج کا تین چوتھائی ہے۔ اس لئے اچھال کی سطح بھی ایک متشابہ زائد نما ہے۔

۶۰ — ناقص نما کے لئے اچھال کی اور تیراؤ کی سطحیں۔

اگر ناقص نما کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ ہو تو لا = ا عا، ما = ب ضا، ی = ج طا کے اندراج سے یہ مسئلہ ایک کرہ $\text{عا}^2 + \text{ضا}^2 + \text{طا}^2 = 1$ کے مسئلہ میں تحویل ہو جاتا ہے اور اگر ناقص نما کے غرق شدہ حصہ کا حجم ح سے تعبیر ہو تو اس کے جواب میں کرہ کا حجم (۲۱)

$\frac{\text{ح}}{\text{ا ب ج}}$ سے تعبیر ہوگا۔

اب یہ ظاہر ہے کہ یہ حجم قطع کرنے والا مستوی نصف قطر ر کے ایک کرہ کو مس کرے گا اس طرح کہ

$$\int_{\text{ر}}^{1} \pi\,(1-\text{لا}^2)\,\text{فرلا} = \frac{\text{ح}}{\text{ا ب ج}}$$

$$\text{یا}\qquad \frac{1}{3}\,\pi\,(1-\text{ر})^2\,(2+\text{ر}) = \frac{\text{ح}}{\text{ا ب ج}}$$

نیز حجم جو قطع ہوتا ہے اُس کا مرکز ہندسی ایک ایسے کرہ پر واقع ہوگا جس کا نصف قطر م ہے جہاں

$$\text{م} \int_{\text{ر}}^{1} \pi\,(1-\text{لا}^2)\,\text{فرلا} = \int_{\text{ر}}^{1} \pi\,\text{لا}\,(1-\text{لا}^2)\,\text{فرلا}$$

یا $س = \frac{۳}{۴} \frac{(۱ + ر)^۲}{ر + ۲}$

اصلی شکل کی طرف رجوع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تیراؤ کی سطح ایک متشابہ ناقص نما ہے جس کے نصف محور را، رب، رج ہیں۔ جہاں

$$(۱ - ر)^۲ (۲ + ر) = \frac{ح}{۴ ا ب ج} \quad .... \quad (۱)$$

اور اچھال کی سطح ایک اور متشابہ ناقص نما ہے جس کے نصف محور س ا، س ب، س ج ہیں جہاں

$$س = \frac{۳}{۴} \frac{(۱ + ر)^۲}{ر + ۲} \quad .. .. \quad (۲)$$

زائد نما دو چادری کے لئے بھی اسی قسم کے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔

۶۱ — ناقصی مکافی نما۔

یہ صورت ناقص نما کے نتائج سے اس طور پر حاصل ہو سکتی ہے کہ ناقص نما کے نیتجوں میں ا، ب، ج کو اس طرح پر مائل بہ لا تناہی کیا جائے کہ

$\frac{ا^۲}{ج} \rightarrow ع$ اور $\frac{ب^۲}{ج} \rightarrow ب$ جہاں ع، ب مکافی نما کی صدری تراشوں کے نصف وتر خاص ہیں۔ اس لئے گزشتہ کی طرح اگر ح سے غرق شدہ محدود حجم تعبیر ہو تو $\frac{ح}{ا ب ج}$ مائل بہ صفر ہوگا اور ر اور س دونوں مائل بہ اکائی ہونگے۔ اس لئے تیراؤ اور اچھال کی سطحیں مساوی مکافی نما ہیں۔ نیز ان کے راسوں اور دیے ہوئے مکافی نما کے راس میں جو فاصلے ہیں وہ ج (۱ - ر) اور ج (۱ - س) کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

لیکن دفعہ ۶۰ (۱) سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$ج^۲ (۱ - ر)^۲ = \frac{۳ ح ج}{(۲ + ر) ۴ ا ب} \rightarrow \frac{ح}{۴ سا ع ب}$$

اس طرح معلومہ مکافی نما اور تیراؤ کی سطح کے درمیان محور پر کا مقطوعہ جہ ہوگا جہاں

ج۲ = ح / (۲۴ ا ہ ب)

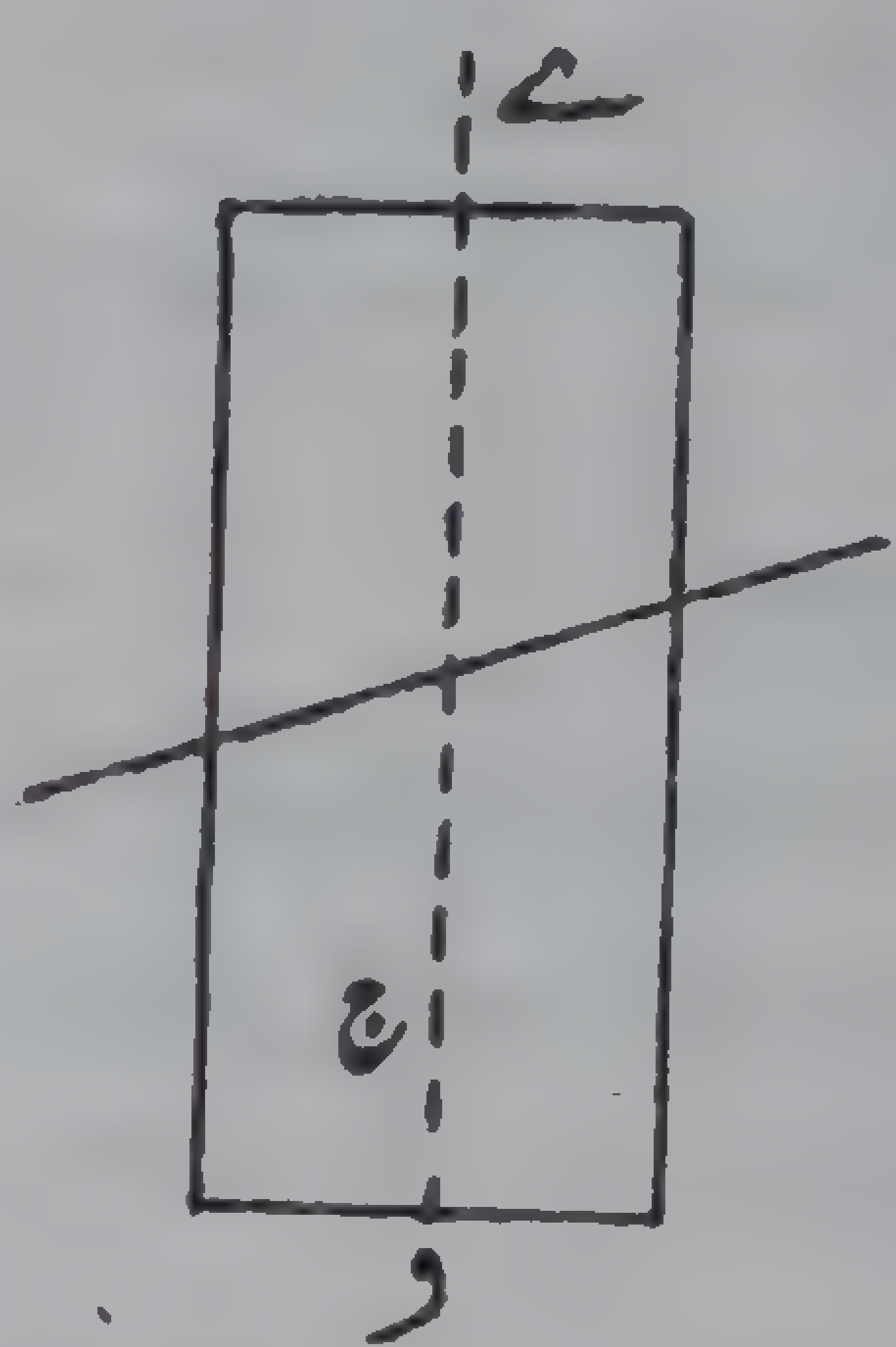
اسی طرح دفعہ ۶۰ (۲) سے

ج (۱ − ر) = ج (۱ − ر) (۵ + ۳ ر) / ۴ (۲ + ر) ← ۲/۳ ج

(۶۲) جس سے اچھال کی سطح کے لئے متناظر مقطوعہ ملجاتا ہے۔

۶۲ — کسی تراش کا اسطوانہ۔

تیراؤ کی سطح نقاط ہندسی کے خط وے پر ایک نقطہ ہے جو ا ج = ح سے حاصل ہوگا جہاں ا عمودی تراش اور ح غرق شدہ حجم ہے۔



فرض کرو کہ قاطع مستوی کی مساوات

ی = ل لا + م ما + ج ہے اور مبدا و قاعدہ میں لیا گیا ہے۔

اچھال کے مرکز کے محدد (لاَ، ماَ، یَ) ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:۔

ح لاَ = ∫∫ لا ی فرلا فرما، قاعدہ پر تکمل ہوا گیا

= ∫∫ لا (ج + ل لا + م ما) فرلا فرما

= ا ل + ہ م

اسی طرح

ح ماَ = ∫∫ ما ی فرلا فرما

= ہ ل + ب م

اور ح یَ = ۱/۲ ∫∫ ی۲ فرلا فرما

= ۱/۲ (ا ل۲ + ۲ ہ ل م + ب م۲) + ۱/۲ ج۲ ا

جہاں $\text{ا} = \iint \text{لا}^2\ \text{فرلا فرما}$ ، $\text{ھ} = \iint \text{لا ما فرلا فرما}$ ، $\text{ب} = \iint \text{ما}^2\ \text{فرلا فرما}$

اگر ہم تراش کے صدری محوروں کو محور لا اور محور ما فرض کریں تو ھ = ۰ ،
اور

$$\text{ح}\ \bar{\text{لا}} = \text{ال} \text{ ، } \text{ح}\ \bar{\text{ما}} = \text{ب م} \text{ ، } \text{ح}\left(\bar{\text{ی}} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\text{ال}^2 + \text{ب م}^2\right)$$

اس لئے اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}} = \frac{\text{۲ ی} - \text{ج}}{\text{ح}}$$

۶۳ — ایک گردشی مجسم ایسے مائع میں تیر رہا ہے جو ایک انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے گویا یہ ٹھوس ہے مجسم کا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ توازن کی شرط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

گھومنے والے مائع کی کمیت میں ایک گردشی سطح کھینچو جس کا محور گھومنے والے مائع
کے محور پر منطبق ہو۔ اس سطح کے اندرونی مائع کے توازن پر غور کرو۔ اس مائع پر سیالی دباؤں کا
حاصل اس کے وزن کے مساوی ہونا چاہیئے اس طرح اگر اس مائع کی جگہ کوئی مجسم لے لے تو
(۶۳) اس کی سطح پر بھی یہی سیالی دباؤ عمل کریں گے اور اس لئے اس قسم کا مجسم متوازن ہوگا اگر اس کا
وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے برابر ہو۔ یہ قابل توجہ ہے کہ خواہ مجسم سیال کے ساتھ
گھومے یا ان کی زاوی رفتار مختلف ہو یا یہ ساکن ہو ہر صورت میں نتیجہ بالا صادق آئے گا۔

مثال :- ایک اسطوانہ گھومنے والے مائع میں تیر رہا ہے جس گہرائی تک یہ ڈوبتا ہے اسے معلوم کرو۔

اگر سہ زاوی رفتار ہو تو آزاد سطح کے تکوینی مکافی کی مساوات اس کے راس کو مبدا قرار دینے سے $\text{سہ}^2\ \text{ما}^2 = \text{۲ ج ی}$ ہوگی۔ اور اگر تیراؤ کے دائرہ کے نیچے یعنی اس دائرہ کے نیچے جو آزاد سطح اور اسطوانہ کی سطح کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے اسطوانہ کے قاعدہ کی گہرائی یٓ ہو اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر تو ہٹائے ہوئے سیال کا حجم ، یٓ ارتفاع کے اسطوانہ

کے حجم اور سہ^۲ ر^۲ / ۲ ج ارتفاع کے مکافی نما کے حجم کے فرق کے مساوی ہوگا۔
پس اگر اسطوانہ کی کثافت ثہ اور سیال کی ث ہو تو

ثہ ۲ رِ^۲ ف = ث (۲ ر^۲ ی − سہ^۲ ر^۴ / ۴ ج)

اور ی = ثہ/ث ف + سہ^۲ ر^۲ / ۴ ج ، (ف اسطوانہ کا ارتفاع ہے)

۶۴ — زیادہ عام صورت ایسے جسم کی ہے جو جزءً یا کلاً غرق شدہ ایسے مائع میں تیر رہا ہے جو معلومہ قوتوں کے زیر عمل ساکن رہے اور یہی قوتیں جسم کے سالمات پر بھی عمل کرتی ہیں۔ اگر جسم متوازن ہو تو اس پر کی حاصل قوت ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی ہوگی۔ اور ان قوتوں کے خطوط عمل وہی ہونگے۔
کیونکہ اگر جسم علیحدہ کر لیا جائے اور اس کی جگہ کو ہٹائے ہوئے مائع سے پر کر دیا جائے تو جسم پر سیال کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو ہٹائے ہوئے مائع پر ہے۔ اور اس لئے وہ ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی اور متقابل ہوگا۔
مثال — مائع کی کچھ کمیت ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ ہے اور جو ایسے بدلتی ہے جیسے اس مرکز سے فاصلہ ایک ٹھوس جسم کر دی قطاع کی شکل کا اس میں جزءً غرق شدہ ساکن ہے۔ اس کا راس مذکورہ بالا ثابت نقطہ پر ہے مائع اور ٹھوس کی کثافتوں کا مقابلہ کرنا مطلوب ہے۔
توازن کی صورت میں فرض کرو کہ مائع کی آزاد سطح کا نصف قطر ر اور کروی قطاع کا نصف قطر ا ہے۔ قطاع کے حجم کو ہٹائے ہوئے مائع کے حجم کے ساتھ ا^۳/ر^۳ کی نسبت ہوگی اور قوت کے مرکز سے ان کی کمیتوں کے مرکزوں کے فاصلے ا اور ر کی نسبت رکھیں گے۔
∴ اگر کثافتیں ث اور ثہ ہوں تو ث ا^۴ = ثہ ر^۴

(۶۴) # اسئلہ

ا — دو قائم ہم محور مخروطوں کو جن کے راسی زاویئے دہی ہیں راسوں سے جوڑ کر ایک مجسم بنایا گیا ہے اس کو ایک برتن میں اس طرح رکھا گیا کہ اس کا ایک سرا برتن کے افقی قاعدہ پر ٹکا ہوا ہے

پھر اس میں پانی ڈالا گیا ہے اگر اوپر کے مخروط کا ارتفاع نیچے کے مخروط کے ارتفاع کا تین گنا ہو اور ان کی مشترک کثافت پانی کی کثافت کا $\frac{۲}{۳}$ ہو تو ثابت کرو کہ جسم عین اُٹھنے کو ہوگا جبکہ پانی اس کے اوپر کے سرے کے مستوی تک پہنچ جائے۔

۱۔۔۔ معلوم وزن اور حجم کا ایک مخروط نیچے وار راس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ مخروط کی سطح جسکو مائع مس کرتا ہے کم سے کم ہوگی جبکہ اس کا زاویہ راس ۲ مس$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{۲}}$ ہو۔

۳۔۔۔ ایک مربع تختہ ایک مائع کے اندر جس کی کثافت اس کی کثافت کا چار گنا ہے رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے تیرنے کے چار مختلف محل ہو سکتے ہیں جبکہ اس کا صرف ایک معلوم کونہ مائع کی سطح کے نیچے ہو۔

۴۔۔۔ ایک جسم پانی میں تیر رہا ہے۔ ایک کھلے برتن کو اوندھا کر کے اس پر رکھا گیا ہے اور اسے نیچے دبایا گیا ہے۔ جسم کے محل میں کیا اثر وقوع پذیر ہوگا (۱) بلحاظ برتن کے اندرونی مائع کی سطح کے (۲) بلحاظ برتن کے بیرونی مائع کی سطح کے۔

۵۔۔۔ ایک کھلے نصف کروی خول کے کنارہ کے ایک نقطہ پر ایک وزندار ذرہ لگا دیا گیا ہے۔ خول پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ ذرہ پانی کی سطح کے عین اوپر ہے، اور کنارہ کی سطح پانی کی سطح کے ساتھ زاویہ ۴۵° بناتی ہے ثابت کرو کہ

نصف کرہ کا وزن : اُس پانی کا وزن جو اس میں سما سکتا ہے :: $۴\sqrt{۲} - ۵ : ۶\sqrt{۲}$

۶۔۔۔ ایک مخروط جس کا نصف زاویہ راس ۳۰° اور محور کا طول ف ہے انتصابی محور اور نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں تیر رہا ہے جسکی کثافت مخروط کی کثافت کا $\frac{۹}{۴}$ ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے قاعدہ کا محیط عین ڈوب جائیگا۔ اگر سیال، مثل ٹھوس کے مخروط کے محور پر منطبق ہونے والے انتصابی خط کے گرد $\frac{\sqrt{ج}}{\sqrt{ف}}$ کی زاوی رفتار سے گھومے۔

۷۔۔۔ ایک ٹھوس مخروط کو اس کے محور میں سے گزرنے والے مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یہ حصے ایک قبضہ کے ذریعہ راس پر جوڑ دئے گئے ہیں اور اس نظام کو پانی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ راس نیچے وار اور محور انتصابی ہو۔ اگر حصوں کی علیحدگی کے بغیر یہ نظام تیر رہا ہو تو ثابت کرو کہ ڈوبے ہوئے محور کا طول ف جب^{۲} عہ سے بڑا ہے جہاں مخروط کے محور کا طول ف اور اس کا زاویہ راس ۲ عہ ہے۔

۸۔۔۔ ایک مخروط کا راس ایک برتن کے پیندے پر جس میں پانی ہے ثابت کر دیا گیا ہے۔

یہ مخروطنا اسطور پر توازن میں ہے کہ اس کا مائل ضلع انتصابی اور اس کے قاعدہ کا زیر ترین نقطہ پانی کی سطح کو عین مس کرتا ہے۔ مخروط کی کثافت کا پانی کی کثافت سے مقابلہ کرو۔

۹ — منحنی $\frac{لا}{ا}$ = لوک $\frac{ب}{ب - لا}$ کے کچھ حصہ کو اس کے متقارب کے گرد گھما کر ایک پیالے کی منحنی سطح بنائی گئی ہے یہ پیالہ ایک مائع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور تنگ سرا نیچے وار ہے اور اس میں ایک زیادہ ترور نی مائع ڈالدیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر پیالے کو مناسب وزن کا بنایا جائے تو دونوں مائعوں کی سطحوں کے درمیان فاصلہ مستقل رہے گا۔

۱۰ — ایک اسطوانہ ایک مائع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ مس-۱ $\frac{۳}{۵}$ بناتا ہے اور اس کا اوپر وار سرا مائع کی سطح کے عین اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کا نصف قطر اسکے ارتفاع کا $\frac{۳}{۸}$ ہے۔

۱۱ — ایک ہی شئے سے بنے ہوئے دو ڈنڈوں کے سرے باندھ دیے گئے ہیں اور یہ ڈنڈے ایک مائع میں اس طرح تیر رہے ہیں کہ ان کا زاویہ مائع میں غرق ہے۔ ثابت کرو کہ اچھال کا منحنی مکافی ہے۔

(۶۵) ۱۲ — ایک مخروط نیچے وار راس کے ساتھ پانی کے ایک اسطوانی برتن میں تیر رہا ہے۔ اسکو بغیر جھٹکانے کے پانی کی سطح سے عین باہر نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ کام جو کیا گیا وہ ہے

$$و . (\frac{۳}{۴} ل - \frac{۱}{۲} لَ)$$

جہاں مخروط کا وزن و ہے اور توازن کی حالت میں مائع کی سطح سے نیچے راس کی گہرائی ل ہے اور لَ اسطوانہ کا وہ طول ہے جو توازن کی حالت میں مخروط کے ہٹائے ہوئے پانی سے بھرا جا سکتا ہے۔

۱۳ — ایک قائم مستدیر اسطوانہ اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک سرا غرق ہے۔ تیراؤ اور اچھال کی سطحیں معلوم کرو۔

۱۴ — متجانس مادے کی ایک دی ہوئی مقدار سے ایک گردشی مکافی نما بنایا گیا ہے جو نیچے دار راس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تیراؤ کے مستوی سے اس کے مرکز ثقل

کے فاصلہ کا مربع ذرّہ خاص کے تناسب معکوس میں ہوگا۔

۱۵ــــ چھوٹی موٹائی کا ایک کھوکھلا نصف کروی پیالہ ایسے ڈھکنے سے بند ہے جو اسی شے کا بنا ہوا ہے اور موٹائی وہی ہے جو پیالہ کی ہے۔ اگر پیالہ ایک مائع میں تیر رہا ہو اس طور پر کہ اس کا مرکز مائع کی سطح میں ہو تو ثابت کرو کہ ڈھکنے کا میلان انتصابی سمت کے ساتھ $\frac{۲۱}{۸}$ ہو گا۔

۱۶ــــ ایک قائم مستدیر مخروط کا مستوی قاعدہ ناقص کی شکل کا ہے۔ یہ مخروط اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا طویل ترین کمون افقی ہے۔ اگر زاویہ راس ۲ عہ ہو اور مستوی قاعدے اور قلیل ترین کمون کا درمیانی زاویہ بہ ہو تو ثابت کرو کہ

۵ مم بہ = ۵ مم ۴ عہ - قم ۴ عہ

۱۷ــــ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع قاعدے کے قطر کے مساوی ہو تو مخروط اپنے سے بڑی کثافت والے کسی مائع میں تیریگا اس طور پر کہ اس کا مائل ضلع افقی ہو۔

۱۸ــــ ایک مخروط کا ارتفاع ف اور زاویہ راس ۲ عہ ہے اس کا راس ایک مائع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں اس کا قاعدہ مائع کے عین باہر ہو گا اگر

ثہ گ۴ جم۳ عہ جم طہ = ثٓ ف۴ [جم (طہ - عہ) جم (طہ + عہ)]^(۵/۲)

جہاں ثہ اور ثٓ بالترتیب مائع کی اور مخروط کی کثافتیں ہیں۔ اور طہ مساوات

گ جم عہ = ف جم (طہ + عہ)

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۹ــــ ایک ذو اربعۃ السطوح (چار سطحی) پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک کونہ غرق ہے اس کونہ پر ملنے والے تینوں کنارے مساوی اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل ایک، یا دو، یا تین ہونگے، بوجب اس کے کہ چار سطحی کی کثافت کو پانی کی کثافت سے جو نسبت ہے وہ ۴ : ۲۷ سے بڑی ہو یا مساوی یا چھوٹی۔

۲۰ــــ ایک نصف کروی خول (نصف قطر ۲ ل) جس میں پانی ہے اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے $\sqrt{\frac{۳ج}{۷ل}}$ کی زاویی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ ایک کرہ (نصف قطر ل)

پانی پر ساکن ہے اس طور پر کہ اس کا زیریں ترین نقطہ خول کو مس کرتا ہے اور خول پر کوئی دباؤ نہیں ڈالتا۔ اگر آزاد سطح خول کی کور یا کنارے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ

کرہ کی کثافت : پانی کی کثافت :: ١٢٨ : ١٨٩

٢١ —— ایک متساوی الساقین مثلثی پتر ا ب ج (زاویہ ج قائمہ) ایک مائع میں جسکی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی ہے اور اس کا زاویہ ج پانی میں غرق ہے اگر ا ب انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ + طہ بنائے تو ثابت کرو کہ توازن کے دونوں محلوں میں جن میں ا ب افقی نہیں ہوتا طہ کی قیمت شکل ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

م جب²طہ جم²طہ = (جب طہ + جم طہ)٣

٢٢ —— ایک قائم مستدیر اسطوانہ میں جس کا محور انتصابی ہے مائع کی کچھ مقدار ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس میں مساوی قاعدہ کا قائم مخروط جس کا محور اسطوانہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے نیچے وار راس کے ساتھ آہستہ آہستہ غرق ہونے کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے اگر مخروط توازن میں ہو جبکہ وہ مائع میں عین غرق ہو تو ثابت کرو کہ مخروط کی کثافت اُس (٦٦
گہرائی پر مائع کی ابتدائی کثافت کے مساوی ہوگی جو مخروط کے محور کے $\frac{1}{12}$ طول کے مساوی ہے۔

٢٣ —— ایک ٹھوس مخروط جس کا ارتفاع ف، زاویہ راس ٢ عہ، کثافت ث ہے اپنے راس کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ اس کا راس ایک مائع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ ی گہرائی پر مائع کی کثافت مہ ی ہے۔ مخروط متوازن ہے اس طور پر کہ اسکا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے اور اس کا قاعدہ مائع کی سطح کے باہر ہے۔ ثابت کرو کہ

مہ گ٥ جم٣عہ جم طہ = ٥ ث ف٤ {جم (طہ + عہ) جم (طہ - عہ)}$^{\frac{5}{2}}$

٢٤ —— ایک کھوکھلا مکافی نما برتن جس میں ایک وزن دار کرہ پڑا ہوا ہے پانی میں تیر رہا ہے۔ اس کے راس پر ایک سوراخ ہونے کی وجہ سے برتن اور کرہ کی درمیانی فضا پانی سے بھری ہوئی ہے۔ اگر کرہ پر کا حاصل دباؤ اُس پانی کے نصف وزن کے مساوی ہو جو کرہ کے بھرنے کے لئے درکار ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ پانی کی سطح کے نیچے کرہ کے مرکز کی گہرائی $\frac{٤ ا^2}{٣ ج}$ ہے جہاں مکافی نما کا وتر خاص ٤ ا اور راس سے تماسی مستوی

کا فاصلہ ج ہے۔

۲۵ —— ایک قائم مخروط نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اگر توازن کے محل میں اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنا سکے تو ثابت کرو کہ

۵ جم عہ قتاطہ (جم^۲ طہ - جب^۲ عہ)^{۵/۲} = ۴ نا^۴ ۴√ ثہ/ث

جہاں عہ مخروط کا نصف زاویہ راس اور ثہ اس کی کثافت اور ث سیال کی اس گہرائی پر کثافت ہے جو مخروط کے مائل ضلع کے مساوی ہے۔

۲۶ —— ایک قائم الزاویہ مثلثی منشور ایک سیال میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا زاویہ قائمہ غرق ہے اور کنارے افقی ہیں۔ ثابت کرو کہ اچھال کے منحنی کی شکل ہے

ز جب^۲ طہ جم^۲ طہ = گ^۲

۲۷ —— لنگر چھلے کی شکل کی ایک جان پیٹی ہے جس کی تکوین ایک دائرہ سے ہوئی ہے جس کا نصف قطر و ہے۔ یہ جان پیٹی پانی میں تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کے خط استوا میں سے گزرنے والی مستوی سطح افقی ہے۔ ثابت کرو کہ غرق شدہ گہرائی ی مساواتوں

ی = ا (ا - جم ب)

۲ ٹ س = (۲ ب - جب ۲ ب)

سے حاصل ہوگی جہاں س جان پیٹی کے مادے کی کثافت نوعی ہے۔

۲۸ —— ایک مکافی پتر ایک دوہرے معین سے محدود ہے جو محور پر عمود وار ہے اور نیچے وار راس کے ساتھ ایک مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا ماسکہ مائع کی سطح میں ہے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ مس^{-۱} ۱/۲ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی کثافت اور پترے کی کثافت میں ۲۱۶ : ۱۱^۳ کی نسبت ہے اور محدود کرنے والے معین کا طول وتر خاص کا تین گنا ہے۔

۲۹ —— ایک ٹھوس مخروط جس کا ارتفاع ف، کثافت ثہ اور زاویہ راس ۲ عہ ہے اپنے راس کے گرد آزادانہ گردش کر سکتا ہے۔ اس کا راس مائع کی سطح کے اوپر بلندی د پر ثابت

کردیا گیا ہے۔ مائع کی کثافت ث ہے۔ اگر مخروط اس طور پر تیر رہا ہو کہ اس کا قاعدہ پوری طرح غرق ہو اور اس کا محور انتصابی سمت کے زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}^{4}(\text{ث} - \text{ثہ})\left\{\text{جم}(\text{طہ} + \text{عہ})\,\text{جم}(\text{طہ} - \text{عہ})\right\}^{\frac{5}{2}} = \text{د}^{4}\,\text{ث}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{3}\,\text{عہ}$$

۳۰ ـــــ لاانتہا چھوٹا برف کا ٹکڑا جس کی شکل قائم مستدیر اسطوانہ خیال کیجا سکتی ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے۔ جو حصہ غرق ہے اُس پر برف کے دوسرے ذرات آکر جمتے جاتے ہیں اس طور پر کہ اس کی اسطوانی شکل برقرار رہتی ہے اور اس کے محور اور نصف قطر میں مساوی وقت میں مساوی اضافہ ہوتا ہے۔ غیر غرق شدہ حصہ کی انتہائی شکل معلوم کرو۔ اگر برف کی کثافت اضافی ۹۶ء ہو تو ثابت کرو کہ اس کی سطح منحنی

$$\text{ما}\,(\text{۹ لا} - \text{ما})^{25} = \text{د}^{26}$$

کی گردش سے حاصل ہوگی۔

(۴۷) ۳۱ ـــــ ایک مساوی الاضلاع مثلث ایک مائع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت مثلث کی کثافت کا چار گنا ہے۔ اچھال کی پوری سطح دریافت کرو۔ اور ثابت کرو کہ اُن نقاط پر جہاں انحنا غیر مسلسل ہے منحنی کے مماس زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\,\frac{\text{۱۲ ما}\sqrt{3}}{107}$$

پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

۳۲ ـــــ ایک ٹھوس جو مستویوں لا = ± ا، ما = ± ب، ی = ۰، ی = ج سے محدود ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ قاعدہ ی = ۰ پوری طرح غرق ہے۔ ثابت کرو کہ ایسے ہٹاؤں کے لئے جن میں غرق شدہ حجم ح مستقل رہے اور قاعدہ پوری طرح پانی کے اندر اور اس کے مقابل کا رخ پوری طرح پانی کے باہر رہے اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = \frac{\text{۸ ا ب ی}}{\text{۳ ح}} - \frac{1}{3}$$

۴۳ــــ کسی عمودی تراش کا ایک اسطوانی ظرف اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے محور کا ۲ ج طول غرق ہوتا ہے جب کہ محور انتصابی ہو۔ ثابت کرو کہ اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{لا^2}{ا'^2} + \frac{ما^2}{ب'^2} = \frac{ی}{ج}$$

جہاں انتصابی حالت میں محور کا جو حصہ غرق ہوتا ہے اس کا وسطی نقطہ مبدا ہے، محور ی انتصاباً اوپر دار ہے اور محاور لا ، ما عمودی حالت میں تیراؤ کی مستوی سطح کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے جمود کے معیاروں کے صدری محوروں کے متوازی ہیں اور تیراؤ کی سطح کے ان محوروں کے لیے گردش کے نیم قطر ب'، ا' ہیں۔

(۸۲)

باب پنجم

تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت

۶۵۔ اگر ایک تیرنے والے جسم کے محل میں کسی سمت میں خفیف سا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو عام طور پر جسم یا تو اپنے اصلی محل پر واپس ہونیکی طرف مائل ہوگا یا اس محل سے اور دور ہٹنے کا رجحان رکھیگا۔ ہٹاؤ کی اس خاص سمت کے لئے صورت اول میں توازن کو قائم اور صورت دوم میں غیر قائم کہتے ہیں۔

پہلے چھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ اگر جسم متجانس سیال میں جزءً غرق شدہ ہو یا ایک غیر متجانس سیال میں جس کی کثافت گہرائی کے ساتھ بڑھتی ہے جزءً یا کلاً غرق شدہ تیر رہا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ اس کو دباکر نیچے اُتار دینے سے ہٹائے ہوئے سیال کا دباؤ بڑھجائیگا اور برخلاف اس کے اسکو اوپر اُٹھانے سے یہ دباؤ گھٹ جائیگا۔ اس لئے ہر صورت میں سیالی دباؤ کا میلان جسم کو اس کے سکون کے محل کی طرف لیجانے کا ہوگا۔ اور اسلئے انتصابی ہٹاؤ کا لحاظ کرتے ہوئے توازن قائم ہے۔

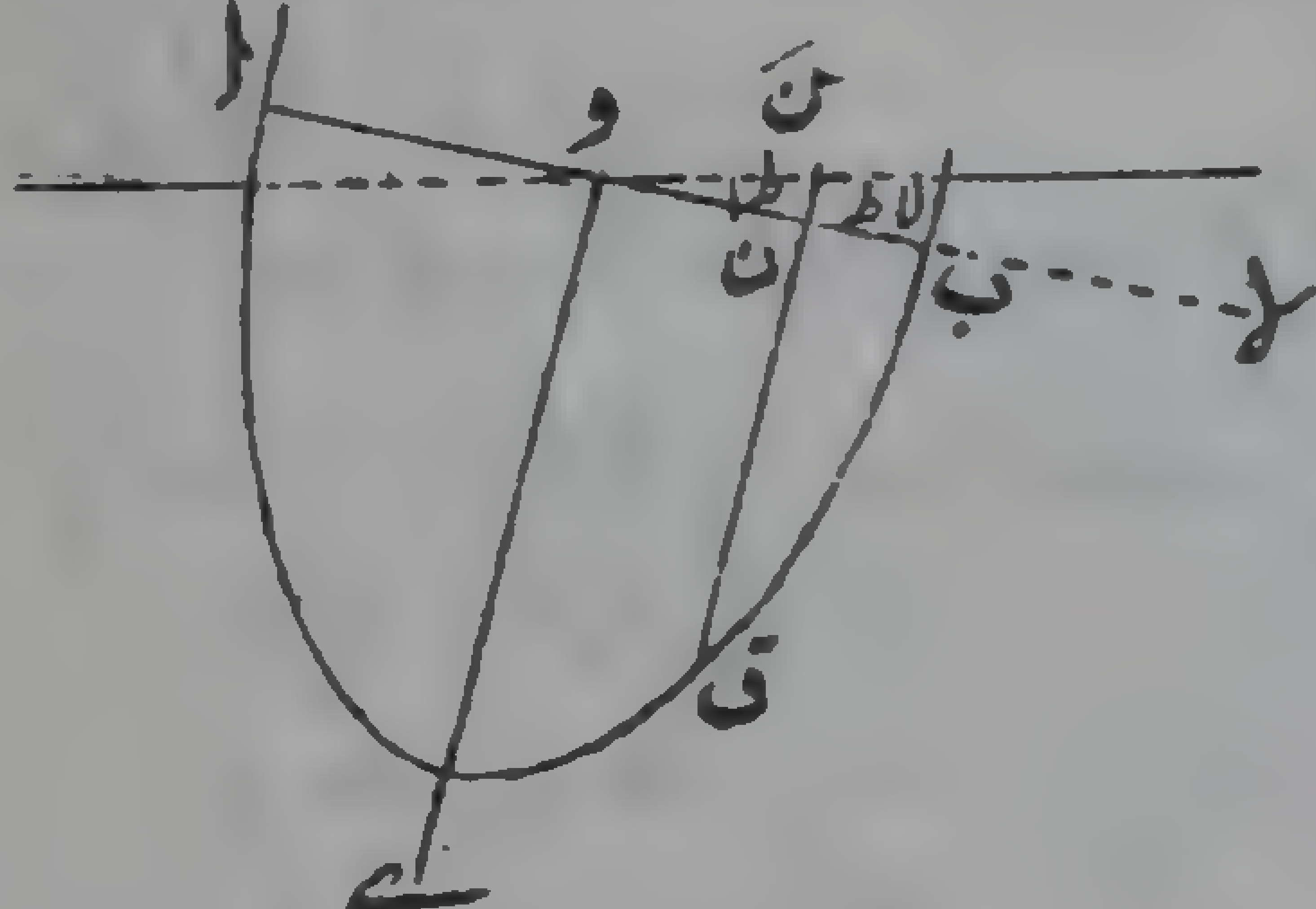
لیکن یہ یاد رہے کہ یہ بات صرف ٹھوس اجسام کے لئے ثابت کیگئی ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے دباؤ میں جو اضافہ ہوتا ہے اگر اس سے تیرنے والے جسم کے کسی حصہ میں پچک پیدا ہو جائے تو توازن کا قائم ہونا ضروری نہیں بلکہ فی الحقیقت یہ غیر قائم ہو سکتا ہے۔

کسی اختیاری ہٹاؤ سے عام طور پر جسم کے محل میں انتصابی اور زاوئی دونوں تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ لیکن اگر ہٹاؤ چھوٹا ہو جیسا ہم نے

فرض کیا ہے تو جسم کے محل میں ان تبدیلیوں کے اثرات پر الگ الگ غور کیا جا سکتا ہے۔
اب ہم ایک چھوٹے زاوئی ہٹاؤ کے اثر پر یہ فرض کر کے غور کریں گے کہ ہٹائے ہوئے سیال کا وزن نہیں بدلتا۔ اور اس لئے سیالی دباؤ جسم کی کمیت کے مرکز کو اٹھانے یا بٹھانے میں کوئی میلان نہیں رکھتا۔

۶۶ — ایک ٹھوس جسم سکون کی حالت میں ایک متجانس مائع میں تیر رہا ہے اسکو ایک دیے ہوئے انتصابی مستوی میں، ایک چھوٹے زاویے میں سے گھما دیا گیا ہے۔ یہ معلوم کرنا مطلوب ہے کہ سیالی دباؤ جسم کو اپنے ابتدائی محل میں لیجانے کا میلان رکھے گا یا نہیں۔

فرض کرو کہ محور وما کے گرد جو تیراؤ کے مستوی اوب میں واقع ہے جسم کو چھوٹے زاویہ طہ میں سے گھمایا گیا ہے، وما کاغذ کے مستوی پر علی القوائم ہے ابتدائی محل میں و لا تیراؤ کے مستوی میں اور دی انتصاباً واقع ہے۔ فرض کرو کہ جیسے جسم گھمایا جاتا ہے یہ محور اس کے ساتھ ہی جاتے ہیں۔



اگر تیراؤ کے مستوی پر رقبہ کا عنصر فرلا فرما سے تعبیر ہو تو عنصری ستون ن ق کا حجم ی فرلا فرما ہوگا جہاں ی، طول ن ق کو تعبیر کرتا ہے، ہٹائے ہوئے محل میں متناظر ستون نَ ق کا طول ی + لا طہ اور اسکا حجم (ی + لا طہ) فرلا فرما ہے۔
پس ہٹائے ہوئے سیال کا حجم ح دونوں صورتوں میں وہی ہوگا اگر

$$\iint (ی + لا\,طہ)\ فرلا\,فرما = ح = \iint ی\ فرلا\,فرما$$

جہاں تکملے جسم کی اُس تراش پر لئے گئے ہیں جو ابتدائی محل میں تیراؤ کی سطح سے قطع ہوتی ہے۔

یہ اِس جملہ میں تحویل ہو جاتا ہے ∫∫لا فرلا فرما = ۰ جس کے یہ معنی ہیں

کہ سطحی تراشس کا مرکز ثقل د ما پر واقع ہونا چاہیئے جیسا کہ دفعہ ۲۵ میں ثابت کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ یہ شرط پوری ہوتی ہے - ابتدائی محل میں مرکز ثقل ث اور اچھال کا مرکز ھ ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہوتے ہیں اور اچھال کے مرکز کے محددوں کو ہم (لآ، مآ، یٓ) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ ث کے لئے (لآ، مآ) وہی ہیں - ہٹائے ہوئے محل میں اچھال کا مرکز مقام ھَ پر چلا جاتا ہے اور فرض کرو کہ ھَ کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے (لآَ، مآَ، یٓ َ) ہیں۔

اب ح لآ = ∫∫لا ی فرلا فرما، ح مآ = ∫∫ما ی فرلا فرما،

ح یٓ = ∫∫ ½ ی² فرلا فرما

جہاں عنصری ستون ن ق کے حجم کو ی فرلا فرما لیکر اس کے مرکز ثقل کو اسکے طول کے وسطی نقطہ پر لیا گیا ہے اور یہ تکملے اس بنا پر لکھے گئے ہیں۔

ہٹائے ہوئے محل میں متناظر عنصری ستون نَ ق ہو گا جس کا طول ی + لاطہ ہے۔ اس کا مرکز ثقل نَ سے ½ (ی + لاطہ) فاصلہ پر واقع ہے اور اس لئے ن سے ½ (ی - لاطہ) فاصلہ پر۔ اسلئے

ح لآَ = ∫∫لا (ی + لاطہ) فرلا فرما، ح مآَ = ∫∫ما (ی + لاطہ) فرلا فرما،

ح یٓ َ = ∫∫ ½ (ی - لاطہ)(ی + لاطہ) فرلا فرما

ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے زاویہ طہ کی پہلی قوت تک یٓ َ = یٓ اور اس لئے اچھال کی سطح کا مماسی مستوی تیراؤ کے مستوی کے متوازی ہے جیسا کہ دفعہ ۴۵

= ھ ھَ = لاَ - لاٰ

$$= \frac{\text{ط / / لا}^2 \text{ فر لا فر ما}}{\text{ح}}$$

اسلئے ھ مر = $\frac{\text{ا ر}^2}{\text{ح}}$ جہاں ا ر^2 گردش کے محور کے گرد جسم کی اوس تراش کا جمود کا معیار ہے جو ہٹاؤ کے مستوی سے قطع ہوتی ہے۔

اس لئے جسم کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجانے کا میلان رکھنے والا جفت یعنی استردادی جفت ہے

ج ث، ح (ھ مر - ھ ث) = ج ث (ا ر^2 - ح × ھ ث)

۶۷- اب چونکہ جسم کی سطحی تراش کے مرکز ثقل میں سے گذرنے والے صدری محور دو ہوتے ہیں جن کے جواب میں جمود کے معیار مج، مج ہونگے، اس لئے ان میں سے ہر محور کے گرد کا گھماؤ ہٹاؤ کے مستوی میں ایک جفت پیدا کرے گا جو جسم کو متوازن کرنے کا میلان رکھے گا اگر ھ ث < $\frac{\text{مج}}{\text{ح}}$ اور نیز < $\frac{\text{مج}}{\text{ح}}$

پس یہ شرطیں توازن کی قائمیت کے لئے ضروری ہیں۔

۶۸- کام جو ہٹاؤ پیدا کرنے میں کیا جاتا ہے۔ جب جسم کو ایک چھوٹے زاویہ ط میں، سطحی تراش کے مرکز ثقل میں سے گذرنے والے ایک صدری محور گرد پھرایا جائے تو جسم پر عمل کرنے والا جفت ہوگا

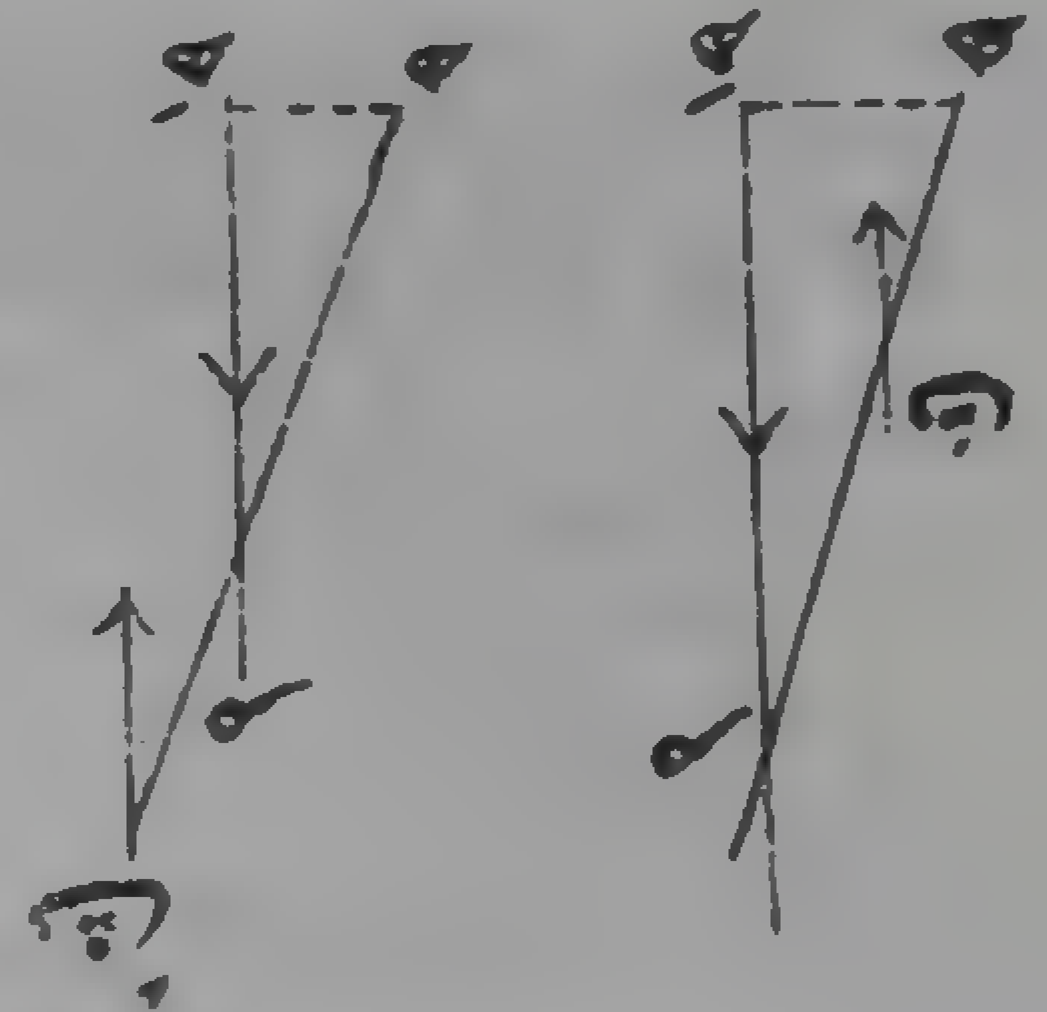
ج ث (ا ر^2 - ح × ھ ث) ط

اس لئے ط میں ایک چھوٹی مقدار فر ط کا اضافہ پیدا کرنے کے لئے بیرونی عامل جو کام کرے گا وہ = ج ث (ا ر^2 - ح × ھ ث) ط فر ط

تکمل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ زاوئی ہٹاؤ ط کے پیدا کرنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ

= $\frac{1}{2}$ ج ث (ا ر^2 - ح × ھ ث) ط^2

[illegible]



[illegible]

$$\iint [illegible] = 0$$

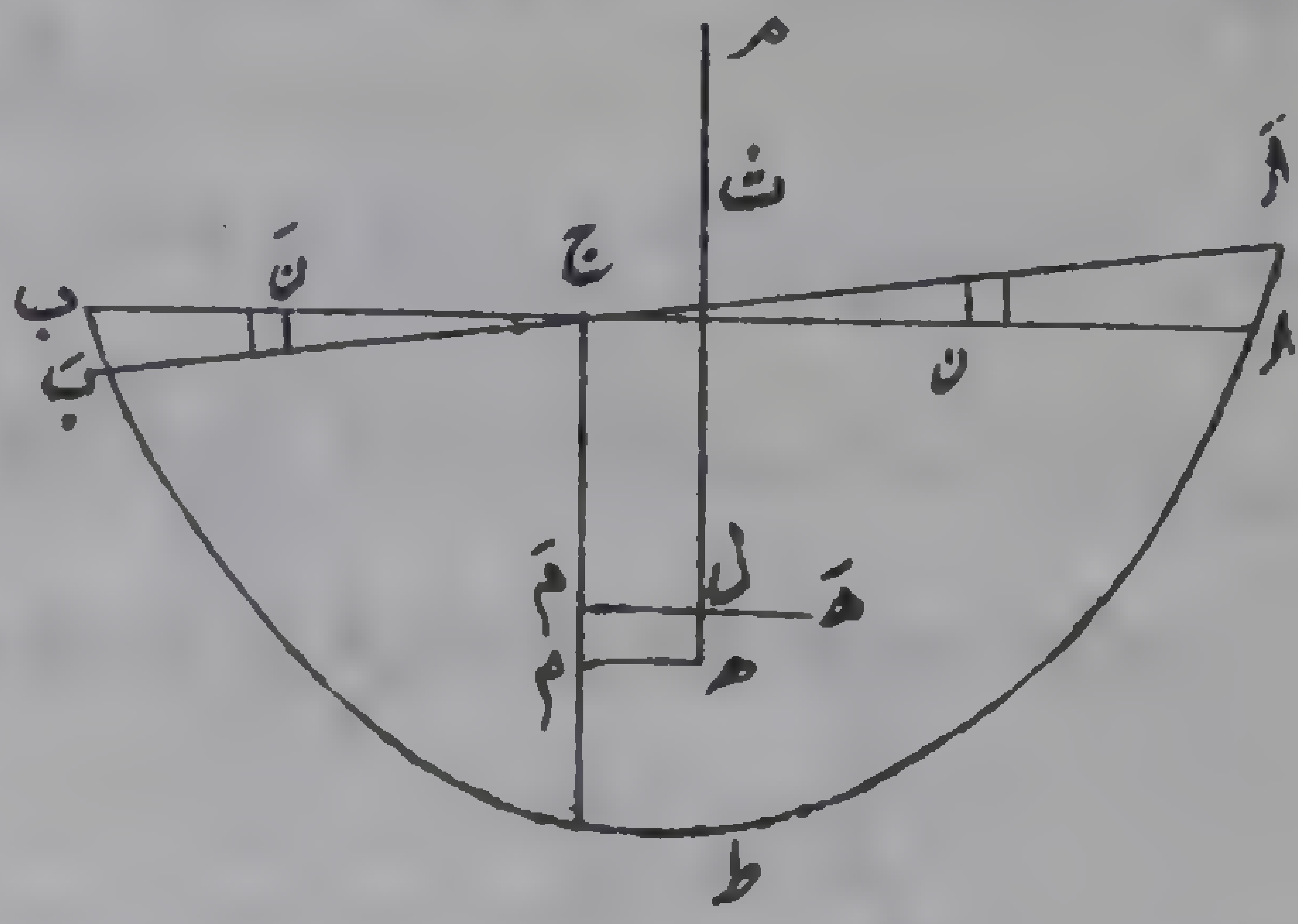
$$\iint [illegible] = \iint [illegible]$$

[illegible] $1 = 1$ [illegible]

[illegible]

مماس ہوگی۔

۱۷۔۔ مسئلہ گزشتہ کی مدد سے ہم نقطہ ھ کے اوپر لیس مرکز کا ارتفاع معلوم کرسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ جسم ا ط ب کا مرکز ہندسی ھ اور اَ ط بَ کا ھَ ہے۔ اَ ج ا چھوٹا زاویہ ط ہے۔



اگر تیراؤ کے مستوی کے رقبہ کا عنصر عہ ہو اور ج میں سے گذرنے والے انتصابی خط پر عمود ھَ مَ، ھ م ہوں تو

ھَ مَ × ح ۔ ھ م × ح = ∑ (ج ن × ط × عہ × ج ن)

+ ∑ (ج نَ × ط × عہ × ج نَ)

یا ھَ ل × ح = ط ا ر٢

لیکن اگر ھ پر کا مرکز انحنا م ہو تو

ھَ ل = ھَ م × ط = ھ م × ط

∴ ح × ھ م = ا ر٢

پس چھوٹے ہٹاؤ ط کے لئے استروادی معیار

= ج ث ح × ث م × ط = ج ث ط (ا ر٢ ۔ ح × ھ ث)

۶۹ — قائمیت کے شرائط کا کافی ہونا۔ تیراؤ کے مستوی میں، کسی ایسے محور کے گرد جو پانی تراش یا فاصل آب کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اگر چھوٹا گھماؤ یا گردش ط لی جائے تو یہ گردش دو گردشوں ط۱، ط۲ کا مرکب خیال کی جا سکتی ہے جنھیں بالترتیب فاصل آب کے عددی محوروں کے گرد لیا جائے۔ ان میں سے ہر گردش علیحدہ طور پر ایک استرداد ی جفت پیدا کرتی ہے اور اس لئے ہٹاؤ کے پیدا کرنے میں بیرونی عامل کا کل کام یا توانائی بالقوہ میں اضافہ ہوگا[۱]

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ج ث}\,(\text{ج}_1 - \text{ح} \times \text{ھ ث})\,\text{ط}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث}\,(\text{ج}_2 - \text{ح} \times \text{ھ ث})\,\text{ط}_2^2$$

جس سے یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ شرائط ھ ث $< \frac{\text{ج}_1}{\text{ح}}$ اور نیز $< \frac{\text{ج}_2}{\text{ح}}$ ایسے ہٹاؤں کے لئے قائمیت کی کافی شرطیں ہیں جن سے ہٹائے ہوئے مائع کے حجم میں تغیر واقع نہیں ہوتا۔

۷۰ — قائمیت کے مسئلہ پر بحث کسی قدر مختلف پیرایہ میں ہو سکتی ہے۔ مرکز مابعد یا پس مرکز کی یہ تعریف کہ وہ خط ھ ث اور ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کا نقطہ تقاطع ہے ہمیں مسئلہ ذیل کی طرف رہبری کرتی ہے۔

پس مرکز اچھال کے منحنی کے اس نقطہ پر کا مرکز انحنا ہے جہاں پر ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط اس منحنی سے ملتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ نقطہ م منحنی کے متصلہ عادوں کا نقطہ تقاطع ہے۔

پس اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی ہٹاؤ کے لئے بشرطیکہ ہٹایا ہوا حجم وہی رہے، سیالی دباؤ کی سمت ہمیشہ اچھال کے منحنی کے بر بیچہ کا انتصابی

---

[۱] اس قسم کے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کے جملہ میں ط۱ ط۲ والی رقم شامل نہیں ہوتی۔ اس کو دفعہ آئندہ ۹، کی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۷۲ — گزشتہ دفعہ میں یہ بات فرض کر لی گئی ہے کہ سیالی دباؤ کے عمل کا انتصابی خط ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد ھ ث کو قطع کرتا ہے۔ یہ صرف اس وقت درست ہوگا جبکہ ہٹاؤ کی سطح مستوی نقطہ ھ پر اچھال کی سطح کی صدری تراشش ہو۔ جب یہ صورت نہ ہو تو ہٹاؤ کے انتصابی مستوی پر خط عمل کا ظل، ھ ث کو نقطہ م پر قطع کرے گا جو سطح کی عمادی تراشش کا مرکز انحنا ہوگا۔

اس لئے نقطہ ھ پر اچھال کی سطح کی کسی عمادی تراش کے انحنا کا نصف قطر $\frac{ا ر^۲}{ح}$ ہوگا اور اگر تیراؤ کے مستوی کے جمود کے صدری معیار اس کے مرکز ہندسی پر مج، مجَ ہوں تو اچھال کی سطح کے انحنا کے صدری نصف قطر ھ پر

$$\frac{مج}{ح} \text{ اور } \frac{مجَ}{ح}$$

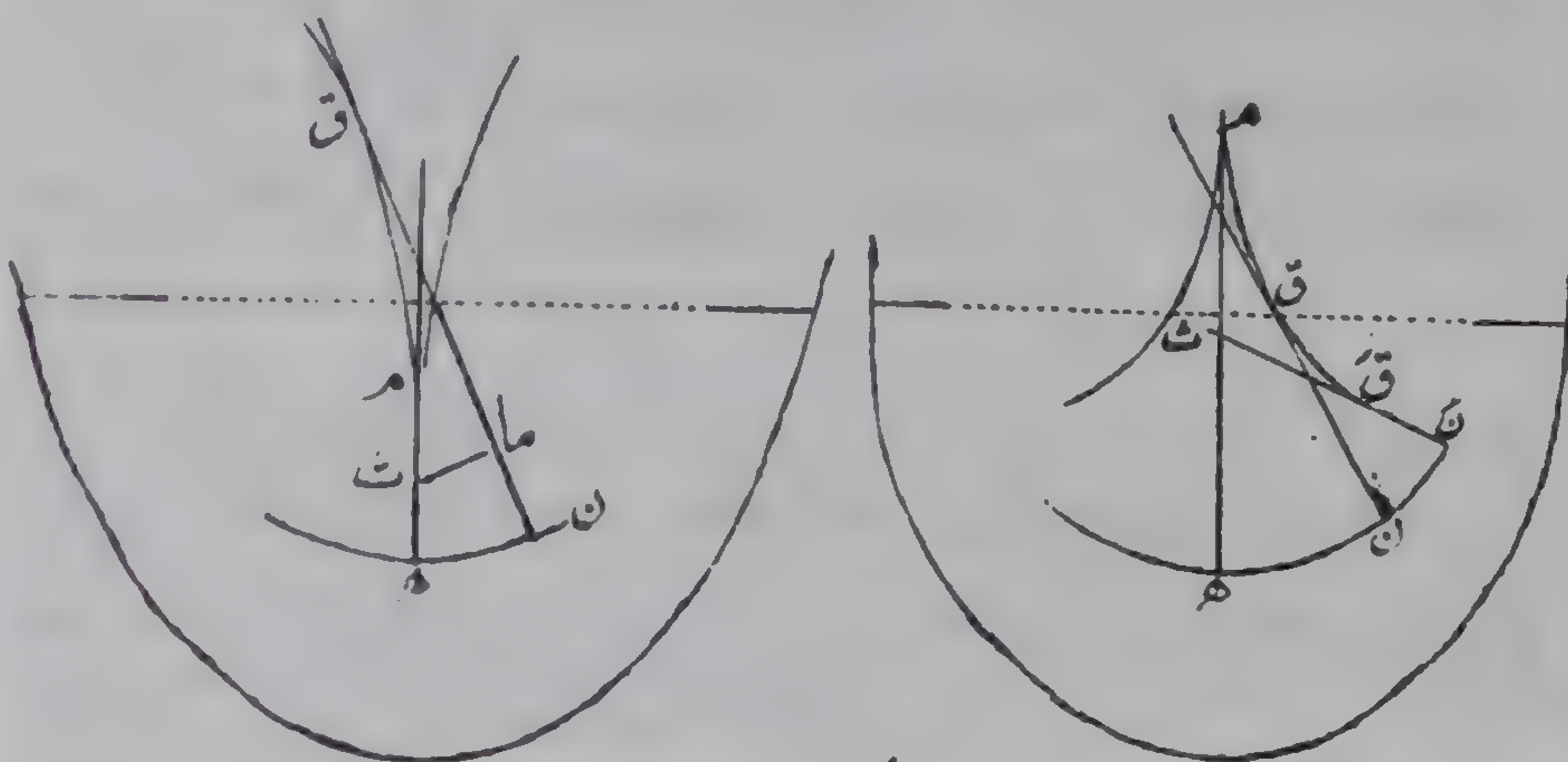
ہونگے اور اس کی صدری تراشیں تیراؤ کے مستوی کے صدری محوروں کے متوازی ہونگی۔

۷۳ — قدرتاً ایک نہایت اہم صورت پیش ہوتی ہے۔ یعنی ایک جہاز کے توازن کی قائیت کا سوال جبکہ لڑھکنے (Rolling) کی وجہ سے اس کے محل میں ہٹاؤ پیدا ہو۔

عام طور پر جہاز کے لئے اُچھلنے (Tossing) کے بغیر لڑھکنا ممکن نہیں ہے کیونکہ جہاز کے دونوں سرے غیر متشاکل ہوتے ہیں۔ لیکن ایک بہت لمبے جہاز کی صورت میں جیسے کہ عام طور پر بحراوقیانوس (Atlantic Ocean) میں چلنے والے جہاز ہوتے ہیں یہ مان لیا جا سکتا ہے کہ جہاز ایک مستوی سے جو اس کے طول پر عمود دار ہو متشاکلاً تقسیم ہو سکتا ہے۔ اس صورت میں جہاز میں تشاکل کے دو انتصابی مستوی ہونگے۔ اور اس لئے انتصابی خط ھ ث تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرے گا۔

نیز خط ھ ث اچھال کے منحنی کو متشاکلاً تقسیم کرتا ہے اور نقطہ ھ اعظم

یا قل انحنا کا نقطہ ہے۔ان میں سے پہلی صورت میں بر ہیجہ کا قرن نیچے کی طرف



نکیلا ہے اور دوسری صورت میں اوپر کی طرف نکیلا ہے۔

شکلوں سے ہٹاؤ کے اثرات فوراً ظاہر ہو جاتے ہیں۔

پہلی صورت میں تقویمی معیار اثر (Righting moment) جو ہٹاؤ کے دئے ہوئے زاویہ کے لئے قائمیت کا سکونیاتی ناپ ہے ث ما کے متناسب ہے جو نقطہ ث سے ماس ن ق پر عمود ہے اور ہٹاؤ کے زاویہ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے۔

دوسری صورت میں تقویمی معیار اعظم قیمت اختیار کرتا ہے اور پھر گھٹتا ہے اور اُس محل پر معدوم ہو جاتا ہے جو ماس ث قَ نَ سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ توازن کا ایک محل ہے لیکن ایسے توازن کا جو غیر قائم ہے کیونکہ عام حیلی قانون کے مطابق قائم اور غیر قائم توازن کے محل باری باری سے یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں۔

اگر ث کو مبداء مان کر اچھال کے منحنی کی مساوات ح = ف (ن) حاصل کی جائے تو

$$\text{ث ما} = \frac{\text{فر ع}}{\text{فر نہ}}$$

اور تقویمی معیار ہوگا $\text{و} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر نہ}}$

جہاں و جہاز کا وزن ہے۔

عام طور پر معمولی ہٹاؤں کے لئے اچھال کا منحنی تقریباً زائد کی ایک قوس ہوگا۔ دیوار پہلو جہاز کی صورت میں یعنی ایسے جہاز کی صورت میں جسکے پہلو خط آب کے نزدیک انتصابی ہوں اچھال کا منحنی مکانی کی قوس ہوتا ہے۔

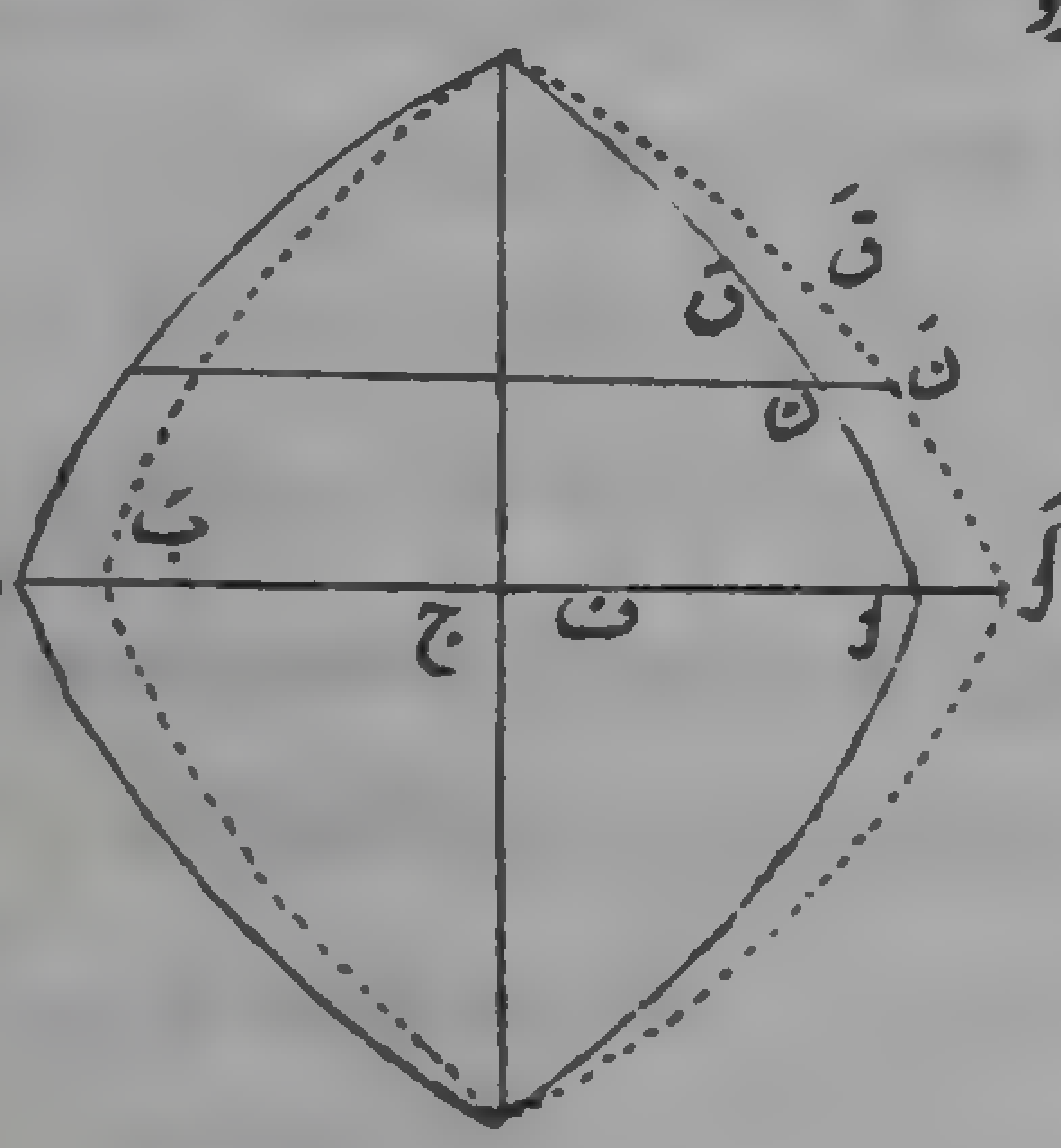
جہاز کی صورت میں اگر لڑھکنے کے لیے مرکز مابعد ھ ر ہو تو حاصل ضرب و × ث ھ ر کو جہاز کا استحکام (Stiffness) کہتے ہیں۔

۱۰۷ — ڈیوپن کا مسئلہ۔ سیدھا تیرنے والے جہاز کی صورت میں تیراؤ کی سطح کی عرضی تراش کے انحنا کا نصف قطر ہوگا

ر = (ک ما مس ع فرس) / ا

جہاں فاصل آب کے گھیرے کا عنصر فرس ہے، اس کا رقبہ ا ہے اور جہاز کے پہلو کا انتصابی سمت کے ساتھ میلان ع ہے۔ اور محاور لا اور ما جہاز کی اس تراش کے طولی اور عرضی محور ہیں جو تیراؤ کے مستوی سے قطع ہوتی ہے اور یہ محور اس مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرتے ہیں۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو



کہ تیراؤ کی سطح کی عرضی تراش پر ج، جَ دو متصل نقطے ہیں اور جَ کا مماسی مستوی فاصل آب ا ن ق ب کے ساتھ چھوٹا زاویہ ط ہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ اس مماسی مستوی سے جہاز کی جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کا ظل فاصل آب پر اَ نَ قَ بَ ہے، اس طرح جَ کا ظل ف رقبہ اَ نَ قَ بَ کا مرکز ہندسی ہے۔ فرض کرو کہ متناظر عنصر ن ق، نَ قَ ہیں اور ن ق = فرس تو (۵۰)

$$\text{رقبہ ن ق نَ قَ} = \text{ما ط مس عہ فرس}$$

$$\therefore \text{ج ف} \times (\text{ل}) = \text{را}^2 \text{ط مس عہ فرس}$$

اور چونکہ ج جَ = ر ط اور انتہا میں ج ف = ج جَ اس لئے

$$\text{ر ل} = \text{را}^2 \text{ط مس عہ فرس}$$

اس جملہ کو سب سے پہلے سی ڈیوپن (C. Dupin) نے اپنے ایک مقالہ میں سائینس کی اکاڈیمی (Academie der sciences) کو ۱۸۱۶ء میں پیش کیا۔ طولی تراشش کے انحنا کے نصف قطر (ر ا) کے لئے بھی ایک متناظر جملہ صریحاً موجود ہے۔

۷۵ — لیکلرٹ کا مسئلہ۔ اگر عرضی اور طولی ہٹاوں کے لئے پس مرکزی بلندیوں کو یعنی اچھال کی سطح کی عرضی اور طولی تراشوں کے انحنا کے نصف قطروں کو ر اور را سے تعبیر کیا جائے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ر} = \frac{\text{ج}}{\text{ح}} \quad \text{اور} \quad \text{را} = \frac{\text{جا}}{\text{ح}}$$

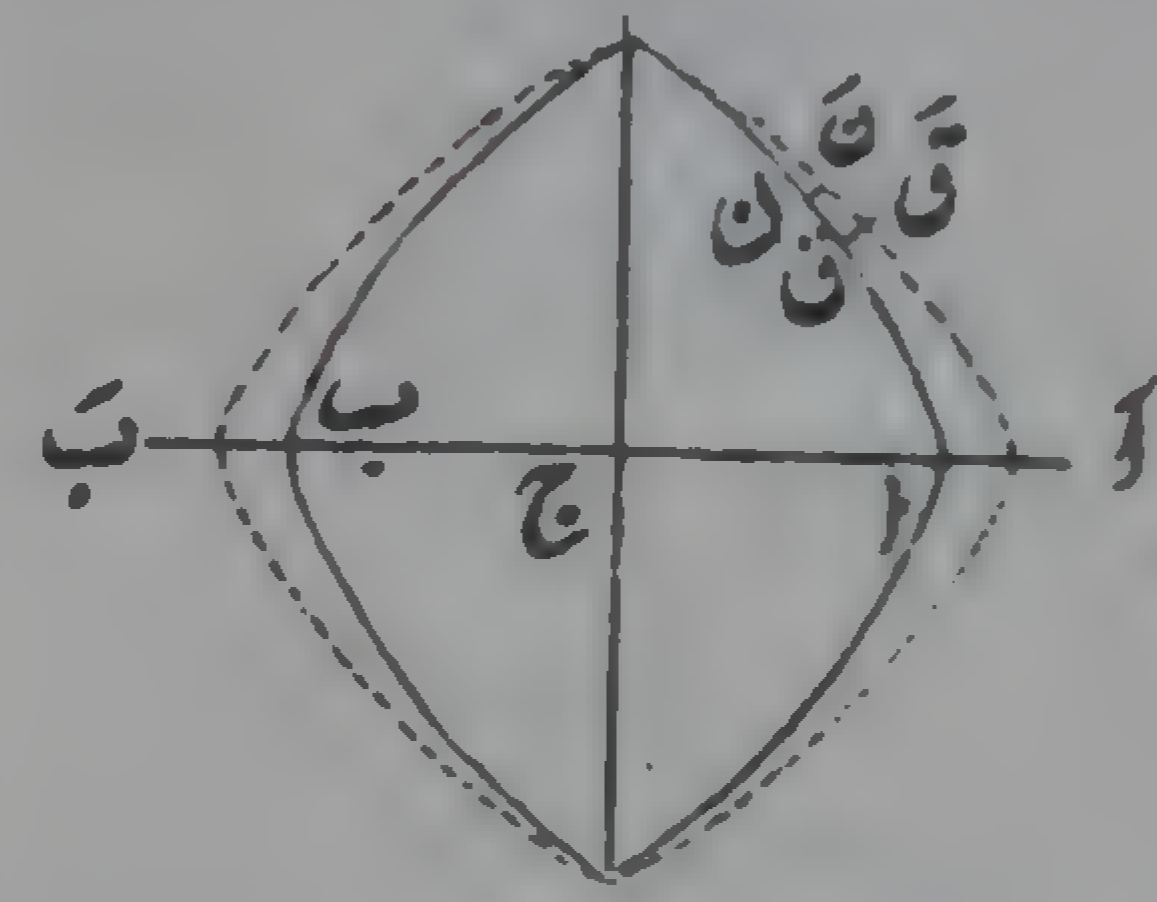
جہاں ج اور جا فاصل آب کے جمود کے صدری میعار ہیں۔ لیکلرٹ نے ان مقداروں میں حسب ذیل روابط قائم کئے

$$\text{ر}_1 = \frac{\text{فرج}}{\text{فرح}} = \text{ر} + \frac{\text{ح فرر}}{\text{فرح}} \;,\quad \text{را}_1 = \frac{\text{فرجا}}{\text{فرح}} = \text{را} + \text{ح} \frac{\text{فررا}}{\text{فرح}}$$

لیکلرٹ کے اس مضمون کا ترجمہ مسٹر میری فیلڈ (Merrifield) نے ۱۸۶۷ء کے The proceedings of the Institute of Naval Architects) میں اور مارچ ۱۸۶۷ء کے (Messenger of Mathematics) میں دیا ہے جو دو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں سے پہلا حسب ذیل ہے۔ تاریخی دلچسپی کی خاطر اسکو یہاں بیان کیا جاتا ہے آیندہ دفعہ ۸۰ میں اس کا زیادہ باضابطہ ثبوت دیا جائیگا۔

فاصل آب کے متوازی اور اس سے فزی فاصلہ پر تراش لینے سے

$$\text{فزح} = \text{ا}\ \text{فزی}$$



فرض کرو کہ اَقَ نَ بَ فاصل آب پر اس نئی تراشش کا ظل ہے۔ تو فزمج، اَقَ نَ بَ اور اق ن ب کے درمیانی رقبہ کے جمود کا معیار ہے۔

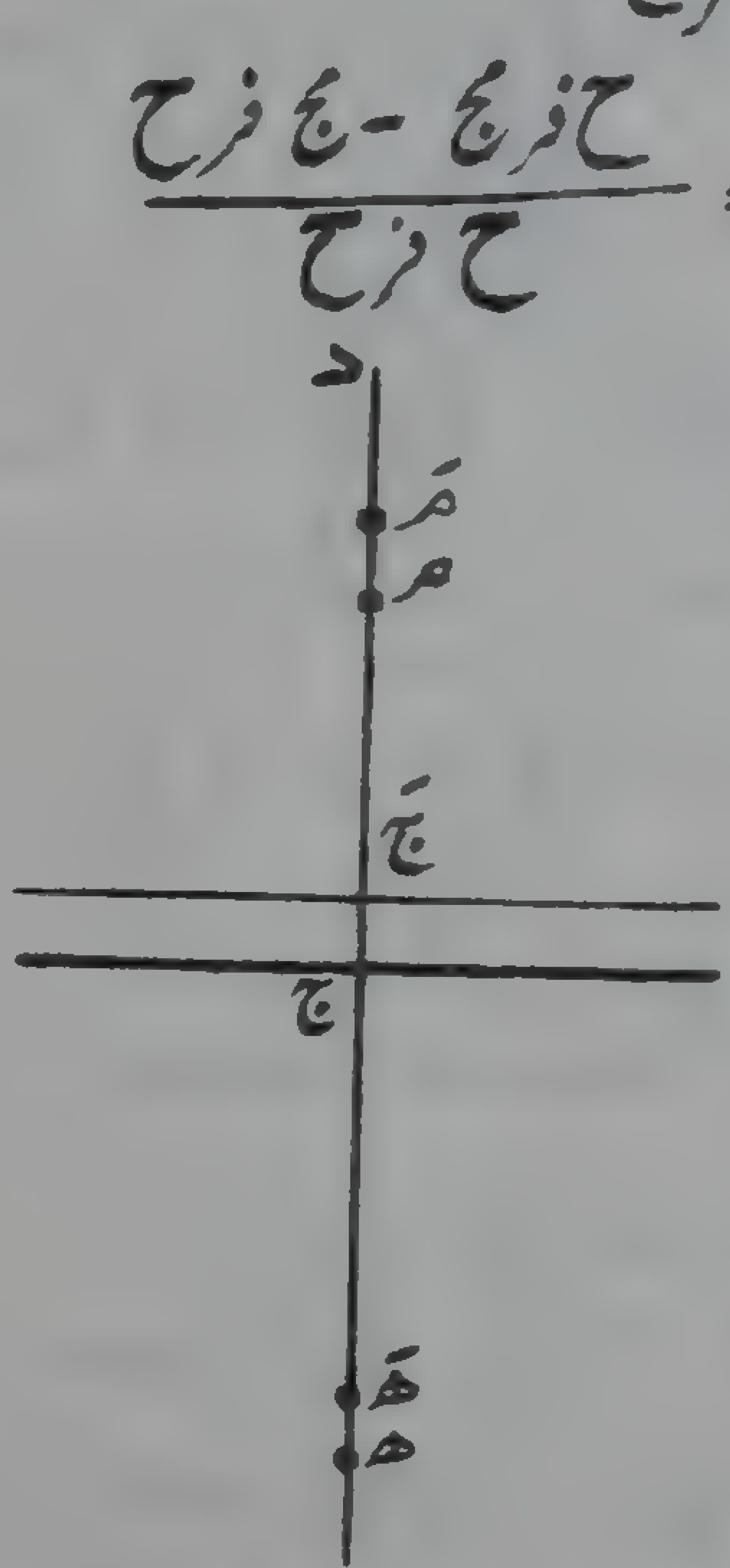
$$\therefore\ \text{فزمج} = \sum \text{ما}\ \text{فزی} \times \text{مس ء فزس}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{فزمج}}{\text{فزی}} = \int \text{ما}\ \text{مس ء فزس}$$

$$\text{پس}\quad \text{ر}' = \frac{1}{\text{ا}}\ \frac{\text{فزمج}}{\text{فزی}} = \frac{\text{فزمج}}{\text{فزح}} \qquad (۷۶)$$

$$\therefore\ \text{ر}' - \text{ر} = \frac{\text{فزمج}}{\text{فزح}} - \frac{\text{مج}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح فزمج} - \text{مج فزح}}{\text{ح فزح}}$$

$$\text{یا}\quad \text{ر}' = \text{ر} + \frac{\text{ح فزر}}{\text{فزح}}$$



۷۷ — بار میں اضافہ جہاز کے بار میں اگر اضافہ کیا جائے تو اُس کا اثر مرکز مابعد کے محل پر۔

یہ مان کر کہ جہاز میں تشاکل کے دو انقلابی مستوی ہیں فرض کرو کہ تیراؤ کے مستوی کا مرکز ہندسی ج ہے ان میں سے ایک مستوی میں قائمیت پر غور کرو۔

بار میں خفیف اضافہ کی وجہ سے فرض کرو کہ ج کا نیا مقام جَ ہے اور مزید ہٹاؤ مع ح سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب اگر ھ اور م کے نئے محل ھَ اور مَ ہوں تو

م مَ = ھَ مَ - ھ م + ھ ھَ

= مف ر + ھ ھَ

لیکن ج ھَ × مف ح = ح × ھ ھَ

∴ م مَ = مف ر + ج ھ مف ح / ح = مف ح / ح (ر - ر + ج ھ)

جہاں ر سے ج د تعبیر ہوتا ہے جو تیراؤ کی سطح کا نصف قطر انحنا ہے۔

اسلئے م مَ = مف ح / ح (ج د - ھ م + ج ھ)

= مف ح / ح (ھ د - ھ م)

پس معلوم ہوا کہ پس مرکز بلحاظ جہاز کے اوپر اُٹھتا ہے اگر یہ تیراؤ کی سطح کے مرکز انحنا کے نیچے واقع ہو اور نیچے بیٹھتا ہے اگر یہ مرکز انحنا کے اوپر واقع ہو۔

۷۷ — پیچ بانی جہاز (Screw-steamer) کا اپنے پیچ کے عمل کی وجہ سے جھک جانا (Heeling over)۔

(یہ دفعہ پروفیسر گرین ہل (Prof. Greenhill) سے منسوب ہے)

(۷۷) اگر انجن کو پھرانے والا جفت فٹ پونڈوں میں ل ہو اور فی گردشوں کی تعداد ن تو ایک منٹ میں جو کام ہوتا ہے وہ ۲ π ن ل ہوگا۔ لیکن اگر انجن ط ایسی طاقت سے کام کر رہا ہو تو

کام = ... ۳۳ ط

∴ ۲ π ن ل = ... ۳۳ ط

اگر ṭ وہ زاویہ ہو جس میں سے جہاز جھک جاتا ہے اور مرکز ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع ف ہو اور جہاز کا وزن ٹنوں میں و ہو تو

ل = ۲۲۴۰ و ف جب ṭ

∴ ... ۳۳ ط = ۲ π ن × ۲۲۴۰ و ف جب ṭ

اِس مساوات سے ط ملتا ہے۔

جھکنے کے اثر کو وسطی مستوی سے ج فاصلہ پر ایک ایسا وزن و رکھنے سے زائل کر دیا جا سکتا ہے کہ

و × ج = ل

یا ۲ ۲ ن ج و = ۳۲۰۰۰ ط

پنکھبانی جہاز کی صورت میں جھکاؤ طولی سمت میں ہو گا اور اس صورت میں ف طولی، پس مرکزی ارتفاع ہو گا۔

یہ قابل توجہ ہے کہ جھک جانے کی سمت گردش کے سمت کے مخالف ہوتی ہے۔ مثلاً پنکھبانی جہاز کی صورت میں جو آگے کو جا رہا ہے سامنے کا حصہ خفیف سا اُٹھا ہوا ہو گا اور پیچھے کا خفیف ڈوبا ہوا۔

۷۸ — اچھال کی سطح بالعموم۔

فرض کرو کہ ابتدائی آب خط تراشش کے مرکزِ ہندسی میں سے گذرنے والے انتصابی خط میں مبدا لیا گیا ہے۔ اگر ابتدائی تراشش ی = ج ہو تو خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں اس مستوی کی مساوات ہو گی

ی = ج + ل لا + م ما

جہاں ل، م چھوٹے ہیں۔

اگر اُن دو محلوں میں (لا، با، ی.) اور (لا، ما، ی) اچھال کے مرکزوں کے محددوں کو تعبیر کریں تو

ح (لا − لا.) = ∬ (ی − ج) لا فرلا فرما = ا ل + ف م،

ح (ما − با) = ∬ (ی − ج) ما فرلا فرما = ف ل + ب م،

ح (ی − ی.) = ∬ ½ (ی² − ج²) فرلا فرما = ½ (ا ل² + ۲ ف ل م + ب م²)

جہاں ا = ∬ لا² فرلا فرما، ف = ∬ لا ما فرلا فرما، ب = ∬ ما² فرلا فرما

اس لئے　$$۲\,(\text{ی} - \bar{\text{ی}}) = \text{ل}\,(\text{لا} - \bar{\text{لا}}) + \text{م}\,(\text{ما} - \bar{\text{ما}})$$

یا　$$۲\,(\text{ی} - \bar{\text{ی}}) = \frac{\text{ح}}{\text{اب} - \text{ف}^{۲}}\left\{\text{ب}\,(\text{لا} - \bar{\text{لا}})^{۲} - ۲\,\text{ف}\,(\text{لا} - \bar{\text{لا}})\,(\text{ما} - \bar{\text{ما}}) + \text{ا}\,(\text{ما} - \bar{\text{ما}})^{۲}\right\}$$ (۷۸)

جو اچھال کی سطح کی تقریبی شکل ہے۔ اگر ابتدائی محور لا اور ما مستوی تراش کے صدری محور ہوں تو ف = ۰ اور اگر مبداء کو اچھال کے مرکز پر پہلے مقام منتقل کیا جائے تو سطح کی مساوات ہو جائیگی

$$۲\,\text{ی} = \frac{\text{ح}\,\text{لا}^{۲}}{\text{ا}} + \frac{\text{ح}\,\text{ما}^{۲}}{\text{ب}}$$

اب اگر ہم پس مرکزوں کی تعریف اس طرح کریں کہ وہ اچھال کی سطح کی صدری عمادی تراشوں کے مراکز انحنا ہیں تو اچھال کے مرکز کے اوپر، پس مرکزوں کے ارتفاع صدری نصف قطر انحنا $\frac{\text{ا}}{\text{ح}}$ یا $\frac{\text{ب}}{\text{ح}}$ ہونگے۔

۷۹ — قائمیت کی شرط۔

اچھال کی سطح کے نقطہ (لا، ما، ی) پر مماسی مستوی ہے

$$\text{طا} - \text{ی} = \frac{\text{ح}\,\text{لا}}{\text{ا}}\,(\text{ضا} - \text{لا}) + \frac{\text{ح}\,\text{ما}}{\text{ب}}\,(\text{عا} - \text{ما})$$

اور اس مستوی سے مجسم کے مرکز ثقل (۰، ۰، $\bar{\text{ی}}$) کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\left\{\bar{\text{ی}} - \text{ی} + \frac{\text{ح}\,\text{لا}^{۲}}{\text{ا}} + \frac{\text{ح}\,\text{ما}^{۲}}{\text{ب}}\right\}\left\{1 + \frac{\text{ح}^{۲}\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ح}^{۲}\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}\right\}^{-\frac{1}{۲}}$$

$$= \left\{\bar{\text{ی}} + \frac{\text{ح}\,\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ا}} + \frac{\text{ح}\,\text{ما}^{۲}}{۲\,\text{ب}}\right\}\left\{1 - \frac{\text{ح}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ا}^{۲}} - \frac{\text{ح}^{۲}\text{ما}^{۲}}{۲\,\text{ب}^{۲}}\right\};$$

$$= \bar{\text{ی}} + \frac{\text{ح}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ا}^{۲}}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ح}} - \bar{\text{ی}}\right) + \frac{\text{ح}^{۲}\text{ما}^{۲}}{۲\,\text{ب}^{۲}}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ح}} - \bar{\text{ی}}\right)$$

اب دفعہ ۵۵ کی رو سے توازن کے محل ایک ایسے وزنی جسم کے توازن کے محل دریافت کرنے کے معادل ہیں جو اچھال کی سطح سے محیط ہو اور ایک افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہو۔ پس قائمیت کے لئے اس مستوی سے مرکز ثقل کا ارتفاع اقل ہونا چاہیئے۔ اس کے لئے ضروری ہے کہ $\frac{ا}{ح}$ اور $\frac{ب}{ح}$ سے ی چھوٹا ہو یا مرکز ثقل دونوں پس مرکزوں کے نیچے واقع ہو۔

۸۰ — تیراؤکی سطح - لیکلرٹ کا مسئلہ۔

فرض کرو کہ ٹھوس دفعہ ۸، کے بموجب دوسرے محل میں ہے اور اسکو دبانے سے غرق شدہ حجم میں ایک چھوٹی مقدار مف ح کا اضافہ ہوتا ہے۔
اگر حجم مف ح کی چھلکتی کے مرکز ثقل کے محدد ضا، عا، طا ہوں تو

$$ضا\ مف\ ح = (ح + مف\ ح)(لا - لا + مف\ لا - مف\ لا)$$

$$= ل\ مف\ ا + م\ مف\ ف \quad \text{، دفعہ ۸،}$$

اسی طرح $عا\ مف\ ح = ل\ مف\ ف + م\ مف\ ب$ (۹

اور $طا\ مف\ ح = \frac{1}{2}(ل^2\ مف\ ا + 2\ ل\ م\ مف\ ف + م^2\ مف\ ب)$

نیز جیسے چھلکتی کی موٹائی کم کردی جاتی ہے نقطہ (ضا، عا، طا) تیراؤ کی سطح کے متناظر نقطہ پر منطبق ہونے کی طرف مائل ہوتا ہے یعنی آب خط رقبہ کے مرکز ہندسی پر۔

اس لئے تیراؤ کی سطح پر روابط حاصل ہوتے ہیں

$$لا \times فر\ ح = ل\ فر\ ا + م\ فر\ ف،$$

$$ما \times فر\ ح = ل\ فر\ ف + م\ فر\ ب،$$

$$ی \times فر\ ح = \frac{1}{2}(ل^2\ فر\ ا + 2\ ل\ م\ فر\ ف + م^2\ فر\ ب)$$

اور تیراؤ کی سطح کی مساوات ہوگی

$$\text{۲ یَ} = \frac{\text{فرح}}{\text{فرا فرب} - (\text{فرف})^{۲}}\left\{\text{لاَ}^{۲}\,\text{فرب} - \text{۲ لاَ ماَ فرف} + \text{ماَ}^{۲}\,\text{فرا}\right\}$$

خاص صورت میں جبکہ فرف = ۰ تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{۲ یَ} = \text{لاَ}^{۲}\,\frac{\text{فرح}}{\text{فرا}} + \text{ماَ}^{۲}\,\frac{\text{فرح}}{\text{فرب}}$$

اور تیراؤ کی سطح کے نصف قطر انحنا ہیں $\frac{\text{فرا}}{\text{فرح}}$ اور $\frac{\text{فرب}}{\text{فرح}}$ جیسا دفعہ ۵ ے میں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ٹھوس کی دو متوازی تراشوں کے صدری محوروں کا متوازی ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس طرح اگر ف = ۰ تو اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ $\frac{\text{فرف}}{\text{فرح}} = ۰$، اس طرح دفعہ ۵ ے کے نتائج صرف اُن صورتوں میں ہی درست ہونگے جن کو اُس دفعہ میں مان لیا گیا ہے یعنی تشاکل کے انتصابی مستوی موجود ہیں جن میں افقی تراشوں کے تمام صدری محور واقع ہوتے ہیں[1]۔

۸۱ — پس مرکز کا مقام معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱ — نصف قطر ا اور طول ف کا ایک ٹھوس اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں تیراؤ کا مستوی ایک دائری رقبہ ہے اور

$$\text{ا م ر}^{۲} = ۴\int_{۰}^{ا} \tfrac{۱}{۲}\,\text{ما}^{۳}\,\text{فرلا} = \tfrac{۴}{۳}\int_{۰}^{ا}(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرلا}$$

$$= \tfrac{۴}{۳}\,\text{ا}^{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۴}\text{ط}\,\text{فرط}،\qquad \text{لا = اجب ط رکھنے سے،}$$

$$= \frac{\pi\,\text{ا}^{۲}}{۴}$$

[1] لیکلرٹ کے مسئلہ کی یہ تصحیح اور گزشتہ چند دفعات کا طرز استدلال اور دفعات آیندہ ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۱۰۴، ۱۰۵ ڈاکٹر برام وِچ (Dr. Bromwich) کے حسن فکر کا نتیجہ ہیں۔

اس لئے اگر محور کا طول ف غرق ہو تو

$$\pi ا^2 ف \times ھ م = \frac{\pi ا^4}{4} \quad \text{یا} \quad ھ م = \frac{ا^2}{4ف}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{ا^2}{4ف} > \frac{ف}{2} - \frac{ف}{2}$$

مثال ۲ — ایک دائری اسطوانہ تیر رہا ہے اسطور پر کہ اس کا محور افقی اور سیال کی سطح میں ہے۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں ہٹا دیا گیا ہے۔

تیراؤ کا مستوی ایک مستطیل ہے اور

$$ا ر^2 = \frac{1}{6} ا ف^3$$

جہاں ف اسطوانہ کا طول اور ا نصف قطر ہے

$$\therefore \quad ھ م = \frac{1}{3} \frac{ف^2}{\pi ا}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{1}{3} \frac{ف^2}{\pi ا} > \frac{8ا}{3\pi}$$

یا

$$ف > 2ا$$

مثال ۳ — ایک ٹھوس مخروط انتصابی محور اور نیچے دار راس کے ساتھ تیر رہا ہے۔

فرض کرو کہ ف محور کا طول ہے،

ی محور کا وہ حصہ جو غرق ہے،

اور ۲عہ مخروط کا زاویہ راس ہے

تو $ا ر^2 = \frac{1}{4} \pi ی^4 مس^4 عہ$

اور $$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,\text{ی}^{3}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ}$$

$$\therefore \text{ھ م} = \frac{3}{4}\,\text{ی}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ}$$

$$\text{ھ ث} = \frac{3}{4}\,\text{ف} - \frac{3}{4}\,\text{ی}$$

اور اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\text{ی}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ} > \text{یا} < \text{ف} - \text{ی}$$

یا

$$\text{ی} > \text{یا} < \text{ف}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}$$

لیکن اگر ث اور ثہ سیال اور مخروط کی کثافتیں ہوں تو

$$\left(\frac{\text{ی}}{\text{ف}}\right)^{3} = \frac{\text{ثہ}}{\text{ث}}$$

اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{\text{ثہ}}{\text{ث}} > \text{یا} < (\text{جم}\,\text{عہ})^{6}$$

مثال ۴ — ایک متساوی الوجہین مثلثی منشور تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا قاعدہ غرق نہیں ہے اور اس کے کنارے افقی ہیں۔

اول توازن کے اُس محل پر غور کرو جس میں منشور کا قاعدہ افق سے مائل ہو دیکھو دفعہ (۴۹)۔

اُس صورت میں اگر $\text{اق} = 2\,\text{ما}'$ اور $\text{ان} = 2\,\text{لا}$ اور اگر صفحہ (۸۰) کی مساوات (۷) میں ہم $\text{ا} = \text{ب}$ رکھیں تو لا اور ما' مساواتوں

$$\text{لا} + \text{ما} = 2\,\text{ا}\,\text{جم}^{2}\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\text{لا}\,\text{ما} = \text{م}^{2}$$

سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

اب اور اج کو حوالے کے محاور قرار دینے سے ث اور ھ کے محدد علی الترتیب ہونگے

($\frac{۲}{۳}$ ا، $\frac{۲}{۳}$ ا) اور ($\frac{۲}{۳}$ لا، $\frac{۲}{۳}$ ما)

$\therefore$ ھ ث^{۲} = $\frac{۴}{۹}$ {(ا - لا)^{۲} + (ا - ما)^{۲} + ۲ (ا - لا) (ا - ما) جم ط } (۸۱)

= $\frac{۴}{۹}$ { لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ لا ما جم ط - ۲ ا (۱ + جم ط) (لا + ما) + ۲ ا^{۲} (۱ + جم ط) }

جس سے اور مساوات بالا کی امداد سے ہم حاصل کرتے ہیں

ھ ث = $\frac{۴}{۳}$ جب $\frac{ط}{۲}$ (ا^{۲} جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ - م^{۲})$^{\frac{۱}{۲}}$

رقبہ ن ا ق = ۲ م^{۲} جب ط اور اگر ھ ر پس مرکز ہو اور ل منشور کا طول تو

۲ ل م^{۲} جب ط × ھ ر = $\frac{\text{ن ق}^{۲}}{۱۲}$ × ن ق × ل

$\therefore$ ھ ر = $\frac{\text{ن ق}^{۳}}{۲۴ \text{ م}^{۲} \text{ جب ط}}$

لیکن ن ق^{۲} = ۴ (لا^{۲} + ما^{۲} - ۲ لا ما جم ط)

= ۱۶ جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ (ا^{۲} جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ - م^{۲})

$\therefore$ ھ ر = $\frac{۲}{۳}$ $\frac{\text{جم}^{۲} \frac{ط}{۲}}{\text{م}^{۲} \text{ جب} \frac{ط}{۲}}$ (ا^{۲} جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ - م^{۲})$^{\frac{۳}{۲}}$

اور ھ ر > ھ ث اگر م^{۲} جب^{۲} $\frac{ط}{۲}$ < جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ (ا^{۲} جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ - م^{۲})

یعنی اگر جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ > $\frac{\text{م}}{\text{ا}}$

دوم اُس صورت پر غور کرو کہ جس میں قاعدہ افقی ہے اور اس لئے ن ق، ب ج کے متوازی ہے۔

رقبہ ن ا ق = ۲ م^{۲} جب ط

ا ن = ا ق = ۲ م، ن ق = ۴ م جب $\frac{ط}{۲}$

$$\text{اس لئے}\quad \text{ھ مر} = \frac{\text{ہ}}{۳}\,\text{م}\,\frac{\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}}{\text{جم}\frac{\text{ط}}{۲}}\quad \text{اور}\ \text{ھ ث} = \frac{\text{ہ}}{۳}(\text{ا} - \text{م})\,\text{جم}\frac{\text{ط}}{۲}$$

$$\text{اور}\quad \text{ھ م} > \text{ھ ث}\ \text{اگر}\ \text{جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲} > \frac{\text{م}}{\text{ا}}$$

اب دفعہ (۴۹) میں جس کا حوالہ پہلے دیا جا چکا ہے ہم نے ثابت کیا ہے کہ توازن کے یا تو تین محل ہونگے یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$\text{جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲} > \text{یا} < \frac{\text{م}}{\text{ا}}$$

اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب توازن کے تین محل ہوں تو درمیانی محل جس میں ج ب افقی ہے غیر قائم توازن کا محل ہوگا۔ اور دوسرے دونوں محلوں میں توازن قائم ہوگا۔

اگر توازن کا صرف ایک محل ہو تو توازن قائم ہوگا۔

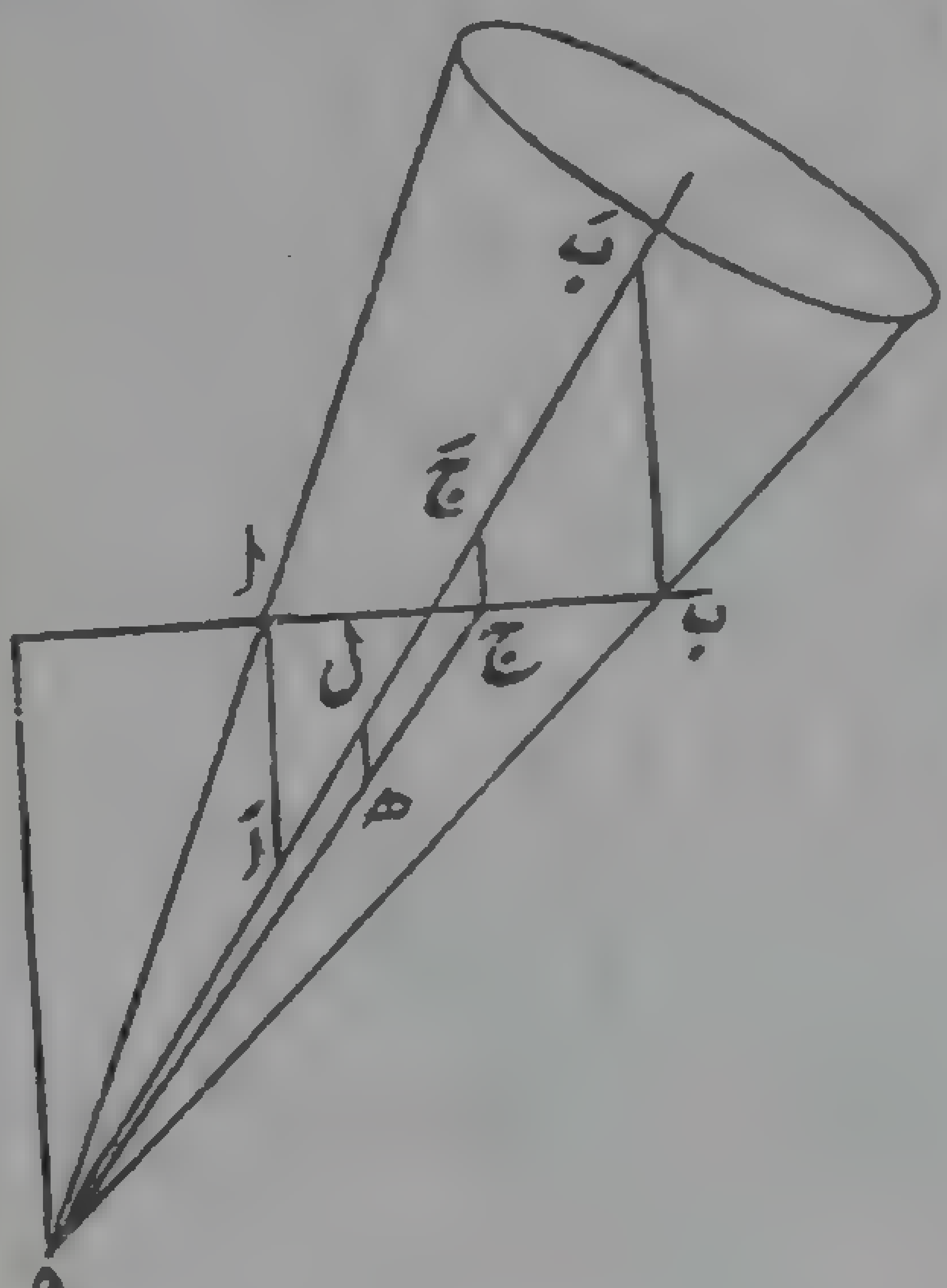
طالب علم کے لئے یہ اچھی مشق ہوگی اگر وہ ان نتائج کو اچھال کے منحنی کی مساوات معلوم کرکے اس کے مرکز انحنا کا مقام دریافت کرنے سے حاصل کرے۔

۸۲ — محدود ہٹاؤ۔ اگر ایک ٹھوس جسم پانی میں تیر رہا ہو اور اس کو توازن کے محل سے ہٹا کر ایک دئے ہوئے زاوئے میں گھمایا جائے تو پہلے کی طرح سیالی دباؤ کا معیار استردادی ہوگا یا غیر استردادی بموجب اس کے کہ نقطہ ل جس پر اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط، خط ھ ث کو قطع کرتا ہے ث کے اوپر یا نیچے واقع ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ اگر ل، ث کے اوپر واقع ہو تو جسم کو آزاد کر دینے سے وہ اپنے اصلی محل کی طرف لوٹ آئیگا اور اس میں سے اہتزاز کریگا یا یہ کہ قائمیت کی ہماری سابق تعریف کے بموجب اصلی محل قائم توازن کا محل ہوگا۔ علم حیل کا ایک عام قانون یہ ہے کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں اور ممکن ہے کہ جسم اپنے اصلی محل سے اس ہٹاؤ میں توازن کے محلوں میں سے گزر چکا ہو۔

مثلاً ایک خاص مثال حسب ذیل ہے۔

ایک ٹھوس مخروط اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے۔ اس کو ایک انتصابی مستوی میں زاویہ ط میں گھمایا گیا ہے۔ ہٹائے ہوئے سیال کا حجم وہی رہتا ہے۔ سیالی دباؤ کے معیار کی سمت معلوم کرنا مطلوب ہے۔



فرض کرو کہ سیال کی مستوی سطح سے حاصل شدہ مخروطی تراش کا محور اعظم اب ہے اور اس کا وسطی نقطہ ج ہے، خطوط اا′، بب′، جج′ خط اب پر علی القوائم ہیں اور زاویہ اوب = ۲ عہ اور وا = د تو

$$\text{وا}' = \text{ط} - \text{عہ}،$$

اور

$$\text{وباب}' = \pi - \text{ط} - \text{عہ}$$

$$\text{وج}' = \tfrac{1}{2}(\text{وا}' + \text{وب}') = \tfrac{1}{2}\left\{ \text{د}\,\frac{\text{جب}(\text{ط}-\text{عہ})}{\text{جب ط}} + \text{د}\,\frac{\text{جم}(\text{ط}-\text{عہ})}{\text{جم}(\text{ط}+\text{عہ})}\,\frac{\text{جب}(\text{ط}+\text{عہ})}{\text{جب ط}} \right\}$$

$$= \frac{\text{د جم ط}}{\text{جم}(\text{ط}+\text{عہ})}$$

$$\therefore \quad \text{ول} = \frac{3}{4}\,\text{د}\,\frac{\text{جم ط}}{\text{جم}(\text{ط}+\text{عہ})}$$

قطع ناقص اب کا نصف محور اصغر اُن عمودوں کے درمیان وسط تناسب ہے جو مخروط کے محور پر ا اور ب سے کھینچے جائیں۔

$$\therefore \quad \text{ناقص کا رقبہ} = \pi \tfrac{1}{2}\,\text{اب}\,(\text{وا} \times \text{وب} \times \text{جب}^2\,\text{عہ})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\text{د}^2\,\frac{\text{جب عہ جب ۲عہ}}{\text{جم}(\text{ط}+\text{عہ})}\left\{\frac{\text{جم}(\text{ط}-\text{عہ})}{\text{جم}(\text{ط}+\text{عہ})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اس لئے ہٹائے ہوئے سیال کا حجم

$$= \tfrac{1}{3}\,\text{د}\ \text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})\ (\text{ناقص کا رقبہ})$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\pi\,\text{د}^{3}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}\ \text{جم}\,\text{عہ}\left\{\frac{\text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})}{\text{جم}\,(\text{طہ} + \text{عہ})}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

(۸۳) اب اگر سیال اور مخروط کی کثافتیں ث، ثہ ہوں تو چونکہ ہٹائے ہوئے سیال کا وزن مخروط کے وزن کے مساوی ہے اس لئے

$$\text{ث}\,\text{د}^{3}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}\ \text{جم}\,\text{عہ}\left\{\frac{\text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})}{\text{جم}\,(\text{طہ} + \text{عہ})}\right\}^{\frac{3}{2}} = \text{ثہ}\,\text{ف}^{3}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ}$$ [ف مخروط کا ارتفاع ہے]

یا

$$\left(\frac{\text{د}}{\text{ف}}\right)^{3} = \frac{\text{ثہ}}{\text{ث}}\left\{\frac{\text{جم}\,(\text{طہ} + \text{عہ})}{\text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})}\right\}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\text{جم}^{3}\,\text{عہ}}$$

اور $\text{ول} > \text{وث}$ اگر

$$\text{د}\,\frac{\text{جم}\,\text{طہ}}{\text{جم}\,(\text{طہ} + \text{عہ})} > \text{ف}$$

یا اگر

$$\sqrt[3]{\frac{\text{ثہ}}{\text{ث}}} > \frac{\text{جم}\,\text{عہ}\ \text{جم}\,(\text{طہ} + \text{عہ})}{\text{جم}\,\text{طہ}}\left\{\frac{\text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})}{\text{جم}\,(\text{طہ} + \text{عہ})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

طہ کو لاانتہا چھوٹا فرض کرنے سے صغیر ہٹاؤ کے لئے ہمیں قائمیت کی شرط ملیگی

$$\sqrt[3]{\frac{\text{ثہ}}{\text{ث}}} > \text{جم}^{2}\,\text{عہ}$$

جو دفعہ (۸۱) کی مثال ۳ کے مطابق ہے۔

فرض کرو کہ مخروط کا توازن تعدیلی ہے یعنی فرض کرو کہ

$$\text{ثہ} = \text{ث}\ \text{جم}^{6}\,\text{عہ}$$

تو محدود ہٹاؤ کے بعد سیال کا عمل مخروط کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجانے پر مائل ہوگا

اگر

$$\text{جم عہ جم طہ} > \text{ہ} \sqrt{\text{جم (طہ + عہ) جم (طہ - عہ)}}$$

یہ ایک ایسی شرط ہے جو ہمیشہ صادق آتی ہے کیونکہ عہ اور طہ میں سے ہر ایک زاویہ قایٔمہ سے کم ہے۔

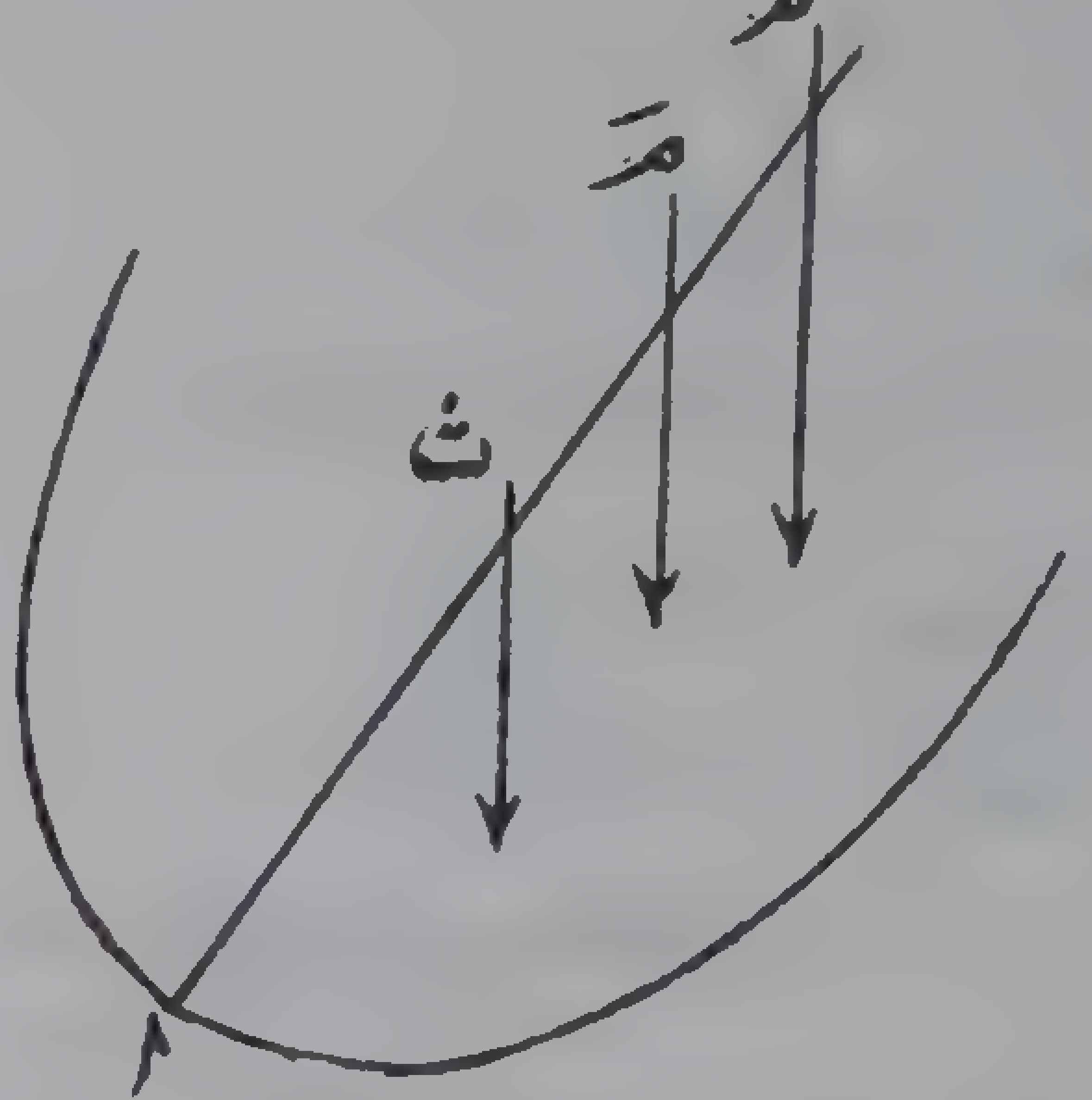
اس لئے مخروط کے تعدیلی توازن کی صورت میں کسی محدود ہٹاؤ کے لئے توازن کو قائم کہا جا سکتا ہے۔

۸۳ — جب مائع ایک برتن میں ہو جسکو اپنے اصلی محل سے ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے تو گذشتہ تحقیقات کی مدد سے ہم حاصل نیچے وار دباؤ کے خط عمل کا تعین کر سکتے ہیں درحقیقت اس صورت میں، پچھلی صورت کی طرح یہ مسئلہ حسب ذیل ہے:۔

ایک ٹھوس جسم ا ب ج سے ایک دیا ہوا حجم ایک مستوی کے ذریعہ تراش لیا گیا ہے۔ اس حجم کا مرکز ہندسی ھ ہے اور خط ج ھ اس مستوی پر عمود وار ہے۔ اگر وہی حجم ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو مستوی ا ب سے بہت چھوٹا زاویہ بناتا ہے تو اُس خط مستقیم کا محل معلوم کرنا مطلوب ہے جو دوسرے مستوی پر عمود وار ہے اور اس سے جو حجم کٹتا ہے اُس کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔

اگر برتن کی اندرونی سطح ایسے مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہو جو ھ میں سے گزرتا ہے اور تراشش کے دونوں مستویوں کے خط تقاطع پر عمود وار ہے تو وہ خط جسکا محل دریافت کرنا مطلوب ہے ج ھ کو مرکز مابعد م پر قطع کرے گا جس کا مقام ہمارے گزشتہ نتائج سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۸۴ — برتن جس میں مائع ہو — ایک کھوکھلا برتن جس میں مائع ہے مائع میں تیر رہا ہے۔ توازن کی نوعیت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ جسم کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ہٹاؤ کے انتصابی مستوی کے لحاظ سے جسم متشاکل ہے اور یہ کہ جسم اور مائع کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں ہیں۔ (۴۱)



فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے سیال
کا پسس مرکز م ہے اور برتن کے
اندرونی سیال کا مَ اور ہٹائے ہوئے
سیال[1] کا وزن و ہے اور اندرونی سیال
کا وَ۔ برتن کی کمیت کے مرکز ث کے
گرد معیار لینے سے، حاصل سیالی دباؤ برتن
کو متوازن کرنے کا میلان رکھیں گے
یا اس کے برعکس بموجب اس کے کہ

$$\text{و} \times \text{ث م} - \text{وَ} \times \text{ث مَ}$$

مثبت یا منفی ہو یعنی بموجب اس کے کہ

$$\frac{\text{و}}{\text{وَ}} > \text{یا} < \frac{\text{ث مَ}}{\text{ث م}}$$

مثال ـــ ایک کھوکھلا مخروط جس میں پانی ہے پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہے ۔

فرض کرو کہ ف = مخروط کے محور کا طول

فَ = مخروط کے اندرونی سیال میں ڈوبے ہوئے محور کا طول

ی = بیرونی سیال کی سطح کے نیچے ڈوبے ہوئے محور کا طول

مخروط کے زاویہ راس کو ۲ عہ لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ھ م} = \frac{3}{4}\,\text{ی مس}^2\,\text{عہ}$$

لیکن $$\text{ھ ث} = \frac{2}{3}\,\text{ف} - \frac{3}{4}\,\text{ی}$$

$$\therefore \text{ث م} = \frac{3}{4}\,\text{ی قط}^2\,\text{عہ} - \frac{2}{3}\,\text{ف}$$

[1] یہ صورت ایسے جہاز سے متعلق ہے جس میں سوراخ ہو گیا ہو اور لڑکتا ہو۔ اگلی دفعہ ایسے سوراخدار جہاز سے متعلق ہے جو سر کے بل اہتزاز (pitch) کرتا ہے۔

اسی طرح
$$ث\,ھ = \frac{۳}{۴}\,\bar{ت}\,قط^۲\,ع - \frac{۲}{۳}\,ت$$

نیز
$$\frac{و}{\bar{و}} = \frac{ی^۳}{\bar{ی}^۳}$$

اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\left(\frac{ی}{\bar{ی}}\right)^۳ > \frac{۹\,\bar{ت}\,قط^۲\,ع - ۸\,ت}{۹\,ی\,قط^۲\,ع - ۸\,ت}$$

جہاں مساوات

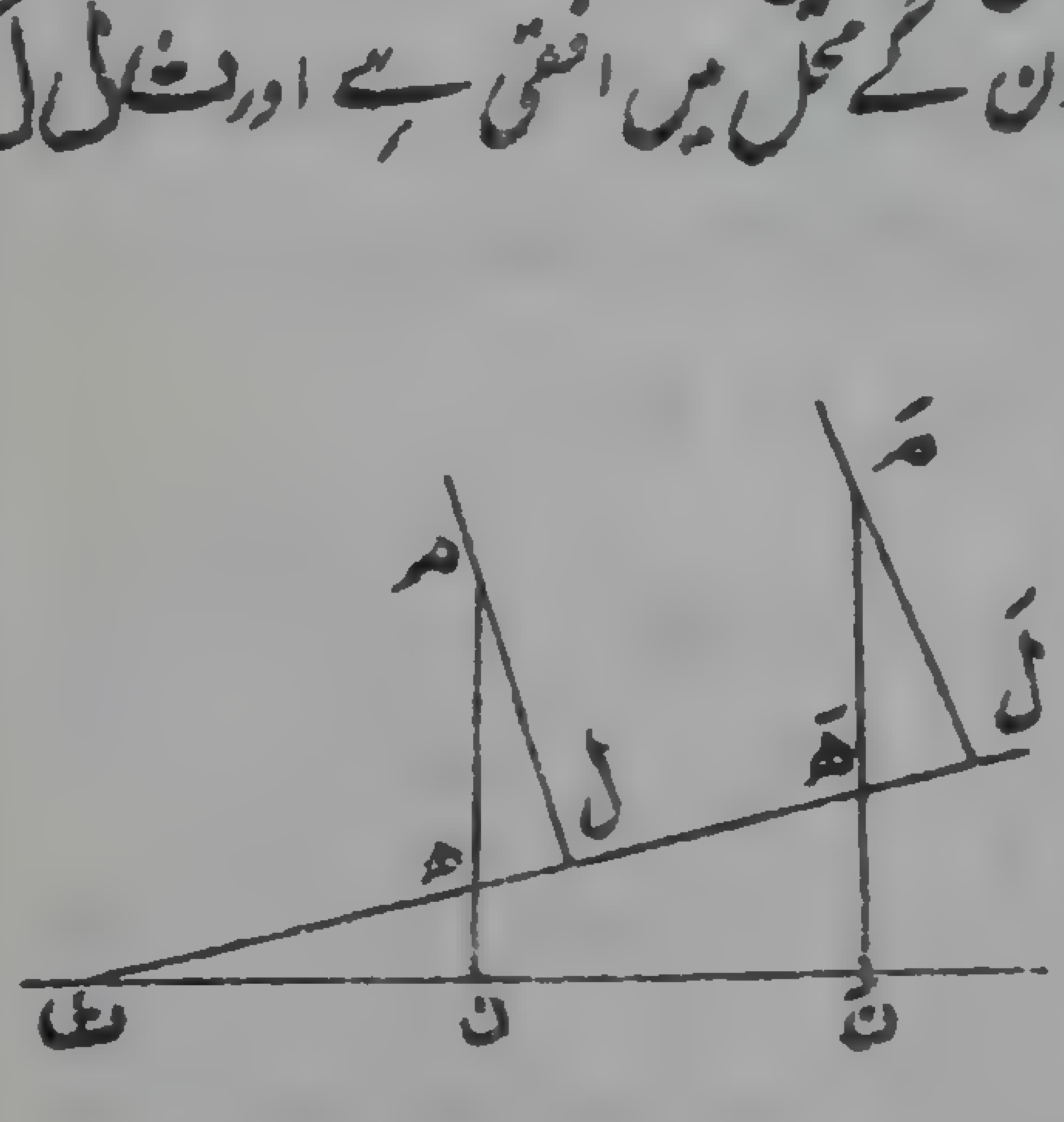
$$و - \bar{و} = \frac{۱}{۳}\,ج\,ث\,\pi\,مس^۲\,ع\,(ی^۳ - \bar{ی}^۳) = \text{مخروط کا وزن،}$$

سے ی حاصل ہوگا۔

۸۵ — اگر برتن کے اندرونی سیال اور ہٹائے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی میں نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان مرکزوں میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کی سمت میں ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور جسم اس مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

فرض کرو کہ جسم کی کمیت کا مرکز ث، ہٹائے ہوئے سیال کا ھ، برتن کے اندرونی سیال کا $\bar{ھ}$ ہے اور م، $\bar{م}$ بس مرکز ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ث ن $\bar{ن}$ توازن کے محل میں افقی ہے اور ث ل $\bar{ل}$ ہٹائے ہوئے محل میں ث میں سے گزرنے والا افقی خط ہے۔



اگر و، $\bar{و}$ کے وہی معنی ہوں جو گزشتہ دفعہ میں لئے گئے اور ط ہٹاؤ کا زاویہ ہو تو توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$و \times ث\,ل > \text{یا} < \bar{و} \times ث\,\bar{ل}$$

یا وَ(ثَ نَ جم طہ + مَ نَ جب طہ) > یا < وَ(ثَ نَ جم طہ + مَ نَ جب طہ)

اور چونکہ وَ × ثَ نَ = وَ × ثَ نَ

اس لئے توازن قائم ہوگا یا غیر قائم بموجب اس کے کہ

مَ نَ / مَ نَ > یا < وَ / وَ

۸۶ —— قیود کے ماتحت تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت۔
قید کی ایسی صورتوں میں جس میں چھوٹے ہٹاؤ کے لئے ہٹائے ہوئے مائع کا حجم نہیں بدلتا پس مرکز کا نظریہ سیالی دباؤ کے خط عمل کا تعین کرتا ہے اور قائمیت کا سوال پھر آسانی سے حل ہوجاتا ہے۔

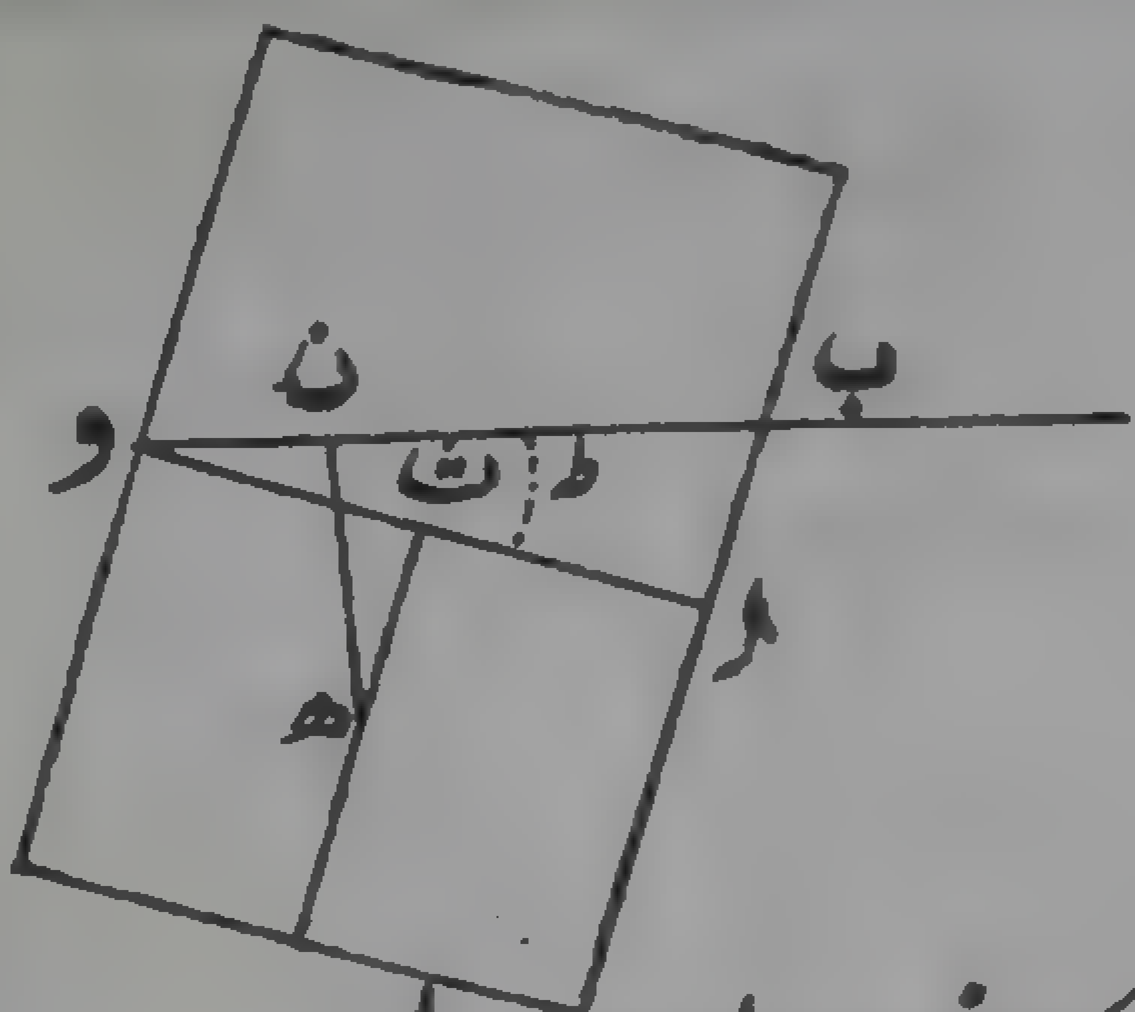
مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک جسم جزءً غرق شدہ، ایک افقی محور کے گرد حرکت کرسکتا ہے اور یہ افقی محور اُس مستوی تراش کے مرکز ہندسی (ج) کے انتصاباً نیچے واقع ہے جو مائع کی سطح جسم میں کاٹتی ہے۔

اگر جسم کو چھوٹے زاویہ طہ میں ہٹا دیا جائے تو اس ہٹاؤ کا یہ اثر ہوگا کہ مرکز ہندسی (ج) نیچے بیٹھ جائے گا اور یہ بٹھاؤ طہ^۲ پر منحصر ہوگا۔ اور اس لئے صغیر مقداروں کے پہلے رتبہ تک ہٹایا ہوا حجم غیر متغیر رہیگا اور پس مرکز وہی ہوگا گویا کہ ج مائع کی سطح میں ہی واقع ہے۔

اگر جسم ایسے افقی محور کے گرد حرکت کرسکتا ہو جو نقطہ ج کے نیچے انتصاباً واقع نہ ہو تو ہٹائے ہوئے حجم میں جو تبدیلی واقع ہوگی وہ نظرانداز نہیں ہوسکے گی اور قائمیت کے سوال کو ہٹائے ہوئے مائع کے عمل پر بالراست غور کرنے سے حل کرنا پڑیگا۔

مثال —— ایک مستطیلی پتر ایک مائع میں جسکی کثافت اسکی کثافت کا دوچند ہے ساکن ہے اس طور پر کہ اس کے دو ضلعے انتصابی ہیں۔ یہ پتر اپنے ایک انتصابی ضلع کے وسطی نقطہ کے گرد اپنے مستوی میں حرکت کرسکتا ہے۔

شکل پتر کو تعبیر کرتی ہے جبکہ اسکو چھوٹے زاویہ ا و ب (طہ) میں ہٹا دیا گیا ہے۔ نقطہ و جو مائع کی سطح میں ہے ضلع کا وسطی نقطہ ہے۔



اگر و اَ = ا اور اگر ارتفاع = ۲ ب تو

ا و ب = $\frac{1}{2}$ اَ^{2} ط

اور و کے گرد معیار لینے سے

توازن قائم ہوگا اگر

۲ ث ($\frac{1}{2}$ اَ^{2} ط × $\frac{2}{3}$ ا + ا ب × و ن) > ث × ۲ ا ب × $\frac{1}{2}$

جہاں ھ ن نقطہ ھ میں سے گزرنے والا انتصابی ہے۔

یعنی چونکہ

ن و = و ث جم ط ـ ھ ث جب ط = $\frac{ا}{۲}$ ـ $\frac{ب}{۲}$ ط

توازن قائم ہوگا اگر

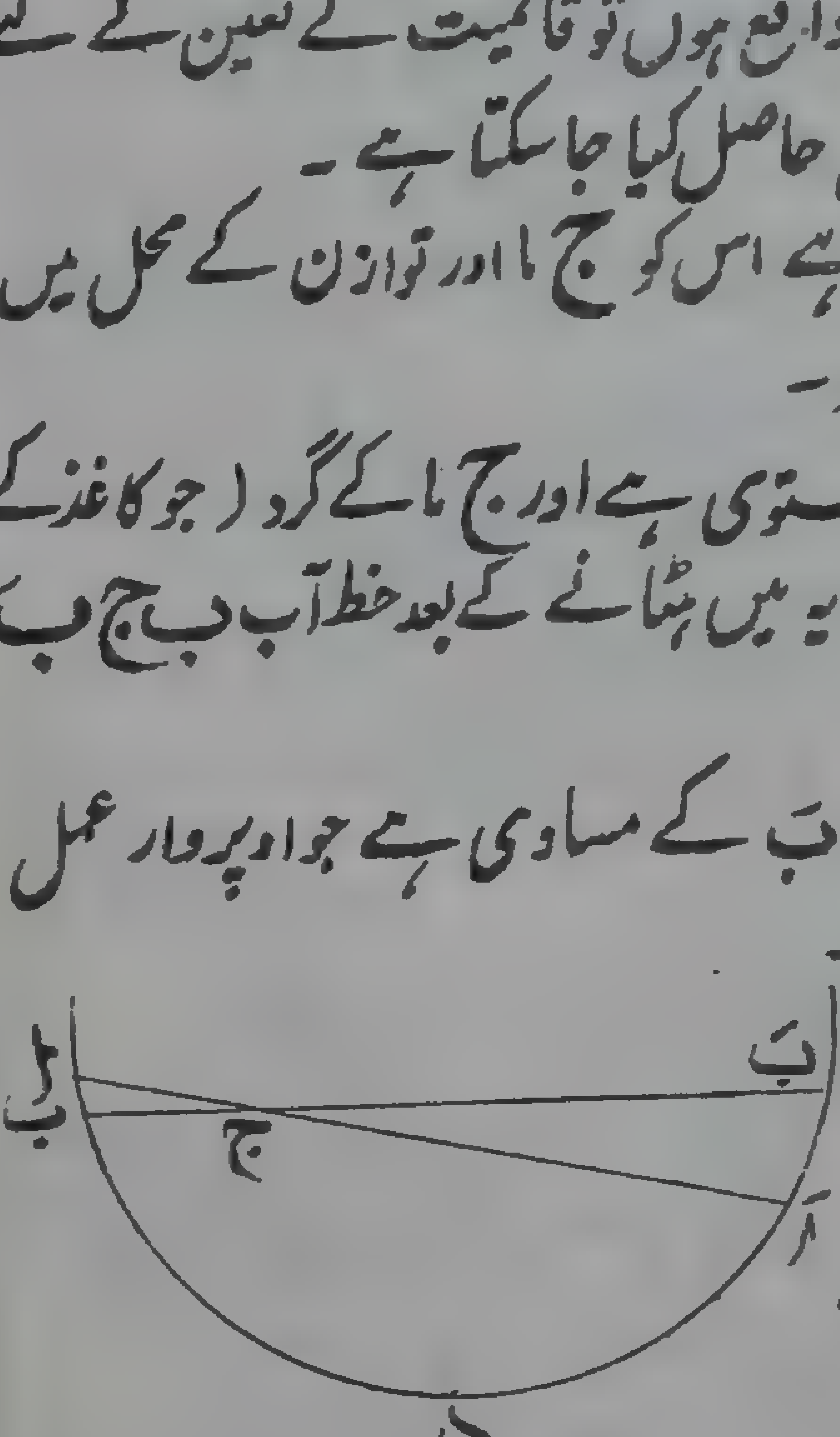
۲ اَ^{2} > ۳ ب^{2}

۸۷ — اس خاص صورت میں جبکہ جسم کی کمیت کا مرکز اور محور جس کے گرد یہ حرکت کرسکتا ہے دونوں مائع کی سطح میں واقع ہوں تو قائمیت کے تعین کے لئے ایک ضابطہ دفعہ (۶۶) کے ضابطہ کے مماثل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

جس محور کے گرد جسم حرکت کرسکتا ہے اس کو ج ما اور توازن کے محل میں ہٹائے ہوئے مائع کے حجم کو ح فرض کرو۔

فرض کرو کہ ا ج بَ تیراؤ کا ابتدائی مستوی ہے اور ج ما کے گرد (جو کاغذ کے مستوی پر عمود وار ہے) ایک چھوٹے زاویہ میں ہٹانے کے بعد خط آب ج بَ بن جاتا ہے۔

حاصل سیالی دباؤ، وزن ب د اَ بَ کے مساوی ہے جو اوپر وار عمل کرتا ہے اور یہ ذیل کے وزنوں کے معادل ہے۔



وزن اَ ب د اَ یعنی ج ث ح جو اوپر کیطرف عمل کرتا ہے، فانہ اَ ب ج کا وزن جو اوپر کی طرف عمل کرتا ہے اور فانہ ا ب ج کا وزن جو نیچے کی طرف عمل کرتا ہے

ان دونوں قانونوں کی وجہ سے استردادی معیار

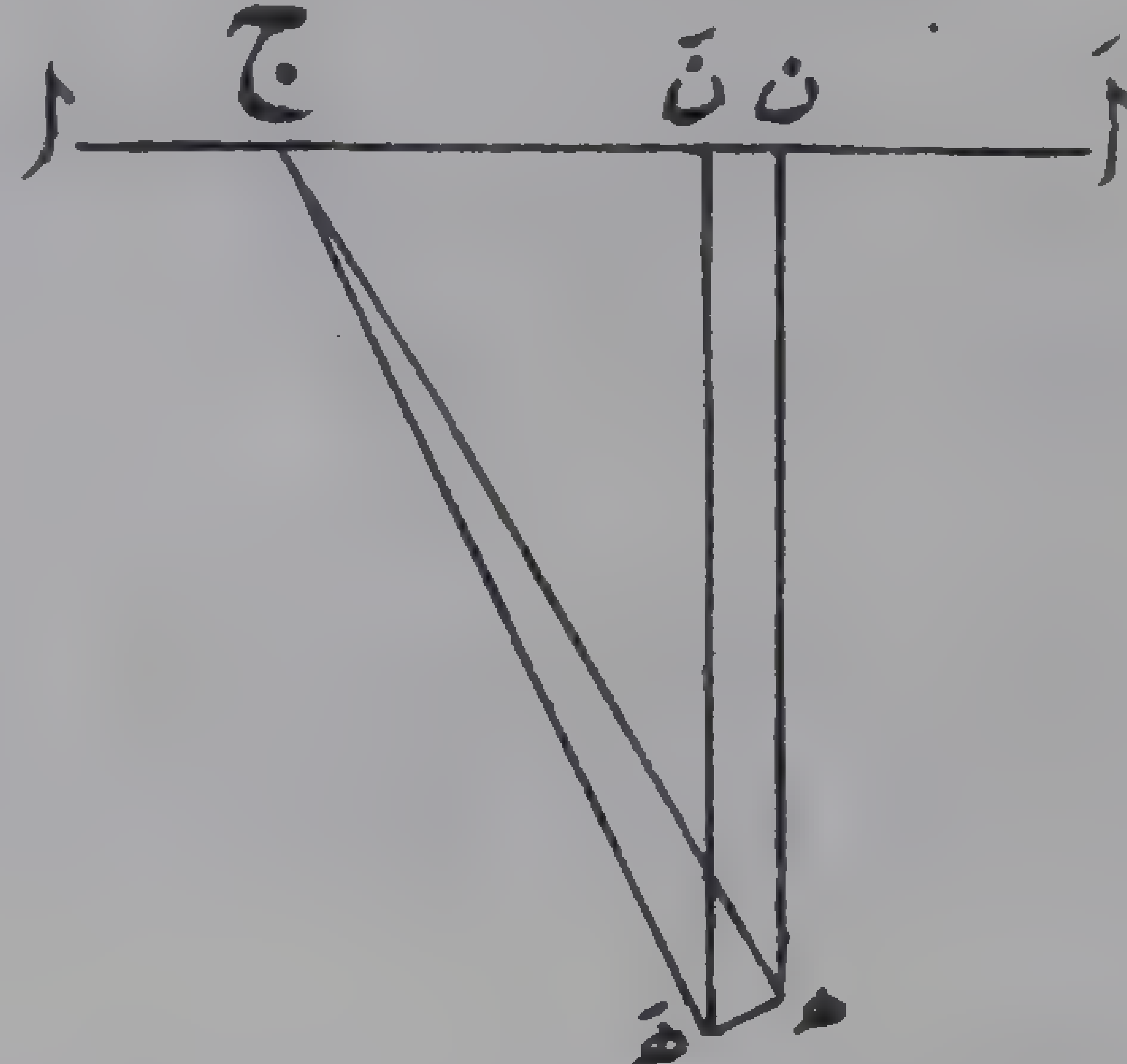
= $\int$ ج ث لا' ط فرلا فرا = ج ث ا ر' ط

جہاں ج ا کے گرد رقبہ اَجَ اَ کے جمود کا معیار ا ر' ہے ھ کے ہٹاؤ کی وجہ سے معیار کا نقصان

= ج ث ح × ن نَ = ج ث ح × ھ ن × ط

اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

ا ر' > ح × ھ ن



۸۸ ـــ ایسے جسم کی عام صورت میں جو گ گہرائی پر کے ایک افقی محور کے گرد حرکت کرسکتا ہو فرض کرو کہ تیراؤ کے مستوی پر محور کا ظل ج ا ہے اور ث اور ھ کے ظل ل اور ن ہیں۔

صغیر زاوئی ہٹاؤ ط کے لئے ج کا انتصابی ہٹاؤ ط' کے رتبہ کا ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

گزشتہ دفعہ کی طرح ہٹائے ہوئے مائع کے تغیر کی وجہ سے استردادی

معیار = ج ث ا ر' ط اور ھ کے ہٹاؤ سے معیار کا نقصان

= ج ث ح × (ھ ن - گ) ط

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

ج ث ا ر^{۲} - ج ث ح (ھ ن - گ) + و (ث ل - گ)

مثبت ہو اس شرط کے ساتھ کہ

و × ج ل = ج ث ح × ج ن

نتیجہ صریح۔ اگر جسم متجانس مائع میں آزادانہ تیر رہا ہو اور تشاکل کا ایک مستوی رکھتا ہو اور اگر اس مستوی میں کے کسی افقی محور کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو استردادی جفت ہوگا

ج ث ط (ا ر^{۲} - ح × ھ ث)

جہاں تشاکل کے مستوی اور مائع کی سطح کے خط تقاطع کے گرد سطحی تراش کے جمود کا معیار ا ر^{۲} ہے۔

۸۹ — ایسے جسم کا توازن جو دو مائعات میں جزءً غرق شدہ تیر رہا ہے۔
فرض کرو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ث اور نیچے کے مائع کی ث + ثَ ہے۔

نیز فرض کرو کہ کل حجم غرق شدہ ح ہے اور حَ، ح کا وہ حصہ ہے (۸۸) جو نیچے کے مائع میں غرق ہے۔ تیراؤ کے مستویوں کے رقبہ ا، اَ ہیں۔ تب جسم کے وزن کو تھامنے والی قوتیں، مائع کی کمیتوں کے اوزان ث ح اور ثَ حَ ہیں جو اربروار عمل کرتی ہیں۔

ایسی صورت لو جس میں جسم ایک ایسے انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے جو ہٹاؤ کی مستوی پر عمود وار ہے، اس طرح جسم اور کمیتوں ث ح اور ثَ حَ کے مراکز ہندسی ف، ھ، ھَ ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے۔

اگر جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں تشاکل کے مستوی میں کے کسی افقی محور کے گرد ہٹا دیا جائے تو توازن کے محل پر لیجانے کا میلان رکھنے والی

قوتوں کا کل معیار ث کے گرد ہوگا

ج ث (اَرَ۲ - ح × ھ ث) ط + ج ثَ (اَرَ۲ - حَ × ھَ ث) ط

یا ج ث ح × ث م × ط + ج ثَ حَ × ث مَ × ط

جس میں ث م اور ث مَ کی مثبت سمت اوپر وار ہے۔

توازن صریحاً قائم ہوگا اگر م اور مَ دونوں ث کے اوپر واقع ہوں لیکن اگر مَ، ث کے نیچے ہو تو قائمیت کے لئے

ث ح × ث م > ثَ حَ × مَ ث

یا ث (اَرَ۲ - ح × ھ ث) > ثَ (حَ × ھَ ث - اَرَ۲)

۹۰ —— غیر متجانس مائع —— ایک ٹھوس جسم متغیر کثافت کے مائع میں تیر رہا ہے۔ اچھال کی سطح معلوم کرنا مطلوب ہے۔

پہلے ایک جسم کی صورت میں غور کرو جو ایسے مائع میں تیر رہا ہے جو نزولی ترتیب میں مختلف کثافتوں ث۱، ث۲، ث۳ ..... ثن کی تہوں پر مشتمل ہے۔

فرض کرو کہ ثن کثافت کی تہ کی اوپر کی سطح کے نیچے جسم کا کل حجم غرق شدہ حن سے تعبیر ہوتا ہے۔

دفعہ ۷۸ کی طرح فرض کرو کہ اس مستوی کی ابتدائی آب خط تراش ی = ج ہے اور فرض کرو کہ خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں اس مستوی کی مساوات ی = ج + ل لا + م ما ہے تو ہمیں یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

{ث۱ ح۱ + (ث۲ - ث۱) ح۲ + (ث۳ - ث۲) ح۳ + ... + (ثن - ثن-۱) حن} (لا - لاَ)

= {ث۱ ا۱ + (ث۲ - ث۱) ا۲ + ... + (ثن - ثن-۱) ان} ل

+ {ث۱ ف۱ + (ث۲ - ث۱) ف۲ + ... + (ثن - ثن-۱) فن} م

اسی طرح (ما - ماَ) اور (ی - یاَ) کے لئے متناظر مساواتیں حاصل

ہوتی ہیں ، یہاں ان دو محلوں میں اچھال کے مرکز بالترتیب (لا̄، با̄، یی̄)، (لا، ما، ی) ہیں اور ا، ف، ب متناظر آب خط تراش پر علی الترتیب دوہرے تکملوں

∬ لا² فرلا فرما ، ∬ لا ما فرلا فرما ، ∬ ما² فرلا فرما

کو تعبیر کرتے ہیں۔

(۸۹) مسلسل سیال کی صورت لینے سے

ک (لا - لا̄) = ا ل + ف م

ک (ما - ما̄) = ف ل + ب م

اور ک (ی - یی̄) = ½ (ا ل² + ۲ ف ل م + ب م²)

جہاں ک = ث ح + ∫ ح فر ث

= ث ح + [ث ح] - ∫ ث فر ح

= ∫ ث فر ح

اور ا = ث ا + ∫ ا فر ث

= ث ا + [ث ا] - ∫ ث فر ا

= ث ا + ∫ ث فر ا

اور اسی طرح کا جملہ ب کے لئے ہوگا۔ لاحقے ا، ن غرق شدہ جسم کی اوپر کی اور نچلی تراشوں سے متعلق ہیں، اس صورت میں حن صریحاً صفر ہے اور ان بھی صفر ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ جسم کا پیندا چپٹا یا مستوی ہو۔ اچھال کی سطح تین مساواتوں سے دفعہ ۷۰ کی طرح حاصل ہوتی ہے اور خاص صورت میں جبکہ ف = ۰، اور مبداء اچھال کے مرکز کی متوازن

حالت کے مقام پر واقع ہو تو اس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ی = ک \frac{لا^۲}{ا} + ک \frac{ا^۲}{ب}$$

اور پس مرکزی بلندیاں $\frac{ا}{ک}$ اور $\frac{ب}{ک}$ ہیں۔

۹۱ — ٹھوس جسم جو کُلًا غرق شدہ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں ہیں اُسی طرح کی مساواتیں حاصل ہونگی

$$ک = \int ث\, فرح \quad اور \quad ل = \int ا\, فرث \; یا \; (ث_ن ا_ن - ث_۱ ا_۱) + \int ث\, فرا$$

متجانس سیال میں غرق شدہ جسم کی صورت میں اچھال کے مرکز میں کوئی ہٹاؤ نہیں ہوتا۔

۹۲ — امثلہ ۔ (۱) مخروط جس کا نصف زاویہ راس عہ اور راس نیچے وار ہے۔

اگر راس و سے کسی تراش کا فاصلہ لا ہو تو

$$ا = \frac{۱}{۴} \pi\, لا^۴ مس^۲ عہ$$

$$\therefore فرا = \pi\, لا^۳ مس^۲ عہ\, فرلا$$

نیز $فرح = \pi\, لا^۲ مس^۲ عہ\, فرلا$، اس طرح $فرا = لا\, مس^۲ عہ\, فرح$

اور $$\frac{ل}{ک} = \frac{\int ث\, فرا}{\int ث\, فرح} = مس^۲ عہ \int لا ث\, فرح / \int ث\, فرح$$

$$= \bar{لا}\, مس^۲ عہ$$

جہاں $\bar{لا}$، و کے اوپر اچھال کے مرکز کا ارتفاع ہے اور اس طرح و کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع $\bar{لا}\, قط^۲ عہ$ ہے۔

(۲) مکافی نما جس کا وتر خاص ل اور راس نیچے وار ہے۔

یہاں $ا = \frac{۱}{۴} \pi\, ل^۲ لا^۲ \quad \therefore \quad فرا = \frac{۱}{۲} \pi\, ل^۲ لا\, فرلا$

نیز $فرح = \pi\, ل\, لا\, فرلا$، اس طرح $فرا = \frac{۱}{۲} ل\, فرح$

اور $\frac{۱}{\text{ک}} = \int \text{ث فرا} / \int \text{ث فرح} = \frac{۱}{۲}\,\text{ل}$

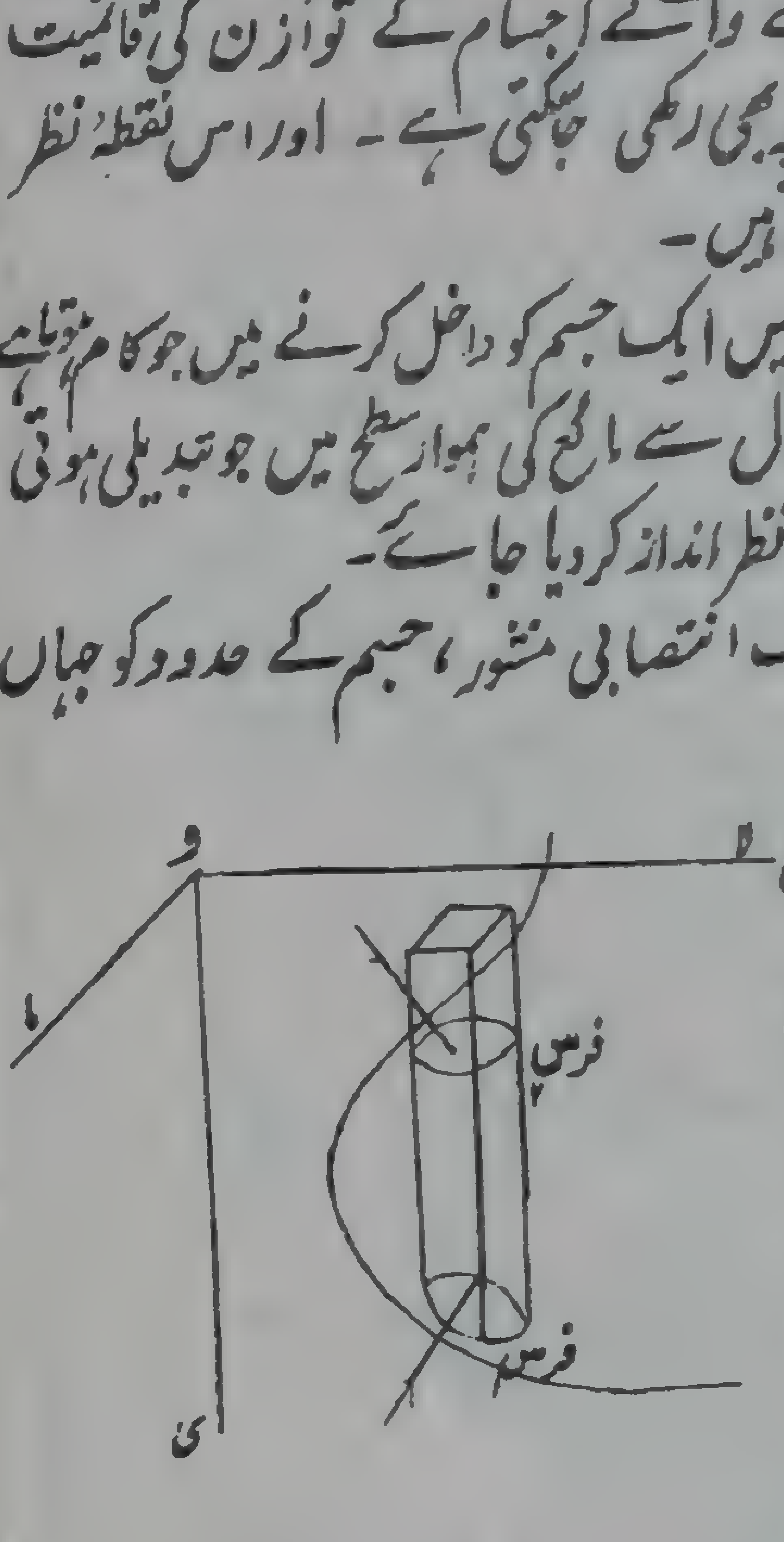
(۳) اسطوانہ جس کا محور انتصابی ہے۔

یہاں ا = مستقل، اس طرح $\frac{\text{ل}}{\text{ک}} = \text{ثان ا ن} / \text{ک}$

۹۴ — **توانائی بالقوہ** — تیرنے والے اجسام کے توازن کی قائمیت کے نظریہ کی بنیاد توانائی کے اصول پر بھی رکھی جاسکتی ہے۔ اور اس نقطۂ نظر سے ہم اس مضمون پر اب بحث کرتے ہیں۔

وزن دار مائع کے ایک سمندر میں ایک جسم کو داخل کرنے میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرنا مقصود ہے جبکہ جسم کے دخول سے مائع کی ہموار سطح میں جو تبدیلی ہوتی ہے اور اس میں جو خلل ہوتا ہے ان کو نظر انداز کردیا جائے۔

اگر عمودی تراش فرلا فرما کا ایک انتصابی منشور، جسم کے حدود کو جہاں مائع اسے مس کرتا ہے عناصر فرس۱، فرس۲ میں قطع کرے جو ی۱، ی۲ گہرائیوں پر ہیں اور جن پر کے دباؤ علی الترتیب د۱، د۲ ہیں اور اگر ط۱، ط۲ وہ حادہ زاویے ہوں جو فرس۱، فرس۲ پر کے عماد انتصابی خط کے ساتھ بناتے ہیں تو گہرائی کو بقدر ایک صغیر مقدار فری کے بڑھانے میں، ان عناصر پر کے مجموعی دباؤں کے خلاف جو کام ہوگا وہ یہ ہے



$$(\text{د}_۱\ \text{فرس}_۱\ \text{جتم ط}_۱ - \text{د}_۲\ \text{فرس}_۲\ \text{جتم ط}_۲)\ \text{فری} = (\text{د}_۱ - \text{د}_۲)\ \text{فرلا فرما فری}$$

اس لئے زیر بحث محل میں جسم کو رکھنے میں جو کام ہوا وہ

$$= \sum \left\{ \text{فرلا فرما} \left(\int^{\text{ی}_۱} \text{د}_۱\ \text{فری} - \int^{\text{ی}_۲} \text{د}_۲\ \text{فری} \right) \right\}$$

= Σ { فرلا فرما ∫ (ی۲ سے ی۱) د فری }

= ∭ د فرلا فرما فری .... (۱)

جہاں تکمل غرق شدہ حجم پر لیا گیا ہے۔

اگر مائع متجانس ہو تو د = ج ث ی اور کام جو ہوا وہ (91

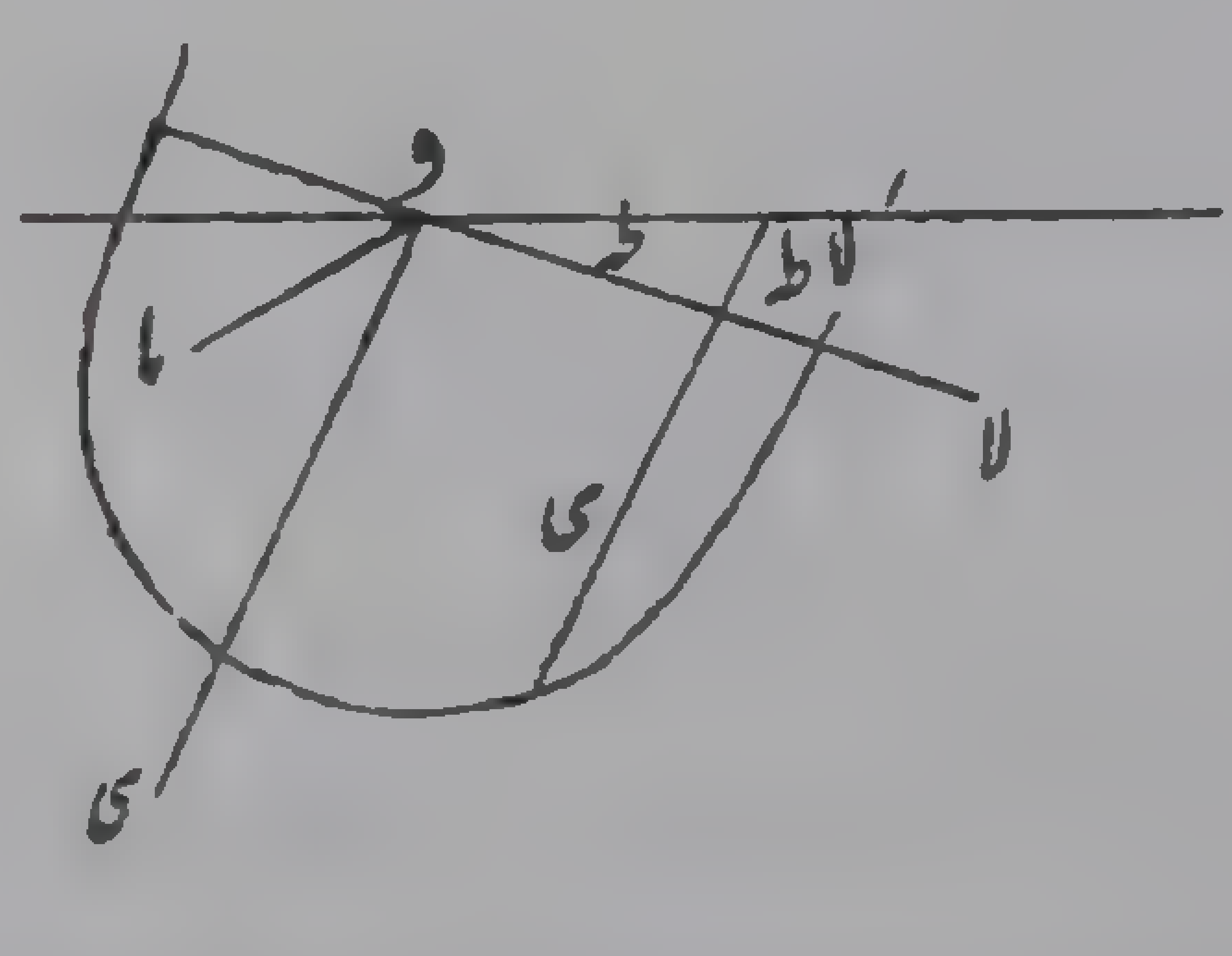
= ج ث ∭ ی فرلا فرما فری

= ج ث ح یَ

جہاں ہٹائے ہوئے مائع کا حجم ح اور اس کے مرکز ہندسی کی گہرائی یَ ہے۔

جب کوئی جسم مائع میں تیر رہا ہو تو اس کو مائع کے اندر رکھ دینے میں جو کام ہوا ہے اس کی وجہ سے اس میں توانائی بالقوہ آجاتی ہے اور اگر مائع متجانس ہو اور جسم اور ہٹائے ہوئے مائع کی کمیتوں کے مرکز ث، ھ ہوں اور ان کی گہرائیاں ط، یَ ہوں تو جسم کی توانائی بالقوہ کا ناپ ج ث ح (یَ - ط) مانا جا سکتا ہے۔ یا جب جسم توازن میں تیر رہا ہو تو ح ث ح × ھ ث [1]

۹۴ — تیرنے والے جسم کو تیراؤ کے مستوی کے کسی محور کے گرد چھوٹے زاویہ ط میں گھمانے میں جو کام ہوتا ہے اُس کو معلوم کرنا۔



[1] یہ صغری محل تشکیل بالکل فرضی ہے جس میں یہ خیال کیا جاتا ہے کہ وہ فضا جس کو جسم گھیرے ہوئے ہے اسی قسم کے مائع سے بھر دی گئی ہے اور جسم کی کل کمیت مائع کی ہموار آزاد سطح پر ہے۔

فرض کرو کہ و ما گردش کا محور اور و ی انتصاباً نیچے کی طرف ہے اور فرض کرو کہ سطوی لا و ی میں جسم کی کمیت کا مرکز ث اور اچھال کا مرکز ھ واقع ہیں۔ فرض کرو کہ ھ اور ث کے محدد علی الترتیب (لاَ، ۰، یَ) اور (ضا، ۰، طا) ہیں۔ توازن کی صورت میں لاَ = ضا

ابتدائی محل میں ہٹائے ہوئے مائع کی وجہ سے توانائی بالقوه

$$= \text{ج ث ح یَ یا } \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث} \iint \text{ی}^2\ \text{فرلا فرما}$$

و ما کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ طہ میں گھماؤ اور فرض کرو کہ محاور و لا و ی جسم کے ساتھ حرکت کرتے ہیں۔

اس منشور کا غرق شدہ طول جسکی عمودی تراشش فرلا فرما ہے ی + لا جیب طہ = ی + لا طہ ہو جاتا ہے اور اس کی کمیت کے مرکز کی گہرائی
(۹۲) $\tfrac{1}{2}$ (ی + لا طہ) جتم طہ ہے۔ اس لئے ہٹائے ہوئے مائع کی وجہ سے توانائی بالقوه میں اضافہ

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث} \iint (\text{ی} + \text{لا طہ})^2 \left(1 - \tfrac{\text{طہ}^2}{2}\right) \text{فرلا فرما} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث} \iint \text{ی}^2\ \text{فرلا فرما}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث طہ}^2 \iint \left(\text{لا}^2 - \tfrac{\text{ی}^2}{2}\right) \text{فرلا فرما} + \text{ج ث طہ} \iint \text{لا ی فرلا فرما}$$

لیکن جسم کے ہٹاؤ کی وجہ سے توانائی بالقوه کا نقصان

$$= \text{ج ث ح (طا جتم طہ + ضا جیب طہ − طا)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{ج ث طہ}^2\,\text{ح طا} + \text{ج ث طہ ح ضا}$$

اس لئے توانائی بالقوه میں کل زیادتی

$$\text{قا} = \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث طہ}^2 \iint \left(\text{لا}^2 - \tfrac{\text{ی}^2}{2}\right) \text{فرلا فرما} + \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث طہ}^2\,\text{ح طا}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث طہ}^2 \left(\text{ا مر}^2 - \text{ح یَ} + \text{ح طا}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ج ث طہ}^2 \left(\text{ا مر}^2 - \text{ح} \times \text{ھ ث}\right) \quad \ldots\ldots\ (1)$$

جہاں جسم کی سطحی تراش کا رقبہ ا اور و ما کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر ر ما ہے۔

اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

ا ر۲ > ح × ھ ث اور استردادی جفت ہوگا

فر قا / فر طہ = ج ث ط (ا ر۲ − ح × ھ ث)

۹۵ — اگر ہٹائے ہوئے مائع کا حجم مستقل ہو اور اگر ہٹائے ہوئے محل میں اچھال کے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط ھ ث کو نقطہ مر میں قطع کرے تو مر کو مرکز مابعد یا پس مرکز کہتے ہیں[1]۔

پس مرکز کے وجود کے لئے تحلیلی شرطیں یہ ہیں

∫∫ (ی + لا طہ) فر لا فر ما = ∫∫ ی فر لا فر ما یا ∫∫ لا فر لا فر ما = ۰

یعنی گردش کا محور و ما سطحی تراش کے مرکز ہندسی میں سے گزرنا چاہیئے۔ (دفعہ ۵۲ کے ساتھ مقابلہ کرو)۔ اور چونکہ اچھال کا نیا مرکز، مستوی لا و ی میں ہونا چاہیئے اس لئے

∫∫ ما (ی + لا طہ) فر لا فر ما = ۰

لیکن ∫∫ ما ی فر لا فر ما = ۰ ∴ ∫∫ لا ما فر لا فر ما = ۰

[1] بعض علماء لفظ پس مرکز کو ذرا وسیع معنوں میں استعمال کرتے ہیں چنانچہ پس مرکز کی تعریف وہ اس طرح کرتے ہیں کہ یہ وہ نقطہ ہے جہاں اچھال کی سطح کے دو متصل عمادوں کا درمیانی اقل فاصلہ ان عمادوں میں سے ایک کو قطع کرتا ہے۔

یعنی محور و ماسطحی تراش کا صدری محور ہونا چاہیئے۔

(۹۳) اس صورت میں یہ ظاہر ہے کہ اگر مر، ث کے اوپر واقع ہو تو جسم کے وزن اور حاصل سیالی دباؤ سے بنا ہوا جفت جسم کو واپس توازن کے محل پر لیجانیکا میلان رکھیگا اور



= ج ث ح × ث مر × طہ

= ج ث ح (ہ مر - ہ ث) طہ

∴ ہ مر = $\frac{ا ر^۲}{ح}$ اور توازن قائم

یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ مر، ث کے اوپر ہو یا نیچے۔

چونکہ پس مرکز اچھال کی سطح کے متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اسلئے عام طور پر ہ پر کی سطح کے صدری انحنا کے دو مستویوں میں اگر ہٹاو لئے جائیں تو ان کے جواب میں دو پس مرکز ہونگے۔ اور اچھال کی سطح کا ایک صدری نصف قطر انحنا ہ مر ہے۔

۹۶ — **مقید اجسام**۔ ایک تیرنے والا جسم ایک ثابت افقی محور کے گرد گھومنے پر مجبور ہے۔ اس صورت پر دفعہ (۹۴) کی طرح غور کیا جا سکتا ہے۔

اگر و ما ثابت محور ہو اور (ضا، عا، طا)، (لَا، مَا، یَ) علی الترتیب ث اور ہ کے محدد ہوں اور و جسم کا وزن ہو تو توازن کی شرط ہوگی

ج ث ح لَا = و ضا

اگر گردش کا محور تیراؤ کے مستوی میں ہو اور جسم کو ایک صغیر زاویہ طہ میں گھمایا جاوے تو ہٹائے ہوئے مائع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

= ½ ج ث طہ^۲ (ا ر^۲ - ح یَ) + ج ث طہ ح لا

اور جسم کے ہٹاؤ کی وجہ سے نقصان

= - ½ طہ^۲ و طا + طہ و ضا

اس لئے توانائی بالقوہ میں کل زیادتی

$$= \frac{1}{2}\text{ ج ث ط}^2 \left(\text{ا ر}^2 - \text{ح ی} \right) + \frac{1}{2}\text{ ط}^2 \text{ و طا}$$

اور توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$\text{ا ر}^2 > \text{ح ی} - \text{و طا} / \text{ج ث}$$

۹۷ — اگر گردش کا محور و، گ گہرائی پر ہو اور تیراو کے مستوی پر اس کے ظل کو ہم محور و مانیں اور اوپر کی طرح فرض کریں کہ محاور جسم کے ساتھ حرکت کرتے ہیں تو و بقدر $\frac{1}{2}$ گ ط^2 کے نیچے اُترتا ہے اور ہٹائے ہوئے مائع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

= ½ ج ث ∬ (ی + لا ط + ½ گ ط²)² (۱ - ½ ط²) فرلا فرما

- ∬ ½ ج ث ی² فرلا فرما

= ½ ج ث ∬ (لا² ط² - ½ ی² ط² + ی گ ط² + ۲ لا ی ط) فرلا فرما

= ½ ج ث ط² (ا ر² - ح ی + ح گ) + ج ث ط ح لاَ (۹۴)

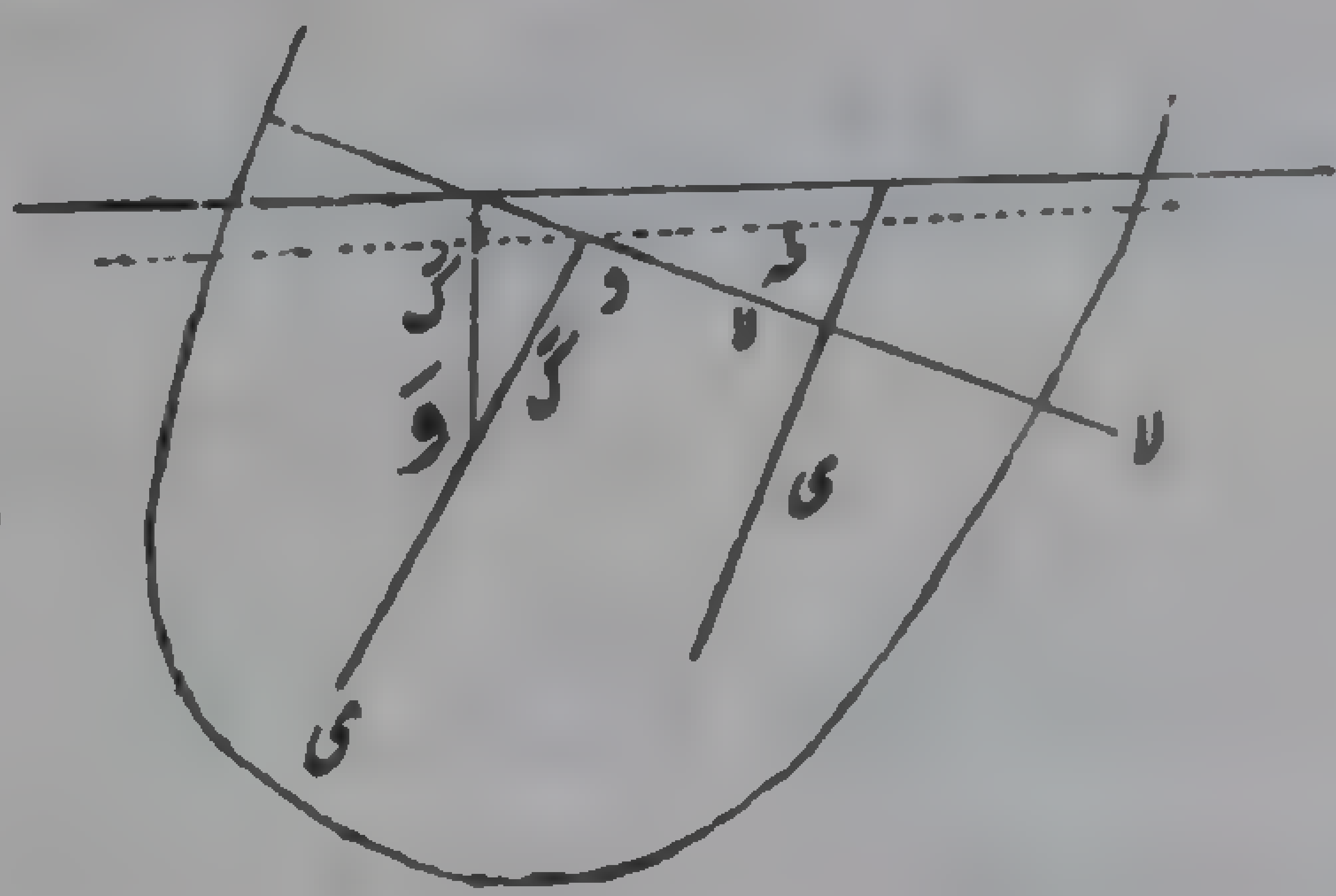
اور جسم پر جاذبۂ ارض نے جو کام کیا وہ

$$= \text{و} \left\{ \text{طا} \left(1 - \frac{1}{2}\text{ ط}^2\right) + \text{ضا ط} + \frac{1}{2}\text{ گ ط}^2 - \text{طا} \right\}$$

اس لئے کل بیرونی کام جو ہوا وہ

= ½ ج ث ط² {ا ر² - ح (ی - گ)} + ½ و ط² (طا - گ)

جہاں سطحی تراش کا رقبہ ا ہے اور تیراؤ کے مستوی پر ثابت محور کا جو ظل ہے اُس کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر ر ہے۔



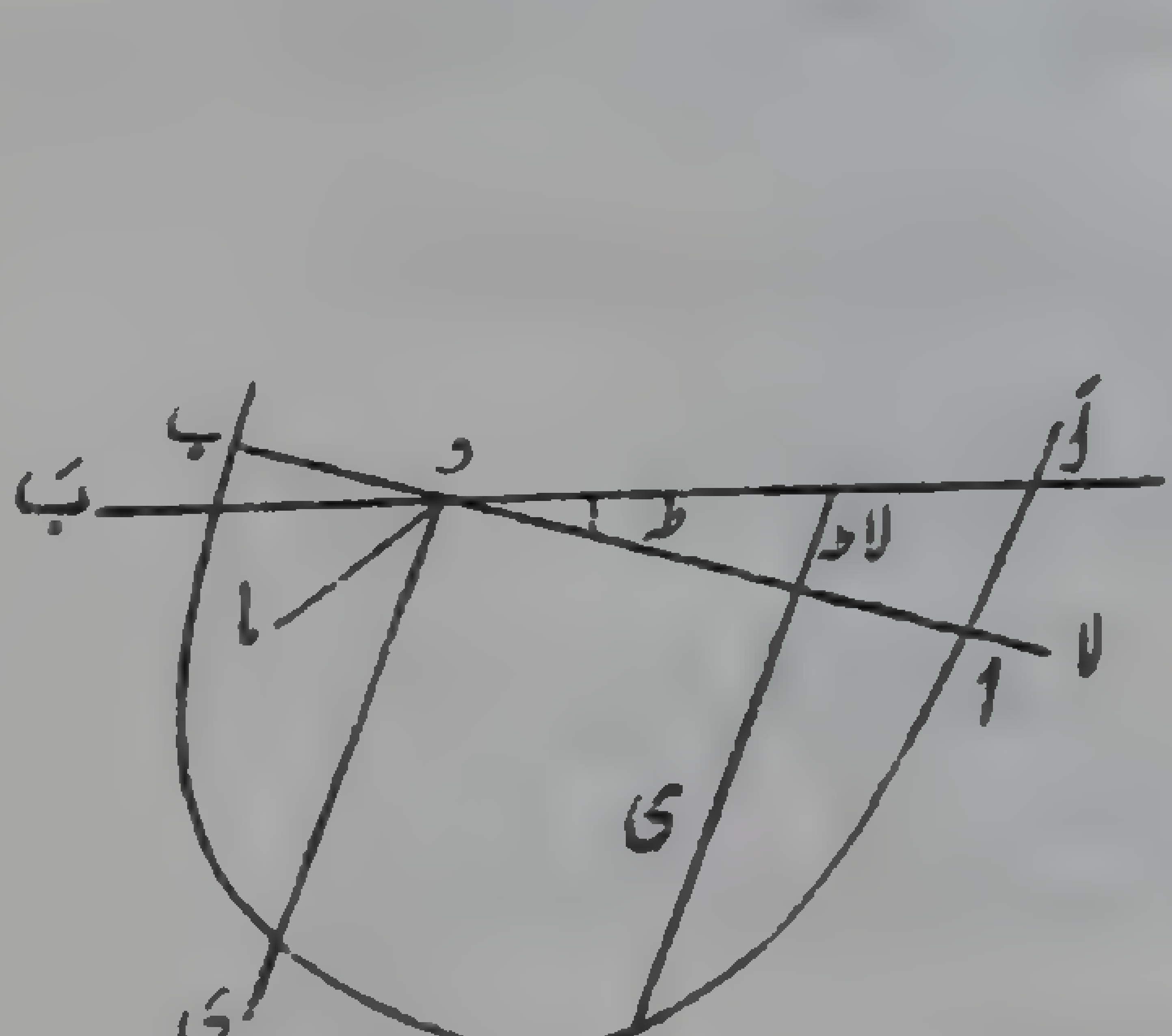
قائمیت کے لئے شرط ہے۔

ا ر ۲ > ح (یَ - گ) - $\frac{\text{و}}{\text{ج ث}}$ (طا - گ)

۹۸ —— غیر متجانس مائع ۔ ایک جسم غیر متجانس مائع میں تیر رہا ہے، تیراؤ کے مستوی میں کے کسی خط کے گرد اس کو گھمانے میں جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو۔ دفعہ (۹۴) کی طرح محاور لو اور وہی ترقیم استعمال کرو۔ ہم لے سکتے ہیں

ث = ثَ (ی) لیکن فرد = ج ث فری

∴ د = ج {ف (ی) - ف (۰)}



دفعہ (۹۳) کے بموجب جسم کو کسی محل میں مائع کے اندر داخل کرنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ ∫∫∫ د فرلا فرما فری ہے جہاں تکمل غرق شدہ حجم پر لیا گیا ہے ۔ جسم کو جب ایک صغیر زاویہ طہ میں گھمایا جائے تو یہ کام ہو جائیگا

$$\iiint$$ دَ فرلا فرما فری + $$\iiint_{\text{-لاط}}$$ دَ فرلا فرما فری

جہاں عنصر فرلا فرما فری پر کا نیا دباؤ دَ ہے اور پہلے تکملہ کی وسعت وہی ہے جو پہلے تھی لیکن دوسرا تکملہ قانون او اَ، ب و بَ کے اندر لیا گیا ہے۔

(۹۵) اب دَ = ج{ف(ی - ½ ی ط² + لاط) - ف(۰)}

= د + ج(لاط - ½ ی ط²) فَ(ی) + ½ ج لا² ط² فً(ی)

∴ ∭ دَ فرلا فرما فری = ∭{دَ + ج ط لا ثَ - ½ ج ط² (ی ثَ - لا² فرثَ/فری)} فرلا فرما فری

قانون سے متعلق تکملہ میں ی ہر جگہ -لاط اور دَ کے جملہ بالا میں ط کی صرف پہلی قوت برقرار رکھنے سے

دَ = ج{ف(ی) - ف(۰) + لاط فَ(ی)}

= ج{ی فَ(۰) + لاط فَ(ی)}

∴ $$\int_{\text{-لاط}}$$ دَ فریَ = ج{- ½ لا² ط² فَ(۰) + لاط ف(۰) - لاط ف(-لاط)}

= ½ ج لا² ط² ثَ(۰) = ½ ج ثَ. لا² ط²

اس لئے ہٹاؤ پیدا کرنے میں مائع کے دباؤں کے خلاف جو کام ہوا وہ توانائی بالقوہ میں اضافہ ہے اور

= ج ط ∭ لا ثَ فرلا فرما فری - ½ ج ط² ∭ (ی ثَ - لا² فرثَ/فری) فرلا فرما فری

+ ½ ج ثَ. ط² ∬ لا² فرلا فرما

لیکن جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ

= و۱ {طا (۱ - ½ ط۲) + ضا ط - طا}

جہاں پہلے کی طرح جسم کی کیت کے مرکز ش کے محدد (ضا، کطا) ہیں

اور　　و ضا = و۱ لآ = ج ∭ لا ث فرلا فرما فری

∴　　ہٹاؤ کے پیدا کرنے میں کل بیرونی کام جو ہوا وہ

= ½ ط۲ {ج ث ∭ لا۲ فرلا فرما + ج ∭ لا۲ فرث/فری فرلا فرما فری - و۱ (تی - طا)} ... (۱)

اگر ی گہرائی پر تراش کا رقبہ ا ہو اور مستوی ما و ی کے ساتھ تراش کا جو خط تقاطع ہے اس کے گرد گردش کا نصف قطر ما ہو تو دوسرے تکملہ پر تکمل بالحصص سے عمل کرنے سے ملیگا

½ ط۲ {ج ث [ا ر۲] + [ج ث ا ر۲] - ج ∫ ث فر/فری (ا ر۲) فری
- و۱ × ھ ش}

جہاں بلحاظ ی کے تکمل خط آب سے زیر ترین ہموار سطح تک لیا گیا ہے۔
یا تکمل کی ترتیب کو الٹ دینے سے کام کا جملہ ہو جاتا ہے

½ ط۲ {ج ث۱ ا۱ ر۱۲ + ج ∫ (زیر ترین سطح سے خط آب تک) ث فر/فری (ا ر۲) فری - و۱ × ھ ش}

جہاں ش۱، ا۱، ر۱ جسم کی زیر ترین افقی تراش سے متعلق ہیں اور ا۱ = ۰

سوائے اُس صورت کے جبکہ جسم کا پیندا مستوی ہو۔
توازن صریحاً قائم ہوگا اگر یہ جملہ مثبت ہو۔

(۹۶) ۹۹ — پس مرکز کے وجود کے لئے ہٹائے ہوئے مائع کی کیت مستقل ہونی چاہیئے اور اچھال کے مرکزیں سے گذرنے والے انتصابی کو ھ ش کو قطع کرنا چاہیئے۔

مستقل کمیت کے لئے شرط یہ ہے

∭ ثَ (ی + لا ط) فرلا فرما فری + ∭ ثَ لا ط فرلا فرما = ∭ ثَ (ی) فرلا فرما فری

یا ∭ (ث + لا ط فرث/فری) فرلا فرما فری + ث ط ∬ لا فرلا فرما = ∭ ث فرلا فرما فری

یا ∭ لا فرث/فری فرلا فرما فری + ث ∬ لا فرلا فرما = ۰

اور دوسری شرط کے لئے ضروری ہے کہ

∭ ثَ (ی + لا ط) ما فرلا فرما فری + ثَ ط ∬ لا ما فرلا فرما = ۰

لیکن

∭ ثَ (ی) ما فرلا فرما فری = ۰

∴ یہ شرط ہو جاتی ہے

∭ لا ما فرث/فری فرلا فرما فری + ث ∬ لا ما فرلا فرما = ۰

دونوں شرطیں پوری ہونگی اگر محور ہی کے گرد تشاکل ہو۔ یا اگر مستوی ماوی میں کے تمام افقی خطوط، متناظر افقی تراشوں کے ہندسی مرکزوں میں سے گذرنیوالے صدری محور ہوں اس طرح کہ تمام گہرائیوں پر

∬ لا ما فرلا فرما = ۰ اور ∬ لا فرلا فرما = ۰

جب یہ شرطیں پوری ہوں اور مر پس مرکز ہو تو استردادی جفت

و۱ × ث مر × ط یا و۱ (ھ مر - ھ ث) ط

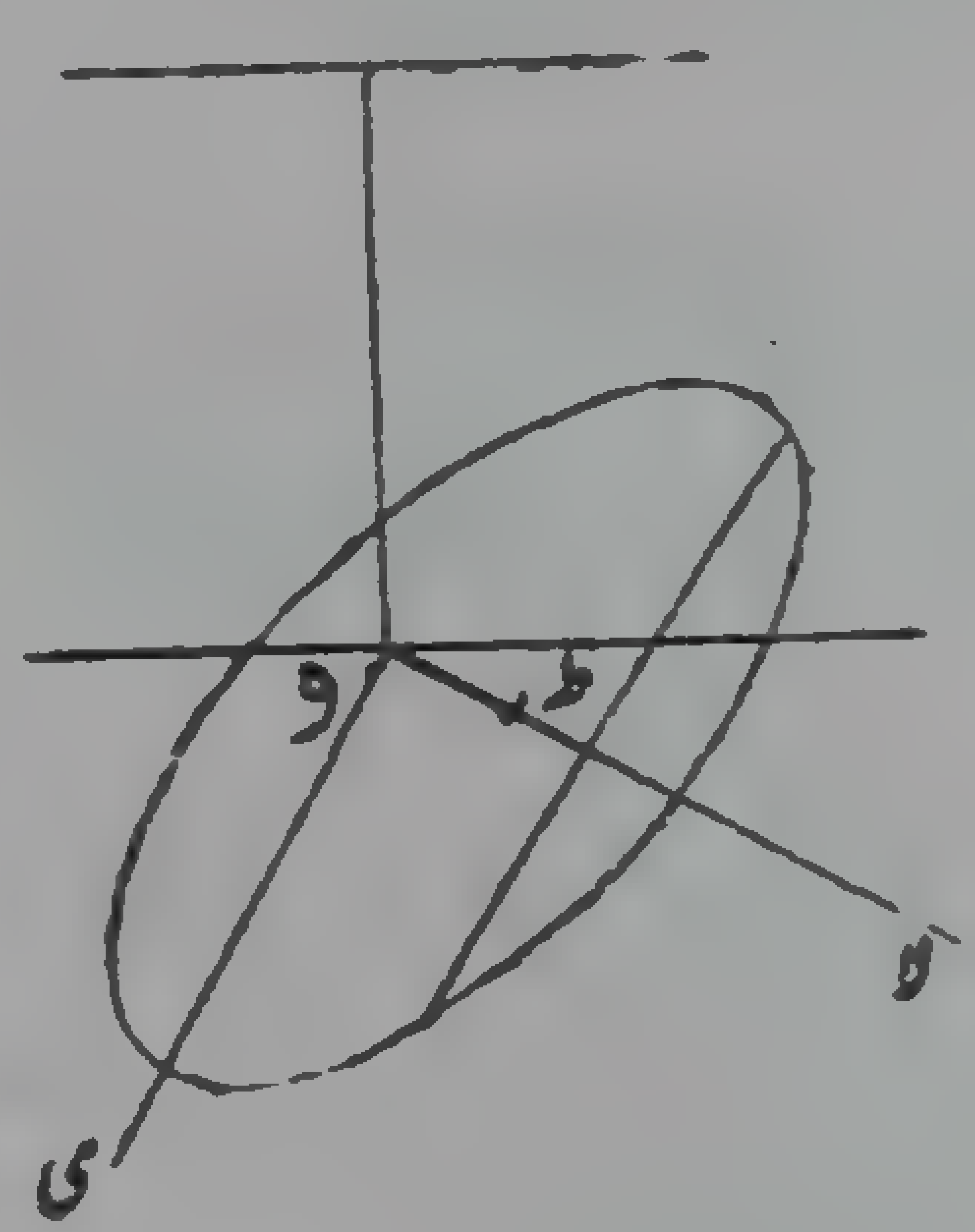
= ط { ج ث ۱ ا ر۲ ۱ + ج ∫ ث فر/فری (۱ ا ر۲) فری - و۱ × ھ ث }

∴ و × ھ ہ = ج { ثَ ا ہ² + ثَ (فر / فری) (ا ہ²) فری }

جہاں تکمل زیریں ترین ہموار سطح سے سطحی تراش تک لیا گیا ہے۔

۱۰۰ — چونکہ دفعہ (۹۳) کا نتیجہ (۱) درست ہے خواہ جسم مائع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ نکلا ہوا اس سلئے گزشتہ دو دفعات کے نتائج بھی ہر ایک صورت میں درست ہیں اور چونکہ دفعہ (۹۴) کا جملہ (۱) دفعہ (۹۸) کے جملہ (۱) کی صرف ایک خاص صورت ہے اسلئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ متجانس مائع کے لئے بھی حاصل شدہ نتائج درست ہیں خواہ جسم مائع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ ہو۔

۱۰۱ — **کلاً غرق شدہ جسم** — ایک جسم غیر متجانس مائع میں کلاً غرق شدہ تیر رہا ہے۔ اس کو کسی افقی محور کے گرد ایک صغیر زاوئے میں گھمانے میں جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو۔



اوپر کی طرح و ا کو گردش کا محور لو اور فرض کرو کہ محاور و لا و ی جسم میں ثابت ہیں۔ نیز فرض کرو کہ و ا کی گہرائی گ ہے اور ث = فَ (گہرائی)

اس طرح توازن کے محل میں

د = ج { ف (ی + گ) ۔ ف (۰) }

اور ہٹائے ہوئے محل میں

دَ = ج { ف (ی ۔ ½ ی ط² + گ + لا ط) ۔ ف (۰) }

= د + ج (لا ط ۔ ½ ی ط²) ث + ½ ج لا² ط² (فرث / فری)

و ا کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ طہ میں گھمانے میں جو کام مائع کے دباؤں کے خلاف کرنا پڑتا ہے وہ

= ∭ (دَ - د) فرلا فرما فری [دفعہ (۹۳)]

= ج طہ ∭ لا ث فرلا فرما فری + ½ ج طہ^۲ ∭ (لا^۲ فرث/فری - ث ی) فرلا فرما فری

جہاں تکمل ہٹائے ہوئے مائع کی کل مقدار کے اندر لیا گیا ہے۔ لیکن ہٹاؤ میں جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ

= و { طا (۱ - ½ طہ^۲) + ضا طہ - طا }

جہاں پہلے کی طرح جسم کی کمیت کے مرکز ث کے محدد (ضا، طا) ہیں۔

اور و ضا = و لَا = ∭ لا ث فرلا فرما فری

اس لئے ہٹاؤ میں کل کام جو کیا گیا وہ

= ½ طہ^۲ { ج ∭ لا^۲ فرث/فری فرلا فرما فری - و (یَ - طا) }

= ½ طہ^۲ { ج ∭ لا^۲ فرث/فری فرلا فرما فری - و × ھ ث }

= ½ طہ^۲ { ج ∫ مر^۲ فرث/فری فری - و × ھ ث }

جہاں تکمل جسم کے بلند ترین نقطہ سے زیر ترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔ (۹۸)

۱۰۲ —— توازن قائم ہوگا اگر جملہ بالا مثبت ہو۔ پس مرکز کا مقام جبکہ اس کا وجود ہو اوپر کی طرح معلوم ہوسکتا ہے۔ پس اگر مر پس مرکز ہو تو استردادی جفت

و × ث مر × طہ یا و (ھ مر - ھ ث) طہ

= { ج ∫ مر^۲ فرث/فری فری - و × ھ ث } طہ

و × ھ مر = ج ∫ مر^۲ فرث/فری فری

یا و × ھ م = ج { ا م۲ ث۱ - ا م۲ ث۲ - ∫ث ث فی فری ا م۲ فری }

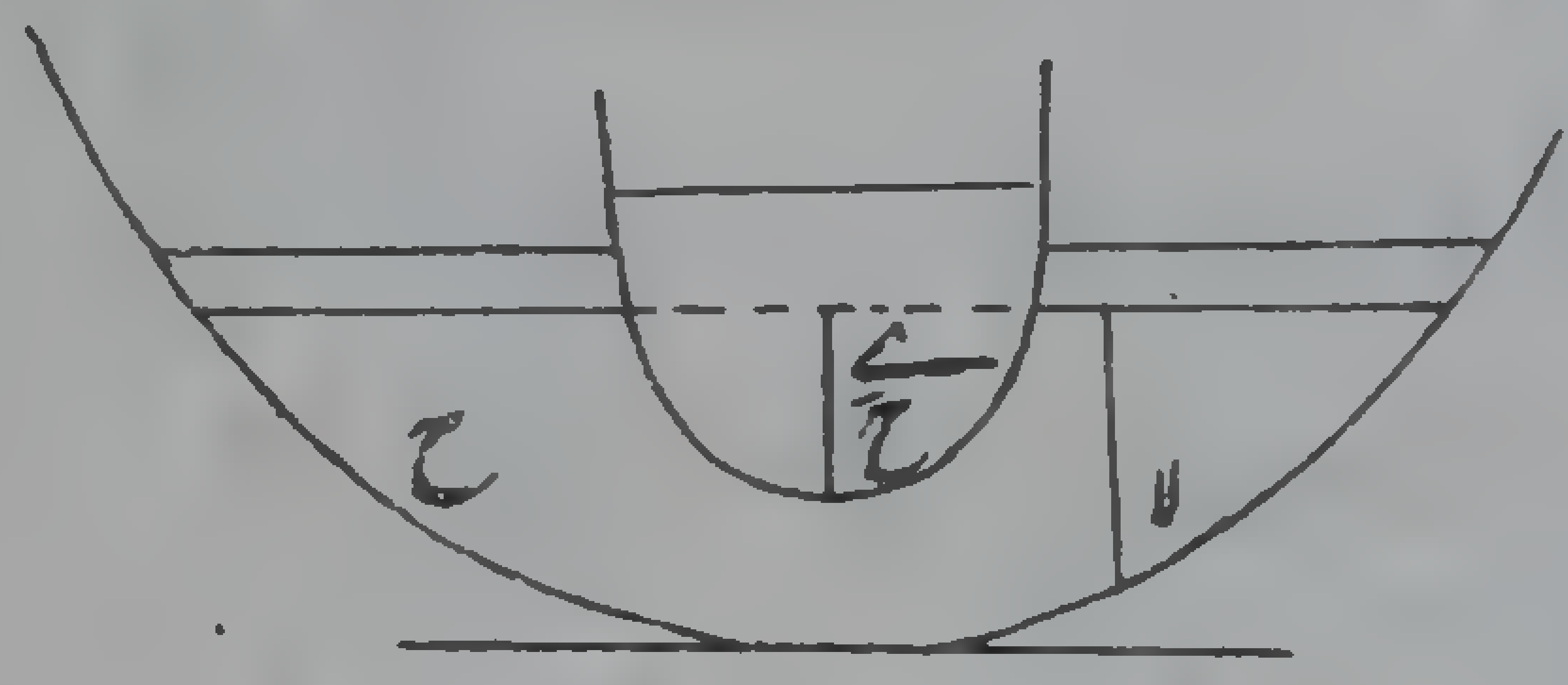
جہاں ا، م، ث۱ اور ا، م، ث۲ جسم کی زیرترین اور بلندترین افقی تراشوں سے متعلق ہیں اور تکمل بلندترین نقطہ سے زیرترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔
اگر جسم اپنے بلندترین یا زیرترین نقطہ پر چپٹا نہ ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

ھ م = ∫ث فی فری (ا م۲) فری / کمیت

جہاں تکمل زیرترین نقطہ سے بلندترین نقطہ تک لیا گیا ہے۔

۱۰۳ — ایک ٹھوس جسم کو مائع میں ڈبونے سے توانائی بالقوہ جمع ہو جاتی ہے۔

اگر ایک ٹھوس جسم ایک برتن میں جس میں مائع ہے ڈبویا جائے تو کام ہوتا ہے اور اس لئے مائع کے مرکز ثقل کے اوپر اٹھ آنے سے توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ مائع کی گہرائی لا ہے، جسم کے غرق شدہ حصہ کی گہرائی ی ہے برتن اور ٹھوس جسم کی متناظر رقبی تراشیں لا اور ی ہیں، مائع کا حجم ح ہے اور ٹھوس جسم کے غرق شدہ حصہ کا حجم حَ ہے۔ تب

ح لاَ = ∫ لا لاَ فر لاَ - ∫ ی ےَ (لا - ی + یَ) فریَ

اور توانائی بالقوہ میں اضافہ ج ث ح لاَ کے تغیر کے مساوی ہے جبکہ

یہ تغیر لا میں اضافے مف لا کی وجہ سے پیدا ہو۔

ج ث = ۱ مانکر یہ تغیر

$$= \text{لا لا مف لا} - (\text{مف لا} - \text{مف ی})\ \text{ح} - (\text{لا} - \text{ی})\ \text{ے مف ی} - \text{ے ی مف ی}$$

اب چونکہ

$$\text{ح} = \int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{لا فز لا} - \int_{\text{ب}}^{\text{ی}} \text{ے فز ی}$$

اس لئے $\text{لا مف لا} = \text{ے مف ی}$

اس لئے $\text{تغیر} = \text{ح}\ (\text{مف ی} - \text{مف لا})$

یہ نتیجہ اس بات کو زیر نظر رکھ کر بھی فوراً حاصل ہو سکتا ہے کہ ح ٹھوس جسم پر کے حاصل انتصابی دباؤ کے مساوی ہے اور مائع کے چڑھاؤ مف لا کی وجہ سے جسم کا اُتار مف ی - مف لا ہے۔

۱۰۴ ـ ایک اسطوانی برتن کے اندر کچھ مائع ہے، ایک جسم اس مائع کے اندر تیر رہا ہے، جسم کی توانائی بالقوہ۔

جسم کو داخل کرنے کے پیشتر برتن کے اندر جو مائع ہے اس کی ہموار یا ساکن سطح کو شمار کی صفر سطح مانو۔ فرض کرو کہ برتن کی عمودی تراش ب ہے اور جسم کی آب تراش جبکہ جسم تیر رہا ہو س ہے۔ فرض کرو کہ توازن کے محل میں غرق شدہ حجم ح ہے۔ ج ث = ۱ لینے سے، ح جسم کے وزن کو بھی تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کسی دوسرے محل میں غرق شدہ حجم ح ہے۔ اس موخر الذکر محل میں پانی کی ہموار سطح بقدر فاصلہ $\frac{\text{ح}}{\text{ب}}$ کے اوپر اٹھ جائیگی۔ پس اگر صفر سطح کے نیچے اچھال کے مرکز کی گہرائی گ ہو تو وزن ح بقدر $\text{گ} + \frac{\text{ح}}{\text{۲ب}}$ بلندی کے اوپر اٹھا دیا گیا ہے اور کام جو ہوا وہ $\text{ح گ} + \frac{\text{ح}^{۲}}{\text{۲ب}}$ کے مساوی ہے۔ اس لئے اگر صفر سطح کے اوپر جسم کے مرکز ثقل کا ارتفاع ق سے تعبیر ہو تو کل توانائی بالقوہ ہوگی

$$\text{ح ق} + \text{ح گ} + \frac{\text{ح}^{۲}}{\text{۲ب}}$$

اب فرض کرو کہ $\text{ح} = \text{ح}_0 + \text{ح}_1$ اور فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے محل میں جسم کے حجم ح_0 کے مرکز ہندسی کی گہرائی گ_0 ہے اُس طرح $\text{ح}\,\text{گ} = \text{ح}_0\,\text{گ}_0 + \text{ح}_1\,\text{ضا}$

جہاں $\text{ضا} = \dfrac{\text{ح}_1}{2\,\text{س}} - \dfrac{\text{ح}_0}{\text{ب}}$ بشرطیکہ ح_1 چھوٹا ہو۔ توانائی بالقوہ ہوگی

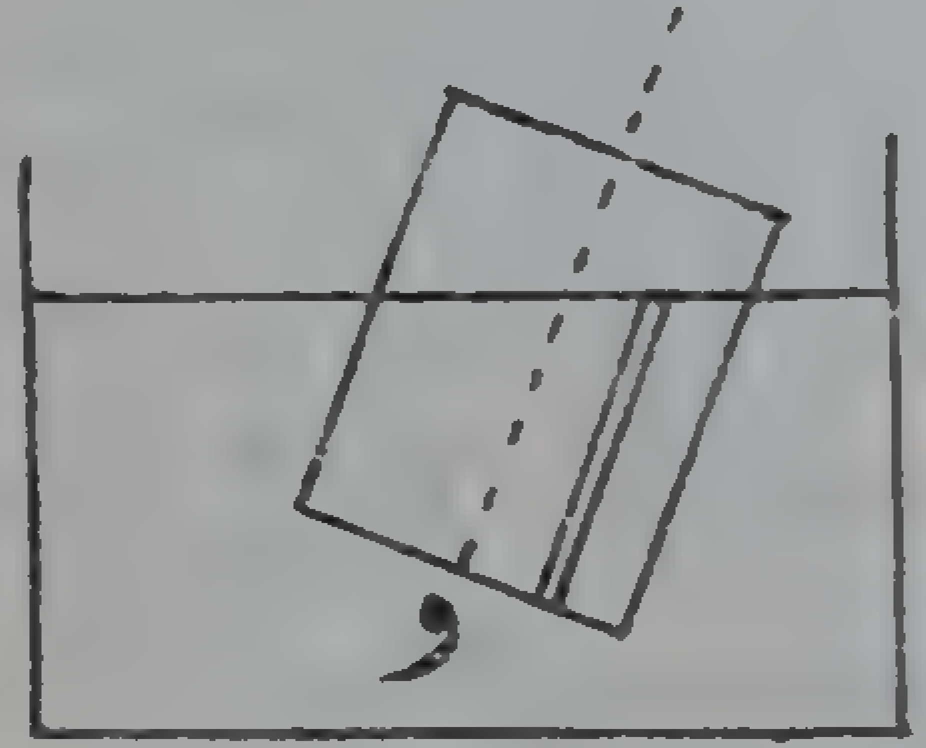
$$\text{ح}_0(\text{ق}+\text{گ}_0) + \text{ح}_1\left\{\frac{\text{ح}_1}{2\,\text{س}} - \frac{\text{ح}_0}{\text{ب}}\right\} + \frac{\text{ح}_0^2}{2\,\text{ب}}$$

$$= \text{ح}_0(\text{ق}+\text{گ}_0) + \text{ح}_1\left(\frac{\text{ح}_1}{2\,\text{س}} - \frac{\text{ح}_1+\text{ح}_0}{\text{ب}}\right) + \frac{(\text{ح}_1+\text{ح}_0)^2}{2\,\text{ب}}$$

$$= \text{ح}_0\,\text{طا} + \tfrac{1}{2}\,\text{ح}_1^2\left(\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ب}}\right) + \text{مستقل}$$

جہاں طا اُس انتصابی فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز ثقل اور اچھال کے مرکز کے درمیان ہے۔ (۱۰۶)

۱۰۵۔ مثال۔ ایک اسطوانہ دوسرے اسطوانہ میں تیر رہا ہے۔ تیرنے والے اسطوانہ کے قاعدہ کے مرکز ہندسی کو مبدا و لو اور فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ ا ہے۔ نیز فرض کرو کہ مائع کی سطح کے مستوی کی مساوات



$$\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ی} = \text{ع}$$

ہے جہاں اوپر وار انتصابی خط کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں۔

تب $\text{ح}_0 = \dfrac{\text{ا}\,\text{ع}}{\text{ن}}$ اور اگر توازن کے محل میں اچھال کے مرکز کا مقام ھ$_0$ ہو تو خط و ھ$_0$ کا ظل اوپر وار انتصابی پر ہوگا

$$\frac{1}{\text{ح}_0}\iint(\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \tfrac{1}{2}\,\text{ن}\,\text{ی})\,\text{ی}\;\text{فرلا}\;\text{فرما}$$

= (۱/ح) ∬ ½ (ع + ل لا + م ما) (۱/ن) (ع − ل لا − م ما) فرلا فرما

= ۱/(۲ن ح) ∬ {ع² − (ل لا + م ما)²} فرلا فرما

= ۱/(۲ن ح) {ا ع² − (عہ ل² + بہ م² + ۲ جہ ل م)}

جہاں عہ = ∬ لا² فرلا فرما، بہ = ∬ ما² فرلا فرما، جہ = ∬ لا ما فرلا فرما

اور تکملے عمودی تراش پر لئے گئے ہیں۔

نیز اگر جسم کے مرکز ثقل ث کے محدد ا، ب، ج ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

ح. طا = ح (ل ا + م ب + ن ج) − ۱/(۲ن) {ا ع² − (عہ ل² + بہ م² + ۲ جہ ل م)}

اور س = ا/ن ، اس طرح توانائی بالقوہ ہوگی

½ ح² (ن/ا − ۱/ب) + ح (ل ا + م ب + ن ج) + ۱/(۲ن) (عہ ل² + بہ م² + ۲ جہ ل م)
− ½ (ن ح²/ا) + مستقل

مثلاً فرض کرو کہ ا = ب = ۰، اس طرح ث، مرکز ہندسی کے خط وی پر واقع ہوگا۔ لکھو ح = ا ف جہاں ف انتصابی محل میں ڈوبنے کی گہرائی ہے تب توانائی بالقوہ ہوگی

½ ح² (ن/ا − ۱/ب) + ½ ن ا ف (۲ج − ف) + ۱/(۲ن) (عہ ل² + بہ م² + ۲ جہ ل م)

ایسی صورت میں جبکہ اسطوانہ تقریباً انتصابی ہو ہم تقریباً ن = ۱ − ½ (ل² + م²) رکھتے ہیں۔ اور ل² اور م² کے سر ہوجاتے ہیں

½ {عہ − ½ ا ف (۲ج − ف)} اور ½ {بہ − ½ ا ف (۲ج − ف)}

پس قائمیت کے لئے $\frac{1}{2}$ اف (۲ج - ف) کو لازماً تراش کے جمود کے کم سے کم معیار سے کم ہونا چاہیئے۔

مزید براں اگر تراشش دائرہ یا کوئی ایسی شکل ہو جس کے لئے ع = ب، ج = ۰ تو توانائی بالقوہ ایسے محل میں جب محور انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے یہ ہوگی

$$\frac{1}{2}\,\text{ح}^2\left(\frac{\text{جم ط}}{\text{ا}} - \frac{1}{\text{ب}}\right) + \frac{1}{2}\,\text{جم ط}\;\text{اف}\,(\text{۲ج} - \text{ف}) + \frac{1}{2}\,\text{ع}\,\frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جم ط}}$$

ہٹائے ہوئے حجم کو مستقل لینے سے ح = ۰، اس طرح مائل محل میں توازن کے لئے لازماً (۱۰۱)

$$-\text{اف}\,(\text{۲ج} - \text{ف}) + \text{ع}\,(\text{۲} + \text{مس}^2\,\text{ط}) = \text{۰}$$

جس سے ط کی ایک حقیقی قیمت ملتی ہے جبکہ

$$\frac{1}{2}\,\text{اف}\,(\text{۲ج} - \text{ف}) > \text{ع}$$

یعنی جبکہ انتصابی محل غیر قائم ہے۔

امثلہ

۱ــــ پانی سے بھاری شے کا ایک برتن ہے جس کو اوندھا کر کے پانی کی سطح پر رکھا گیا ہے، اس میں اتنی کافی ہوا ہے کہ وہ تیر سکتا ہے۔ اگر اسکو کچھ فاصلے میں پانی کے اندر ذرا نیچے ڈھکیل دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ توازن کے ایسے محل میں ہوگا جو انتصابی ہٹاؤ کے لئے غیر قائم ہے۔

۲ــــ ایک ٹھوس مکافی نما اپنے محور پر ایک عمود وار ستوی سے محدود ہے۔ اگر یہ تیر رہا ہو اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہو اور راس پانی میں غرق ہو تو ہٹائے ہوئے مائع کے مرکز ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع وتر خاص کے نصف کے مساوی ہوگا۔

۳ــــ ایک مخروط جس کا زاویہ راس ۶۰° ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا پس مرکز

تیراؤ کے مستوی میں واقع ہوگا اور اس کا توازن قائم ہوگا بشرطیکہ اس کی کثافت اضافی $> \frac{27}{64}$ ۔

۴ ـــــ ایک متساوی الساقین نانہ اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا قاعدہ افقی ہے اور اس کی دھار پانی میں غرق ہے ۔ ثابت کرو کہ ایسے ہٹاؤ کے لئے جو دھار کے علی القوائم مستوی میں وقوع پذیر ہو توازن قائم ہوگا اگر فانہ کی کثافت اور سیال کی کثافت کی باہمی نسبت اس نسبت جم۴ عہ : ا سے بڑی ہو جہاں ۲ عہ فانہ کا زاویہ ہے

۵ ـــــ ایک بند اسطوانی ظرف برف سے ایک چوتھائی بھر دیا گیا ہے ۔ اور انتصابی محور کے ساتھ پانی میں اسے تیرنے کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے ظرف کا وزن اُس پانی کے وزن کا ایک چوتھائی ہے جو اس میں سما سکتا ہے ۔ برف کے پگلنے سے پہلے اور بعد توازن کی نوعیت کی جانچ کرو ۔ جبکہ تپش کی تبدیلی کی وجہ سے حجم کی تبدیلی نظرانداز کر دی جائے ۔

۶ ـــــ ایک ٹھوس جسم دوہرے مخروط کی شکل کا ہے اور دو مساوی دائری رخوں سے محدود ہے اور اپنے سے دوچند کثافت کے مائع میں افقی محور کے ساتھ تیر رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا یا غیر قائم اگر نصف زاویہ راس بالترتیب ۶۰° سے کم ہو یا زیادہ ۔

۷ ـــــ ایک اسطوانی جہاز کی عمودی تراشش ، ل وتر خاص کے دو مساوی مکافیوں کی دو مساوی قوسیں ہیں جو پیندے پر مس کرتی ہیں ، پیندا ان مکافیوں کا مشترک راس ہے اور اس طرح جہاز کے پہلو بلحاظ پانی کے مقعر ہیں ۔ جہاز سیدھا تیر رہا ہے اور اس کا پیندا گ گہرائی پر ہے ۔ ثابت کرو کہ پیندے کے اوپر لبس مرکز کا ارتفاع ہے

$$گ \left(\frac{3}{4} + \frac{گ^2}{ل^2} \right)$$

۸ ـــــ ایک گردشی مجسم کے کسی قطعہ کو جو قائم تراش سے پیدا ہوتا ہے مائع میں غرق

کرنے سے اچھال کے مرکز اور پس مرکز کا درمیانی فاصلہ ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔ خواہ قطعہ کی بلندی کچھ ہی ہو، گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو۔

۹ــــ پانی پارہ پر ساکن ہے اور ایک مخروط اس قدر وزنی ہے کہ جب تک اس کا راس پارہ کے اندر نہ گھس جائے یہ ساکن نہیں رہ سکتا۔ مخروط کی کثافت معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے۔

۱۰ــــ اگر تیرنے والا جسم اسطوانہ ہو جس کا محور انتصابی ہے اور جس کی کثافت اضافی، مائع کی کثافت اضافی کے ساتھ نسبت ث رکھتی ہے تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر قاعدہ کے نصف قطر اور بلندی کی باہمی نسبت ۲ث(۱-ث)$^{\frac{1}{2}}$ سے بڑی ہو۔ (۲۱)

۱۱ــــ مکافی نما شکل کا یکساں خول انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا تین چوتھائی حصہ پانی کے نیچے غرق رہتا ہے جبکہ اس کو محور کی ½ گہرائی تک ایسے مائع سے بھر دیا جائے جس کی کثافت ۵ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۱۲ــــ گردشی مکافی نما کی شکل کے ایک ظرف میں پانی ہے اور یہ ظرف ایک ثابت کھردرے کرہ پر ساکن ہے اس طور پر کہ اس کا راس کرہ کے بلند ترین نقطہ پر ہے۔ توازن کے قائم ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۱۳ــــ ایک بے وزن اسطوانی خول میں مائع ہے اور یہ خول دوسرے مائع میں تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ اندرونی مائع کی کثافت کو بیرونی مائع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ایک سے کم ہو اور اس نسبت ثناہ کے نصف سے بڑی ہو جو اسطوانہ کے نصف قطر کو اندرونی مائع کی گہرائی کے ساتھ ہے۔

۱۴ــــ ایک نصف کروی خول کو جس میں مائع ہے ایک ثابت کھردرے کرہ کے راس پر رکھدیا گیا ہے جس کا قطر خول کے قطر کا دوچند ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ خول کا وزن مائع کے دوچند وزن سے بڑا یا چھوٹا ہو۔

۱۵ــــ ایک گردشی جسم اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو جبکہ پس مرکز کا مقام مائع کی کثافت پر منحصر نہ ہو۔

۱۶ــــ ایک مخروطی خول نیچے دار راس کے ساتھ غیر قائم توازن میں تیر رہا ہے۔

توازن قائم بنانے کے لئے اس میں کتنا پانی ڈالدیا جائے۔

۱۷۔۔۔۔ ایک ٹھوس مخروط مائع میں اس طرح رکھدیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا راس نیچے وار برتن کے قاعدہ پر جس میں مائع ہے ٹکا ہوا ہے۔ اگر مائع کی گہرائی مخروط کے ارتفاع کا نصف ہو اور اس کی کثافت مخروط کی کثافت کا چار گنا ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر مخروط کا زاویہ راس ۱۲۰° سے بڑا ہو۔ ٹھوس مخروط کی بجائے اسی ارتفاع کا ایک پتلا مخروطی خول رکھدیا گیا ہے جس کا زاویہ راس ۹۰° ہے اور جس کے اندر محور کے وسطی نقطہ کی ہموار سطح تک مائع ہے اور اس مائع کی کثافت بیرونی مائع کی کثافت کا نصف ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر خول کا وزن اس کے اندرونی مائع کے وزن کے تین چوتھائی سے کم ہو۔

۱۸۔۔۔۔ ایک اسطوانی ظرف میں جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے پانی ہے۔ اس ظرف کو ایک ثابت کھردرے کرہ کے راس پر رکھدیا گیا ہے اسطور پر کہ اس کے قاعدہ کا مرکز کرہ کو مس کرتا ہے۔ صغیر ہٹاؤ کے لئے قائمیت کی شرط معلوم کرو۔ اور اگر اس قسم کے ہٹاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کرو کہ چھوٹے محدود ہٹاؤں کے لئے یہ توازن غیر قائم ہوگا۔

۱۹۔۔۔۔ ایک گردشی مجسم کی شکل معلوم کرو جو انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے بطور پر کہ مجسم کے زیر ترین نقطہ سے پس مرکز اور اچھال کے مرکزوں کے فاصلوں کے درمیان مستقل نسبت رہتی ہے خواہ مائع کی کثافت کچھ ہی ہو۔

۲۰۔۔۔۔ ایک نصف دائری اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دوچند ہے ساکن ہے۔ اگر یہ اسطوانہ اُس خط کے گرد حرکت کر سکے جو انتصابی مستوی رخ اور سطح کا خط تقاطع ہے تو قائمیت کی شرط معلوم کرو۔

۲۱۔۔۔۔ ایک قائم مستدیر مخروط افقی محور کے ساتھ ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دوچند ہے تیر رہا ہے۔ اس کے راس کو مائع کی سطح میں ایک ثابت نقطہ کے ساتھ وصل کردیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ قائمیت کے لئے زاویہ راس کو ۱۲۰° سے کم ہونا چاہیئے۔

۲۲ —— ایک اسطوانی ظرف اپنے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک افقی محور کے گرد حرکت کرسکتا ہے، اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہو۔ اگر اس میں پانی ڈالدیا جائے تو ثابت کرو کہ ابتدا میں توازن غیر قائم ہوگا۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ کافی پانی ڈالنے سے توازن قائم بنانا ممکن ہو۔ (۱۰۳)

۲۳ —— دئے ہوئے وزن کا ایک مخروطی ظرف اپنے افقی قاعدہ کے ایک قطر کے گرد حرکت کرسکتا ہے، اس کو ایک وزن دار سیال سے جزءً بھر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا اگر مخروط کا نصف زاویہ راس $< 30^\circ$ لیکن اگر زاویہ اس سے بڑا ہو تو معلوم کرو کہ توازن کب قائم ہوگا اور کب غیر قائم۔

۲۴ —— پانی ایک ظرف میں ہے جس کا قاعدہ افقی ہے۔ اس میں ایک مکافی نما ہے جس کا راس ظرف کے قاعدہ پر ٹکا ہوا ہے۔ مکافی نما کو سیال اور قاعدہ جزءً جزءً تھامے ہوئے ہیں۔ مکافی نما کی کثافت نوعی پانی کی کثافت کا $\frac{4}{9}$ ہے اور اس کے محور کے طول کو وتر خاص کے ساتھ نسبت ۹ : ۸ ہے۔ سیال کی کم سے کم گہرائی معلوم کرو جس کے لئے توازن قائم ہوگا۔

۲۵ —— ایک مکافی نما پیالہ جس کا وزن و ہے ایک افقی میز پر کھڑا ہے اس کے اندر پانی کی کچھ مقدار ہے جس کا وزن ن و ہے۔ اگر پیالہ اور اس کے اندر کے پانی کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ مکافی کا وتر خاص

$$< ۲ (ن + ۱) ف$$

۲۶ —— ایک گردشی مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اس کے محور کے ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھنے سے اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈبویا گیا ہے۔ مجسم کی شکل معلوم کرو کہ توازن ہمیشہ لتعدیلی رہے۔

۲۷ —— ایک ٹھوس مخروط جس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے ایک محور کے گرد جو اس کے تکوینی خط پر منطبق ہوتا ہے حرکت کرسکتا ہے۔ کس گہرائی تک اس نظام کو پانی میں غرق کیا جائے کہ مخروط کا توازن قائم ہو۔

۲۸ —— کاگ کا ایک ٹھوس جسم ایسی سطح سے محدود ہے جس کی تکوین ناقص

کے ایک ربع کو محور اعظم کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔ یہ جسم مادہ میں اسکے تک غرق ہے۔ اگر صغیر زاوی ہٹاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲ ز^{۴} + ۴ ز^{۳} + ۲ ز^{۲} - ز - ۲ = ۰ \text{، (ز = خروج المرکز)}$$

۲۹ —— ایک ٹھوس مخروط جس کا زاویہ راس ۲ عہ، ۶۰° سے کم ہے ایک چکنے سیدھے تار کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور اس کے محور پر عمود ہے حرکت کر سکتا ہے۔ اگر تار کو مائع کی سطح میں رکھا جائے تو ثابت کرو کہ مخروط قائم توازن کے محل میں ہوگا۔ جبکہ اس کا محور، افق کے ساتھ زاویہ $جب^{-۱}$ (۲ جب عہ) کا میلان رکھتا ہو۔

۳۰ —— ثابت کرو کہ تیرنے والے جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد چھوٹے زاویہ طہ میں سے گھمانے میں یہ کام کرنا پڑتا ہے

$$\frac{۱}{۲} ج ث \left(ا ر^{۲} + ا ب^{۲} - ف ح \right) طہ^{۲}$$

جہاں جسم اور ہٹائے ہوئے مائع کے مراکز ثقل کا درمیانی فاصلہ ف ہے اور جسم کے مرکز ثقل اور تیراؤ کے مستوی کے رقبہ کے مرکز ثقل کے درمیان افقی فاصلہ ب ہے۔

۳۱ —— ایک مکافی نما پیالہ جس کا وتر خاص ۴ ا ہے اور جس کی کمیت کا مرکز راس سے ۲ ا فاصلہ پر ہے دو مائعات میں تیر رہا ہے جن کی کثافتیں ثہ اور ث ہیں اور (ثہ > ث) ثابت کرو کہ جسم کو ایک افقی محور کے گرد چھوٹے زاویہ طہ میں گھمانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$\frac{۲}{۳} \, ۴ ا ج \, طہ^{۲} \left\{ ف^{۳} (ثہ - ث) + (ف + فَ)^{۳} ث \right\}$$

جہاں ف، فَ محور کے وہ طول ہیں جو سیالوں میں غرق ہیں۔

۳۲ —— ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث سیال میں اس طرح تیر رہا ہے (۱۰۴)
کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے قاعدہ افقی ہے، اور اس کے رقبہ کا $\frac{۱}{۴}$ حصہ

سیال کے نیچے غرق ہے پس اس کا مرکز ثقل پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ دریافت کرو کہ توازن حقیقت میں قائم ہے یا غیر قائم۔

۳۳ — گردشی مکافی نما کی شکل کا ایک مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اگر جمود کا مرکز پس مرکز پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا۔

۳۴ — لا ما کے متوازی ایک مستوی سے سطح ج ما^2 = ی (ا^2 - لا^2) کو قطع کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے وہ اپنے سے ن گنی کثافت والے سیال میں تیر رہا ہے۔

اگر کسی انتصابی مستوی میں صغیر زاوئی ہٹاؤ کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن^{\frac{۲}{۳}} = ۱ + \frac{۵}{۸} \frac{ا^۲}{ج^۲}$$

۳۵ — ایک متساوی الساقین مثلثی پترا اب ج ایک مائع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا قاعدہ اب افقی ہے اور مائع کی سطح کے اوپر واقع ہے۔ اگر مائع کی سطح کے نیچے ج کی گہرائی گ ہو تو ج کے اوپر پس مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{۱}{۲} گ قط^۲ \frac{ج}{۲}$$

۳۶ — ایک ناقصی پترا ایک مائع میں نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا عرضی محور (۲ ا) انتصابی ہے۔ مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ ثابت کرو کہ پس مرکز کی گہرائی ۳۲ ا ز^2/۱۵π ہے۔ جہاں ز، خروج المرکز ہے۔

۳۷ — نصف قطر ا کا قائم مستدیر اسطوانہ ایک مائع میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا طول ج مائع میں غرق ہے اگر ی گہرائی پر کثافت ف (ی) ہو تو ثابت کرو کہ مرکز ما بعد کی گہرائی ہے

$$\frac{\int_{ب}^{ج} ی\, فہ(ی)\, فری - \frac{1}{2}\, ا^2\, فہ(ج)}{\int_{ب}^{ج} فہ(ی)\, فری}$$

۳۸ —— ایک گردشی مکافی نما، ایک مائع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے — ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا۔ بموجب اس کے کہ ۴ج، ۳ (م + ا) سے چھوٹا ہو یا بڑا، جہاں محور کا طول ج، اس کا طول غرق شدہ ا، اور تکوینی مکافی کا وتر خاص م ہے۔

۳۹ —— ایک چپٹا کرہ نما (Oblate Spheroid) ایک مائع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اور اس کا محور انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی سطح سے اوپر مرکز مابعد کا ارتفاع ہے

$$\frac{5}{8}\,\frac{ا^2 - ب^2}{ب}$$

۴۰ —— ایک ٹھوس گردشی مکافی نما اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی، راس نیچے وار اور ماسکہ مائع کی سطح میں ہے، مائع کی کثافت ی گہرائی پر ۔ (ا + ی) ہے جہاں تکوینی مکافی کا وتر خاص ۴ ا ہے۔ ثابت کرو کہ راس سے پس مرکز کا فاصلہ $\frac{21}{8}$ ا ہے۔

۴۱ —— ایک مخروط نیچے وار راس کے ساتھ مائع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ اگر مخروط کی کثافت مائع کی اس کثافت کے مساوی ہو جو مخروط کے ارتفاع کے $\frac{1}{5}$ گہرائی پر ہے تو مخروط کا زاویہ راس جبکہ توازن تعدیلی ہو مساوات

$$جم^2 عہ = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

سے حاصل ہوگا۔

۴۲ ——— ف ارتفاع اور ۴ ا وتر خاص کا ایک ٹھوس مکافی نما انتصابی محل میں ایک مائع کے اندر اس طرح متوازن ہے کہ اُس کا راس نیچے وار ہے اور یہ اپنے راس کے گرد جو مائع کی سطح کے نیچے ج گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر مکافی نما کی کثافت کو اس کے راس پر کے مائع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت (۱۰۵)

ہے وہ $\dfrac{\text{ج}^{3} + 4\,\text{ا}\,\text{ج}^{2}}{4\,\text{ف}^{3}}$ سے کم ہو۔

۴۳ ——— نصف زاویہ راس عہ کا ایک قائم مستدیر ٹھوس مخروط کُلّاً غرق شدہ ایک مائع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس اوپر وار اور محور انتصابی ہے۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور مائع کی سطح کے نیچے اس کے راس کی گہرائی ب ہو تو ثابت کرو کہ راس سے بس مرکز کا فاصلہ

$$= \frac{3}{5}\,\text{ف} \times \frac{5\,\text{ب} + 4\,\text{ف} - \text{ف}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ}}{4\,\text{ب} + 3\,\text{ف}}$$

۴۴ ——— ڈھلے ہوئے لوہے کی یکساں موٹی چادر کا ایک اسطوانی مبیا جس کا نصف قطر ا فٹ اور وزن و پونڈ ہے پانی میں سیدھا تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ثقل نچلے رخ کے اوپر

$$\frac{49\,\text{ا}^{2}}{\text{و}} + \frac{\text{و}}{392\,\text{ا}^{2}}$$

سے بلند تر نہیں ہو سکتا۔

نیز ثابت کرو کہ اس کا وزن خواہ کچھ ہی ہو اس کا بس مرکز نچلے رخ کے اوپر ۷، ۷ × ا فٹ سے زیادہ بلند رہتا ہے۔

۴۵ ——— ایک اسطوانی پیالہ یکساں پتلی ڈھلی ہوئی دھات کی چادر سے بنایا گیا ہے پیالہ کی تراش دائری ہے اور اس کا قاعدہ چپٹا اور منہ کھلا ہوا ہے۔ اس کا طول قاعدہ کے نصف قطر کا $\frac{1}{2}$ ۴ گنا ہے اور پیالہ میں جتنا پانی سما سکتا ہے اس کا وزن

و ہے۔ ثابت کروکہ پیالہ انتصابی پہلوؤں کے ساتھ قائم توازن میں پانی کے اندر نہیں تیر سکتا اگر اس کا وزن (۰۲۹ء) و اور (۸۷۱ء) و کے درمیان واقع ہو۔

اگر پیالہ کا وزن ۲/۵ و ہو تو اس میں پانی ڈالکر اس کے توازن کو قائم رکھ سکتے ہیں تاکہ انتصابی پہلوؤں کے ساتھ یہ تیرے بشرطیکہ پیالہ میں جو پانی ڈالا جائے اُس کا وزن ۱/۲۷ و اور ۳/۵ و کے درمیان ہو۔

۴۶ ـــــ ایک تختی جس کی کثافت ثہ ہے قطع مکافی کی شکل کی ہے۔ اس کا وتر خاص ۴ ا ہے اور یہ راس سے ف فاصلہ پر کے دوہرے معین سے محدود ہے۔ یہ تختی ایک مائع میں جسکی کثافت ث ہے اس طرح تیر رہی ہے کہ اسکی مستوی سطح انتصابی ہے۔ اگر

۳ ف (۱ - کہ) > ۱۰ ا

اور ف (۱ - کہ) + ۵ ا > [۵ کہ ف {۳ ف (۱ - کہ) - ۱۰ ا}]^۱/۲

تو ثابت کروکہ قائم توازن کے دو محل ہیں جن میں محور، انتصابی خط کے ساتھ زاویہ

مس^-۱ { ۳ ف / ۵ ا (۱ - کہ) - ۲ }^۱/۲

بناتا ہے۔ جہاں کہ^۲ = ثہ^۲ / ث^۲

۴۷ ـــــ ایک جسم دو مائعات میں جن کی کثافتیں ث اور ث + ثہ ہیں آزادانہ تیر رہا ہے۔ آزاد سطح اور مشترک سطح سے جسم کی جو تراشیں حاصل ہوتی ہیں اُن کے رقبے عہ اور عہَ ہیں اور ان کے مراکز ثقل ج اور جَ ہیں۔ خفیف ہٹاؤ کے لئے ثابت کروکہ ہٹائے ہوئے سیال کی کمیت وہی رہیگی اگر گردش کا محور اُس انتصابی مستوی میں واقع ہو جو ج جَ کو نسبت ثہ/عہ : ث/عہَ میں یا ثہ (۱/عہ - ۱/ا) : ث (۱/عہَ - ۱/اَ) میں تقسیم کرتا ہے بموجب اس کے کہ مائعات غیر محدود ہیں یا ایک ایسے ظرف میں ہیں جس کو مستویوں عہ اور عہَ سے تراشنے سے تراشوں کے رقبے ا اور اَ ملیں۔

۴۸ —— ایک دوہرا دخانی جہاز دو مساوی اور متشابہ جہازوں کو ایک دوسرے کے ساتھ طولاً ملا کر بنایا گیا ہے، ہر ایک میں ایک ہی طرح کا ہم وزن بوجھ لادا گیا ہے۔ اگر علیحدہ جہازوں کی صورت میں پہلو پر لڑھکنے کے لئے مرکزِ ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع د ہو تو ثابت کرو کہ دوہرے جہاز کی صورت میں یہ ارتفاع

$\text{د} + \frac{\text{ب}^2\,\text{ا}}{\text{ح}}$ ہوگا جہاں تیراؤ کے مستوی کا رقبہ ا کسی ایک کا حجم غرق شدہ ح اور وسطی مستویوں کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔

۴۹ —— ایک منشوری جسم کے رخ یا پہلو خطِ آب کے نزدیک انتصابی ہیں اس کو اس طرح لادا گیا ہے کہ اس کا مرکزِ ثقل اس کے پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے جب کہ اس کو اس کے کناروں کے متوازی محور کے گرد گھما کر اس میں ہٹاؤ پیدا کیا جائے ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۵۰ —— ایک مخروطِ ناقص جس کا نصف زاویہ راس عہ ہے ایک مائع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دوچند ہے تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اس طرح تیر سکتا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت سے مائل ہو اور بڑے قطر والا سرا سیال کے باہر ہو بشرطیکہ

$$\text{جم عہ} > \left(\text{س}^3 + \text{ر}^3\right)^{\frac{2}{5}} \Big/ 2^{\frac{1}{6}} \left(\text{س}^2 + \text{ر}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

جہاں رخوں کے نصف قطر س اور ر ہیں۔

۵۱ —— پتلے مخروطی خول کا ایک بند مقطوعہ جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے متجانس سیال میں تیر رہا ہے اور اس کے اندر زیادہ وزنی دوسرا متجانس سیال ہے۔ ثابت کرو کہ خواہ کونسا ہی رخ غرق کیا جائے قائمیت کی شرط جبکہ محور انتصابی ہو یہ ہے

$$\frac{\text{ل}^2}{\text{ف}^2} > \frac{\text{ر}^3\left(\text{ر}_1^2 + \text{ر}_1\text{ر}_2 + \text{ر}_2^2\right)}{\text{ر}^3\left(\text{ر}_1 + \text{ر}_2\right)\left(\text{ر}_1^2 + \text{ر}_2^2\right) - \text{ر}_1^3\,\text{ر}_2^3}$$

جہاں محور کا غرق شدہ طول ف اور کون کا غرق شدہ حصہ ل ہے۔ مقطوعہ کے غرق شدہ رخ کا نصف قطر ہے۔ اور اندرونی و بیرونی مائعوں کے خطوط آب کے نصف قطر ر۱ اور ر۲ ہیں۔

۵۲ —— ایک ٹھوس مکعب مائع میں انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تمام زاویائی ہٹاؤں کے لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ تیراؤ کے مستوی سے مکعب کی تراش مسدس یا مثلث ہو۔

۵۳ —— ایک ناقص نما ایک مائع میں جس کی کثافت نوعی اس کی کثافت نوعی کا دو چند ہے تیر رہا ہے۔ ایک چھوٹا جفت انتصابی مستوی میں ناقص نما پر عمل کرتا ہے اور اس کو خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ جفت کے مستوی اور سیال کی سطح کا خط تقاطع اور وہ محور جس کے گرد ناقص نما گھومتا ہے باہم مزدوج ہونگے بلحاظ اُس ماسکی مخروطی کے جو تیراؤ کے مستوی میں ہے۔

۵۴ —— اگر ایک تیرنے والے جسم کا محل غیر قائم ہو تو چونکہ مرکز ثقل دونوں پس مرکزوں کے اوپر واقع ہوگا ثابت کرو کہ جسم میں سطح آب کے مستوی میں ایک خط ثابت کرنے سے، اس کے گرد گردش کے لئے قائم محل حاصل ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ خط ایک خاص ناقص کے باہر واقع ہو۔

۵۵ —— ایک ٹھوس متجانس مخروط قائم توازن کی حالت میں ایک سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہے اور قاعدہ سیال سے باہر ہے۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی ن ویں قوت۔ ثابت کرو کہ مخروط کا نصف زاویہ راس

$$\text{جم}^{-1}\ \frac{2}{4+ن}\ \sqrt{\frac{ن}{ف}}$$

سے بڑا ہونا چاہیئے۔ جہاں مخروط کا ارتفاع ف اور محور کا غرق شدہ طول ف ہے

۵۶ —— ایک وزن دار متجانس مکعب ایک سیال میں پوری طرح غرق کر دیا گیا ہے۔ سیال کی کثافت = گہرائی کے مکعب کا مہ گنا مکعب کے دو رخ افقی ہیں ——

ثابت کرو کہ پس مرکزی ارتفاع $\frac{مہ\,ا^{۴}}{۱۲۰\,ک}$ ہے جہاں مکعب کی کمیت ک ہے اور اس کے ایک کنارے کا طول ا ہے۔

۵۷ —— قائم مستدیرہ مخروط کی شکل کا ایک پتلا ظرف جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں تیر رہا ہے۔ مائع کی کثافت مہ × (ا + ی) ہے جہاں مائع کی سطح کے نیچے گہرائی ی ہے اور محور کا غرق شدہ طول ف ہے۔ اگر مخروط کے اندر مہ $\left(ا + \frac{ف}{۴}\right)$ کثافت کا مائع ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$\frac{۴}{۵}\left(\frac{\bar{مہ}}{مہ}\right)^{\frac{۱}{۳}} > \frac{۴ا + ف}{۵ا + ف}$$

۵۸ —— ایک متجانس وزن دار مکافی شکل کے اسطوانے کا ایک طویل حصہ مکونوں کے علی القوائم دو مستویوں سے اور ایسے ایک مستوی سے محدود ہے جو تکوینی مکافی کے محور پر عمود وار ہے۔ یہ اسطوانہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محوری مستوی انتصابی ہے اور زیرترین مکون ایک ظرف کے افقی کھردرے پیندے کو مس کرتا ہے۔ اس ظرف میں مائع ڈال دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی ن ویں قوت۔ مائع کی گہرائی گ ہے، جسم کا ارتفاع ف (> گ) اور تکوینی مکافی کا وتر خاص ۴ ا ہے۔ یہ فرض کرکے کہ تیراؤ کی حالت پیدا نہیں ہوتی ثابت کرو کہ قائمیت کے لئے جسم کی کثافت کو مائع کے زیرترین طبقہ کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ (۱۰۷)

$$\frac{۴۵}{۸}\,\frac{جا(ن+۱)}{جا\left(\frac{۲ن+۷}{۲}\right)}\;۴\sqrt{۲}\left(\frac{گ}{ف}\right)^{\frac{۳}{۲}}\frac{گ}{۳ف - ۱۰ا}$$

سے کم ہونی چاہیئے جبکہ

$$۱۵\,اگ > (۲ن+۵)(۳ف - ۱۰ا)\quad\left[جا(ن+۱) = \Gamma(n+1)\right.$$

جا گاما تفاعل ہے]

۵۹ ــــــ ایک یکساں ٹھوس قائم مستدیر مخروط کی کثافت ثہ اور زاویہ رأس ٢عہ ہے یہ مخروط ایک سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا راس نیچے کی طرف اور اس کا قاعدہ سطح کے اوپر ہے ۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی ن ویں قوت اور مخروط کے ارتفاع کے مساوی گہرائی پر اس کی کثافت ث ہے ۔ ثابت کرو کہ انتصابی محل میں توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$(\text{ا}+\text{ن})(\text{ا}+\tfrac{1}{\text{٢}}\text{ن})(\text{ا}+\tfrac{1}{\text{٣}}\text{ن})\,\frac{\text{ثہ}}{\text{ث}} > (\text{ا}+\tfrac{1}{\text{٣}}\text{ن})^{\text{ن}+\text{٣}}\,\text{جم}^{\text{٢ن}+\text{٦}}\,\text{عہ}$$

نیز یہ کہ مخروط اس صورت میں بھی متوازن ہوگا جبکہ انتصابی کے ساتھ اس کے محور کا میلان طہ مساوات

$$(\text{ا}+\text{ن})(\text{ا}+\tfrac{1}{\text{٢}}\text{ن})(\text{ا}+\tfrac{1}{\text{٣}}\text{ن})\,\frac{\text{ثہ}}{\text{ث}}$$
$$=(\text{ا}+\tfrac{1}{\text{٣}}\text{ن})^{\text{ن}+\text{٣}}\,\text{جم}^{\text{٣}}\text{عہ}\,\text{قط}^{\text{ن}+\text{٣}}\text{طہ}\,(\text{جم}^{\text{٢}}\text{طہ}-\text{جب}^{\text{٢}}\text{عہ})^{\text{ن}+\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$$

سے حاصل ہو۔

٦٠ ــــــ ایک مکعب جس کا کنارہ ا ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے دو رخ افقی ہیں اور انتصابی کناروں کا طول ل پانی میں غرق ہے ۔ اگر مکعب کو ایک افقی کنارے کے متوازی محور کے گرد ایک محدود زاویہ طہ میں گھمایا جائے اس طور پر کہ ہٹائے ہوئے پانی کا حجم غیر متغیر رہے اور اوپر کے رخ کا کوئی حصہ غرق نہ ہونے پائے تو ثابت کرو کہ کام جو کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$\text{و}\left[\frac{\text{ا}^{\text{٢}}}{\text{٢٤ل}}\,\text{جب طہ مس طہ}-(\text{ا}-\text{ل})\,\text{جب}^{\text{٢}}\frac{\text{طہ}}{\text{٢}}\right]$$

جہاں مکعب کا وزن و ہے ۔ (دیکھو دفعہ ١٠۵)

٦١ ــــــ ایک جہاز کے پیندے میں پانی ہے اور جہاز سمندر میں تیر رہا ہے ۔ ایک ٹھوس جسم کو زمین پر کی ایک مشین کے ذریعہ تھام کر جہاز کے پیندے میں لٹکایا گیا ہے اس طور پر کہ جسم پانی میں جزءً غرق رہتا ہے اور پانی کا وزن و ہٹاتا ہے ۔ اس کو پھر اور تھوڑا غرق کیا گیا ہے تاکہ اس کا صغیر طول مف لا اور

غرق ہو جائے۔ ثابت کرو کہ جہاز اور اس کے اندرونی پانی کی توانائی بالقوہ میں اضافہ ہے

$$\left\{ د - ا \left(\frac{و}{ب} + \frac{و'}{ج} \right) \right\} سف لا$$

جہاں جہاز اور اس کے اندرونی پانی کا وزن و ہے جسم کے فاصل آب کا رقبہ ا اور جہاز کے فاصل آب کا رقبہ ج ہے، اندرونی پانی کی سطح کا رقبہ ب ہے۔

۶۲ — سکافی نما $\frac{لا^2}{ا} + \frac{یا^2}{ب} = ۲ ی$ کی شکل کا جہاز انتصابی محور کے ساتھ پانی میں تیر رہا ہے۔ اگر اس کو تیراؤ کے مستوی میں کے کسی محور کے گرد محدود زاویہ ط میں گھمایا جائے اور ہٹایا ہوا حجم وہی برقرار رہے تو ثابت کرو کہ جو کام کیا گیا وہ ہے

$$ج ث ح \left\{ ع جب ط - ف (ا - جم ط) \right\}$$

جہاں محوری سے گردش کے محور کا عمودی فاصلہ ع ہے اور ابتدائی محل میں مرکز ثقل اور اچھال کے مرکز کے درمیان فاصلہ ف ہے۔

۶۳ — بتاؤ کہ جہاز پر ایک وزن کے ہٹانے سے جو بمقابلہ کل وزن کے چھوٹا ہے جہاز کے جھکاؤ پر اثر کیونکر دریافت ہو سکتا ہے۔ اگر ہٹاؤ افقی عرشہ پر ہو اور وسطی خط سے زاویہ ط بنائے تو ثابت کرو کہ عرشہ کا ڈھال ایسا ہے کہ خط میلان اعظم، وسطی خط کے ساتھ زاویہ مس⁻¹ (م مس ط) بناتا ہے جہاں پس مرکزی ارتفاعوں کی نسبت م ہے۔

۶۴ — مربع تراش کا ایک کندہ پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کے دونوں مربع رخ انتصابی ہیں اور تین کنارے جو ان رخوں پر عمود ہیں پوری طرح غرق ہیں۔ اگر ایک معلومہ کنارہ پانی سے باہر رہے تو ثابت کرو کہ توازن کے تین محل ہونگے بشرطیکہ کندہ جس شئے کا بنا ہو ہے اس کی کثافت نوعی $\frac{۲۳}{۳۲}$ اور $\frac{۳}{۴}$ کے درمیان واقع ہو، اور اگر یہ شرط پوری ہو تو ثابت کرو کہ دونوں غیر

متشاکل محل پہلو کے بل لڑکنے کے لئے قائم توازن کے محل ہونگے اور تمشاکل محل غیر قائم ہوگا۔

۶۵ —— مربع تراش کا ایک کندہ پانی میں تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ غیر تمشاکل محل میں تیر سکیگا اگر اس کی کثافت ۲۱۲ء اور ۲۸۱ء یا ۷۱۹ء اور ۷۸۸ء کے درمیان واقع ہو۔ اور یہ کہ ان حدود کی درمیانی کثافتوں کے لئے ایک کنارہ سب سے اوپر اور ان حدود کے باہر کثافتوں کے لئے ایک رخ سب سے اوپر ہوگا۔

۶۶ —— ایک متجانس جسم قائم توازن کی حالت میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اگر جسم کو الٹا کر اوپر کا رخ نیچے کر دیا جائے اور وہ مناسب کثافت کے مائع میں اوسی پہلے تیراؤ کے مستوی پر تیرے تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا۔

۶۷ —— پس مرکزی ارتفاع میں موثر اضافہ کا اندازہ لگاؤ جبکہ جہاز کو ایک تیز گھومنے والے اُڑپہیے کے ذریعہ قائم کیا جائے۔

۶۸ —— ایک دیوار پہلو جہاز جس کی کوئی تراش ۲ ا عرض کا مستطیل ہے سیدھے محل میں تیر رہا ہے اور لا گہرائی تک غرق ہے۔ جہاز کا مرکز ثقل پیندے کے اوپر ½ گ ارتفاع پر ہے۔ جہاز کو زاویہ ط میں ایک جانب بھرا دیا گیا ہے اور ایک جفت کے ذریعہ جس کا معیار ل ہے اسے توازن میں رکھا گیا ہے ثابت کرو کہ

$$ل = و\,جب\,ط \left\{ \frac{1}{12}\,\frac{ا^2}{گ}\,(3\,قط^2\,ط + 1) - \frac{1}{2}\,(گ - لا) \right\}$$

جہاں جہاز کا وزن و ہے۔

۶۹ —— ایک یکساں ٹھوس جسم مکافی نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = \frac{2\,ی}{ل}$ کے ایک حصہ کی شکل کا ہے جو مستوی ی = ل سے تراشنے سے پیدا ہوا ہے۔ یہ جسم نیچے دار راس کے ساتھ مائع میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اس کے مستوی قاعدہ کے نقطۂ (ضا، عا) پر ایک چھوٹا وزن رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی قاعدہ میں کے

وہ نقطے جو انتصابی ہٹاؤ سے غیر متاثر رہتے ہیں ایک ایسے خط پر واقع ہوتے ہیں جس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ضا لا}}{\text{و}^2 - (\text{۱} - \text{ن})\,\text{ل}^2/\text{۳}} + \frac{\text{عا ما}}{\text{ب}^2 - (\text{۱} - \text{ن})\,\text{ل}^2/\text{۳}} + \text{ن} = \text{۰}$$

جہاں ٹھوس کی کثافت کو مائع کی کثافت کے ساتھ نسبت ن : ۱ ہے ۔

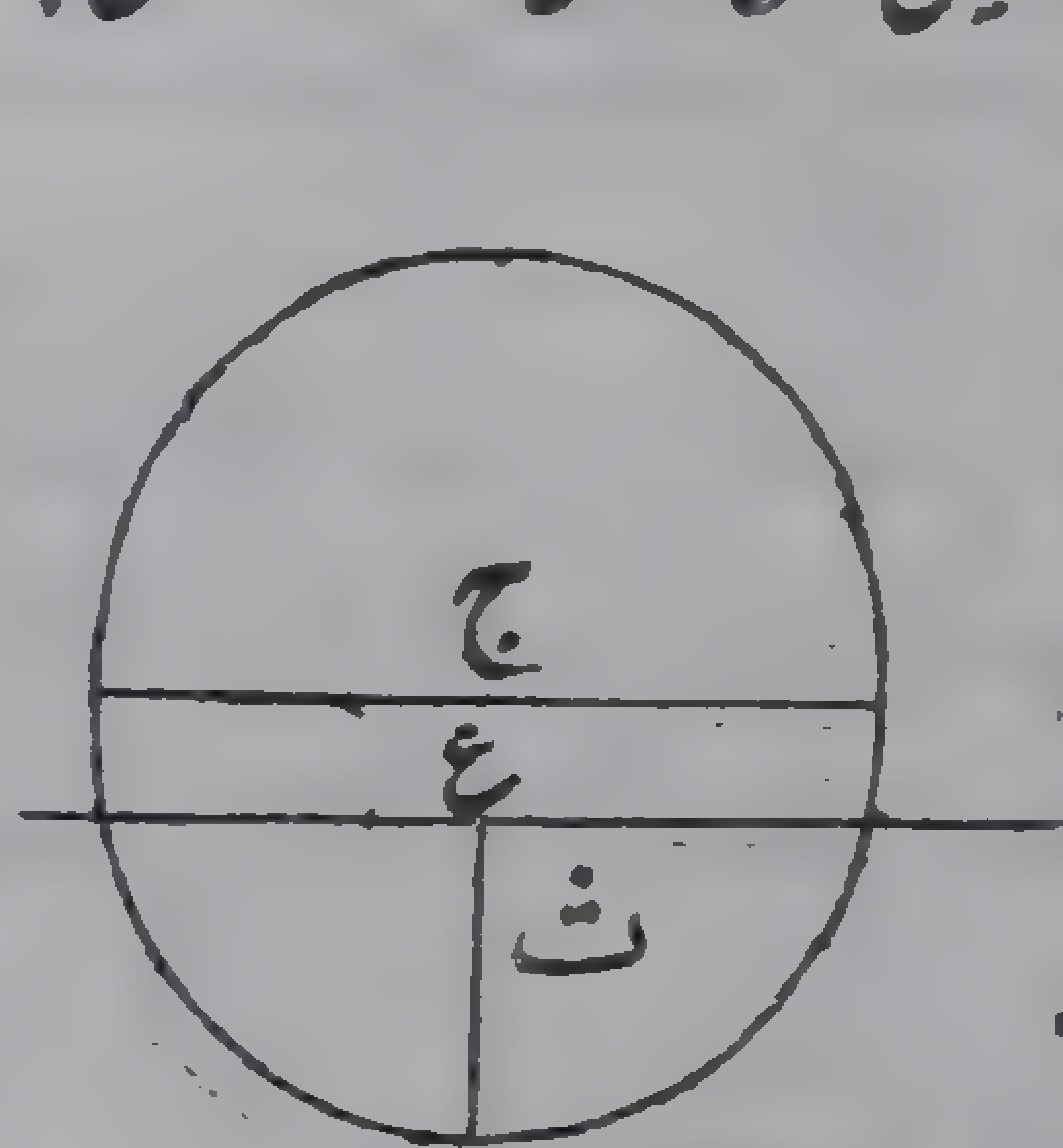
(۱۰۹

باب ششم

تیرنے والے اجسام کے اہتزازات

۱۰۶ ـــــ اگر ایک وزن دار جسم مائع میں قائم توازن کے محل میں تیر رہا ہو اور اسے اس محل سے ذرا ہٹا دیا جائے تو وہ چھوٹے انتصابی اور زاوئی اہتزازات کریگا۔ ظاہر ہے کہ ایسے اہتزازات کا سوال ایک ماحرکی سوال ہے اور یہ کہ اگر ہم مائع کی حرکت کو نظرانداز کردیں تو جسم کے اہتزازات کے ادوار کے لئے جو نتائج حاصل ہونگے وہ حقیقی ددرون کے ادنیٰ حدود ہونگے۔ اس کتاب کی وسعت کا جہانتک تعلق ہے ہم صرف یہ فرض کرسکتے ہیں کہ مائع کا جمو نظرانداز کیا گیا ہے۔ علاوہ بریں ہم صرف ایک سادہ صورت پر غور کریں گے۔ ہم فرض کرینگے کہ جسم اپنے مرکزمیں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے اور یہ کہ ابتدائی ہٹاؤ اس مستوی کے متوازی ہے۔

ظاہر ہے کہ جسم کے تمام نقطوں کی بعد کی حرکتیں اس مستوی کے متوازی ہونگی اور اگر توازن قائم ہو تو حرکت چھوٹے انتصابی اور زاوئی اہتزازات پر مشتمل ہوگی۔



اوّل فرض کرو کہ ث اور ھ میں سے گزرنے والا خط (ج ع د) تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔ جب یہ صورت ہو تو انتصابی اور زاوئی ہٹاؤں پر ایک دوسرے سے علیحدہ غور کیا جاسکتا ہے۔

ایک چھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ جسم کے چھوٹے حصہ ج ع کو جسے سیال کے باہر اُٹھا لیا گیا ہے ایک پتلا اسطوانہ خیال کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج ع = ی تو ع ث = ج ث - ی اور جسم پر نیچے والا

قوت = جسم کا وزن - ہٹائے ہوئے سیال کا وزن

$$= \text{ج ث ا} \times \text{ی}$$

جہاں تیراؤ کے ستوی کا رقبہ ا ہے۔ (۱۱۰)

$$\therefore \; \text{ک} \frac{\text{فز}^{2}\,\text{ع ث}}{\text{فز ت}^{2}} = \text{ج ث ل ی}$$

جہاں جسم کی کمیت ک ہے۔

لیکن ک ج = ہٹائے ہوئے سیال کا وزن

= ج ث ح، جسم کے حصہ ج د کا حجم ح ہے۔

اس لئے مساوات

$$\frac{\text{فز}^{2}\,\text{ی}}{\text{فز ت}^{2}} + \frac{\text{ج ا}}{\text{ح}}\,\text{ی} = ۰$$

سے حرکت کا تعین ہوتا ہے۔

اس لئے پورے اہتزاز کا وقت ہوگا

$$۲\pi\sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ج ا}}}$$

۱۰۷ اب ج کے گرد ایک چھوٹا زاوئی ہٹاؤ (عہ) فرض کرو، تب ث بقدر اُس فاصلہ کے اوپر اُٹھیگا جو عہ² پر منحصر ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے بمقابلہ اُن مقداروں کے جو عہ پر منحصر ہوتی ہیں اور پھر اگر جسم کو ساکن فرض کرکے اس کو اپنی حالت پر چھوڑ دیا جائے تو وہ (اس فرض کی بناء پر کہ توازن قائم ہے) ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد اہتزاز کرے گا۔

اگر ابتدائی ہٹاؤ ث کے گرد لیا جائے تو بھی دراصل وہی بات پیدا ہوگی

کیونکہ ایسی صورت میں ج افقی سمت میں قابل قدر فاصلہ طے کریگا (یعنی صرف پہلے رتبہ کی صغیر مقداروں کا لحاظ کرتے ہوئے) اور ہٹائے ہوئے سیال کی مقدار اوپر کی طرح غیر متغیر رہیگی۔

اگر پس مرکز م ہو تو ث کے گرد سیالی دباؤ کا معیار

= ج ث ح × م ث جب ط

اور ط کو گھٹانے کی طرف مائل ہوتا ہے جہاں ط وہ زاویہ ہے جو ث ھ انتصابی کے ساتھ آن ت پر بناتا ہے۔

لیکن   م ت = ر۲ا / ح - ا ، اگر ھ ث = ا

اب چونکہ ث میں سے گزرنے والا افقی محور صدری محور ہے اس لئے

ک ر۲ا (فر۲ط / فرت۲) = - ج ث (ر۲ا - ا ح) ط

جہاں ط کی اعلیٰ قوتیں نظر انداز کردی گئی ہیں اور ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد جسم کے جمود کا معیار ک ر۲ا ہے۔ یعنی

ر۲ا (فر۲ط / فرت۲) + ج (ر۲ا / ح - ا) ط = ۰

(۱۱۱) یہ مساوات چھوٹے اہتزازات کو تعبیر کرتی ہے جبکہ ر۲ا > ا ح یعنی جبکہ م، ث کے اوپر واقع ہو اور اہتزازات وقت

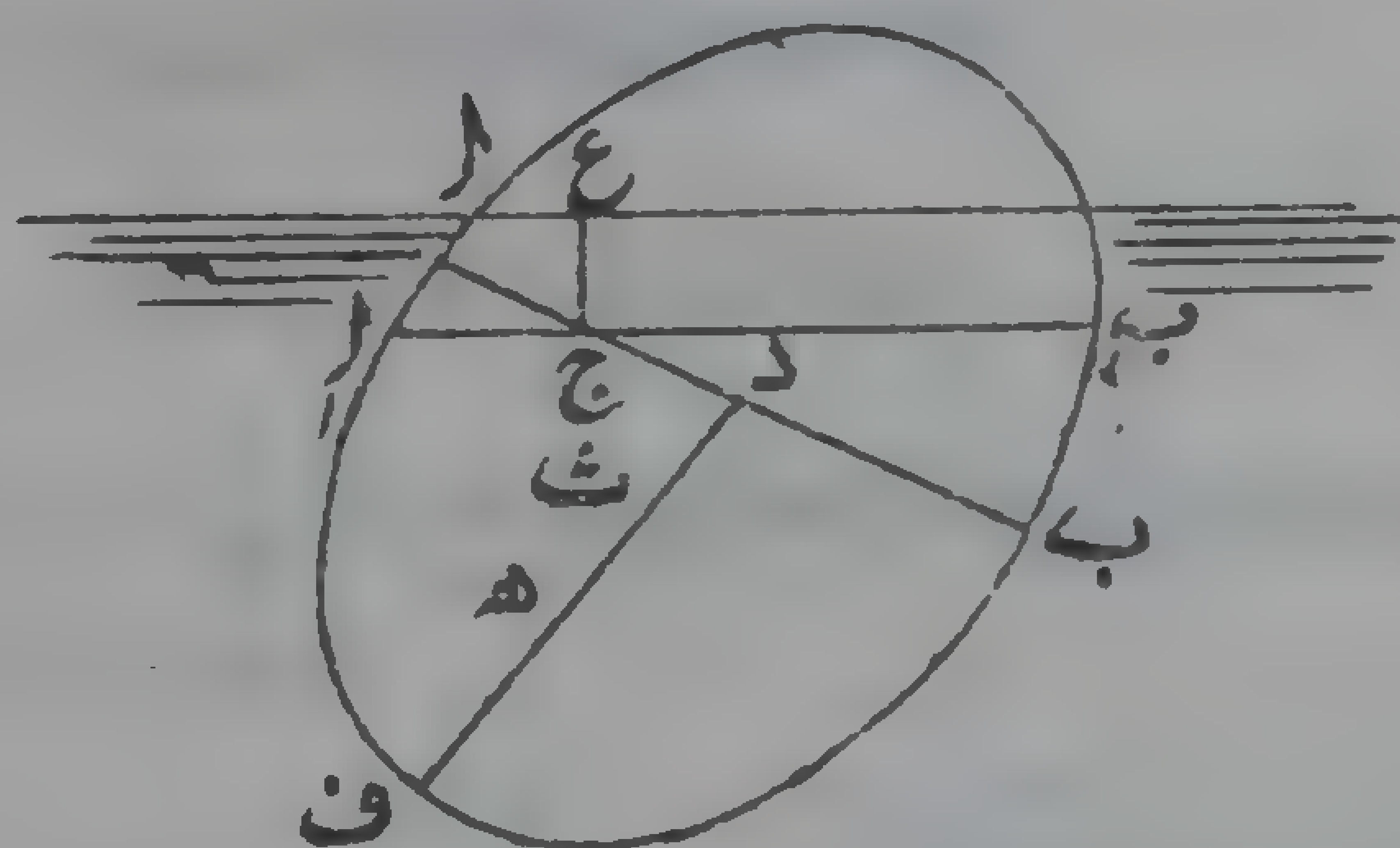
۲ π ر ا √(ح / ج (ر۲ا - ا ح)) میں واقع ہوتے ہیں۔

اگر ث، م کے نیچے واقع ہو تو ا کی علامت بدل دی جائیگی۔

یہ معلوم رہے کہ قائمیت کے پرکھنے کی جانچ اس نتیجہ سے اخذ ہوسکتی ہے جو ابھی حاصل کیا گیا۔ اہتزاز کے لئے ر۲ا - ا ح کا ایک مثبت مقدار ہونا ضروری ہے

۱۰۸ — ثانیاً اگر ھ اور ث کو ملانے والا خط نقطہ ج میں سے نہ گزرے تو

دونوں حرکتیں ایک دوسرے سے غیر متعلق نہیں ہونگی اور وہ قانون جو ان حرکتوں کی تعین کرتا ہے طریقہ ذیل سے معلوم ہو سکتا ہے ۔



فرض کرو کہ جسم کو تشاکل کے انتصابی مستوی میں خفیف طور پر ہٹا کر چھوڑ دیا گیا ہے اور خط ھ ث آن ت پر انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے اور ی = سطح کے نیچے ج کی گہرائی ج ع ،

فرض کرو کہ ھ ث ، تیراؤ کے مستوی کو نقطہ د پر قطع کرتا ہے اور

ھ ث = ا ، ج د = ب ، د ث = د

اور دیگر رموز گذشتہ کی طرح ۔

تب ث کی گہرائی = ی + ب جب ط + د جم ط

= ی + ب ط + د ، زیر بحث رتبہ تک ۔

ہٹائے ہوئے سیال کا وزن

اف ب + ع ج یا ا ف ب + ع ج

کے مساوی حجم کے سیال کا وزن ہوگا ۔

یہ وزن = ج ث ح + ج ث ا ی

اور $$\therefore \text{ک} \frac{\text{فز}^{2}}{\text{فز ت}^{2}}(\text{ی} + \text{د} + \text{ب ط}) = \text{ک ج} - (\text{ج ث ح} + \text{ج ث ا ی})$$

$$= -\text{ج ث ا ی}$$

یا $$\frac{\text{فز}^{2}\text{ی}}{\text{فز ت}^{2}} + \text{ب}\frac{\text{فز}^{2}\text{ط}}{\text{فز ت}^{2}} = -\text{ج}\frac{\text{ا}}{\text{ح}}\text{ی} \quad \cdots\cdots (۱)$$

(۱۱۲) ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد (جو صدری محور ہے اور ہٹاؤ کے مستوی پر عمود ہے) زاویائی حرکت کو پیش نظر رکھ کر دوسری مساوات حاصل ہوگی۔
ث، کے گرد سیالی دباؤ کے معیار کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ ایک تو حصہ ا ف ب کی وجہ سے ہے اور دوسرا ہٹائے ہوئے سیال کے حصہ ع ج کی وجہ سے۔

سیالی دباؤ کا قبل الذکر حصہ = ج ث ح جو پس مرکز م میں سے اوپروار عمل کرتا ہے، اور موخرالذکر حصہ = ج ث ا ی جو تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے عمل کرتا ہے۔

ط کو گھٹانے کا میلان رکھنے والی سمت میں معیار

$$= \text{ج ث ح} \times \text{ث م جب ط} - \text{ج ث ا ی}(\text{ب جم ط} - \text{د جب ط})$$

$$= \text{ج ث}(\text{ر}^{2}\text{ا} - \text{ا ح})\text{ط} - \text{ج ث ا ی}(\text{ب} - \text{د ط})$$

$$= \text{ج ث}(\text{ر}^{2}\text{ا} - \text{ا ح})\text{ط} - \text{ج ث ا ب ی}$$

جہاں ی اور ط کے حاصل ضرب کو نظر انداز کر دیا گیا ہے

$$\therefore \text{ک ر}^{2}\text{ا}\frac{\text{فز}^{2}\text{ط}}{\text{فز ت}^{2}} = -\text{ج ث}(\text{ر}^{2}\text{ا} - \text{ا ح})\text{ط} + \text{ج ث ا ب ی}$$

$$\text{ر}^{2}\text{ا}\frac{\text{فز}^{2}\text{ط}}{\text{فز ت}^{2}} = -\text{ج}\left(\frac{\text{ر}^{2}\text{ا}}{\text{ح}} - \text{ا}\right)\text{ط} + \text{ج}\frac{\text{ا}}{\text{ح}}\text{ب ی} \quad \cdots\cdots (۲)$$

(۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فز}^{2}\text{ی}}{\text{فز ت}^{2}} + \frac{\text{ج ا}}{\text{ح}}\left(۱ + \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ر}^{2}}\right)\text{ی} - \frac{\text{ج ب}}{\text{ر}^{2}}\left(\frac{\text{ر}^{2}\text{ا}}{\text{ح}} - \text{ا}\right)\text{ط} = ۰$$

$$\frac{\text{فز}^{2}\,\text{ط}}{\text{فزت}^{2}}-\frac{\text{ج ا ب}}{\text{ح ر}^{2}}\,\text{ی}+\frac{\text{ج}}{\text{ر}^{2}}\left(\frac{\text{ا ر}^{2}}{\text{ح}}-\text{ا}\right)\text{ط}=0$$

جن کو لکھا جا سکتا ہے

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\text{فز}^{2}\,\text{ی}}{\text{فزت}^{2}}+\text{ر ی}-\text{ب ن ط}=0\\&\frac{\text{فز}^{2}\,\text{ط}}{\text{فزت}^{2}}-\frac{\text{ع ی}}{\text{ب}}+\text{ن ط}=0\end{aligned}\right\}\quad\text{(۳)}$$

ان مساواتوں کو تکمیل کرنے کے لئے دوسری مساوات کو لہ سے ضرب دیکر پہلی مساوات میں جمع کرو اور فرض کرو کہ

$$\frac{\text{لہ ن}-\text{ب ن}}{\text{ر ب}-\text{لہ ع}}=\frac{\text{لہ}}{\text{ب}}\quad\text{(۴)}$$

اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فز}^{2}}{\text{فزت}^{2}}(\text{ی}+\text{لہ ط})+\left(\text{ر}-\frac{\text{لہ ع}}{\text{ب}}\right)(\text{ی}+\text{لہ ط})=0$$

اور اگر (۴) کی اصلیں لہ_1 لہ_2 ہوں تو

$$\left.\begin{aligned}&\text{ی}+\text{لہ}_1\text{ط}=\text{ج}_1\,\text{جم}\left\{\sqrt{\text{ر}-\text{لہ}_1\frac{\text{ع}}{\text{ب}}}\;\text{ت}+\text{ع}_1\right\}\\&\text{ی}+\text{لہ}_2\text{ط}=\text{ج}_2\,\text{جم}\left\{\sqrt{\text{ر}-\text{لہ}_2\frac{\text{ع}}{\text{ب}}}\;\text{ت}+\text{ع}_2\right\}\end{aligned}\right\}\quad\text{(۵)}$$

ان سے ی اور ط پوری طرح معلوم ہو جاتے ہیں۔

ث کی گہرائی اس شکل کے جملہ سے حاصل ہوتی ہے (11)

$$\text{ج}+\text{ا}\,\text{جم}(\text{مہ ت}+\text{عہ})+\text{ب}\,\text{جم}(\text{مہ ت}+\text{بہ})$$

اور اس کی حرکت دو مختلف اہتزازوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک قوانین رقاص کی پابندی کرتا ہے یہ دونوں اہتزاز صغیر اہتزازات کے ہم وجود ہونے کے

اصول کے مطابق باہم مرکب ہوتے ہیں۔
یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ اگر ا ب میں دو نقطے لئے جائیں جن کے فاصلے ج سے سمت ج د میں ل₁، ل₂ ہیں تو وقت ت پر ان نقاط کی انتصابی گہرائیاں ی + ل₁ ط اور ی + ل₂ ط ہونگی یعنی گہرائیاں ہونگی

ج جم {√(ر − ل₁ ب ع) ت + ع₁} اور ج جم {√(ر − ل₂ ب ع) ت + ع₂}

اور اس لئے ان نقطوں کی انتصابی حرکتیں سادہ اہتزازوں پر مشتمل ہیں جو قانون رقاص کی پابندی کرتے ہیں۔ ڈوہیل (Duhamel) نے اپنی کتاب نصاب حیلی دفعہ ۱۵۲ (Cours de mecanique, Art 152) میں اس امر کی دریافت کا حوالہ دیتے ہوئے اس کو ایم کوشی (M. Cauchy) کی طرف منسوب کیا ہے۔
مساواتیں (۵) ارتعاش کی طبیعی حیثیتوں، کو تعبیر کرتی ہیں۔ اہتزازوں کے ادوار ۲π/ق زیادہ آسانی کے ساتھ ی = ا جم (ق ت + صہ) اور ط = ب جم (ق ت + صہ) کو مساواتوں (۳) میں مندرج کرنے سے اور نسبت ا/ب کو نتیجہ سے ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

امثلہ

۱ ـــــ ایک سیدھا ڈنڈا دئے ہوئے ارتفاع سے پانی کی سطح پر انتصاباً گرایا گیا ہے اس کی حرکت دریافت کرو اور اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ وہ عین غرق ہو جائے۔
۲ ـــــ ف ارتفاع کا انتصابی اسطوانہ ایک مائع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت اسطوانہ کی کثافت کا دوچند ہے۔ مائع ایک اسطوانی ظرف میں ہے۔ اگر ظرف کا نصف قطر اسطوانہ کے نصف قطر کا دوچند ہو اور اسطوانہ کو خفیف طور پر انتصاباً ہٹایا جائے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کا وقت π √(۳ ف / ۲ ج) ہوگا۔
۳ ـــــ ایک جسم جس کی سطح کا نچلا حصہ کروی ہے ایک وزندار سیال میں تیر رہا ہے ثابت کرو کہ صغیر زاوئی اہتزاز کا وقت وہی ہوگا خواہ یہ کسی متجانس سیال میں تیرے۔

۴ ـــــ ایک مجوف نصف کرہ کو جو ایک افقی قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے سیال سے جزءً بھر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ صغیر اہتزاز کا وقت وہی ہوگا جو اُس صورت میں ہوتا جبکہ اس میں سیال نہ ہوتا۔

۵ ـــــ ایک ٹھوس ناقص نما اپنے سے دو چند کثافت نوعی والے مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا چھوٹے سے چھوٹا محور انتصابی ہے، چھوٹے انتصابی اہتزاز کا وقت معلوم کرو، نیز دوسرے دو افقی محوروں کے گرد صغیر زاوئی اہتزازات کے اوقات معلوم کرو۔

۶ ـــــ ایک مکعب (جس کے کنارے کا طول ۲ ا ہے) سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا مرکز ثقل سیال کی سطح کے نیچے ب گہرائی پر ہے۔ اگر اس میں صغیر ہٹاؤ پیدا کیا جائے اس طرح کہ اس کے دو رخ انتصابی رہیں تو ثابت کرو کہ اس کے صغیر انتصابی اور زاوئی اہتزازات کے اوقات علی الترتیب ہونگے

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ج}}} \quad \text{اور} \quad 4\pi\sqrt{\frac{\text{ا}^2(\text{ا} + \text{ب})}{\text{ج}(3\text{ب}^2 - \text{ا}^2)}}$$

۷ ـــــ ایک اسطوانہ مائع میں انتصابی اہتزازات کر رہا ہے۔ یہ مائع ایک دوسرے اسطوانہ میں ہے جس کا نصف قطر اول الذکر کے نصف قطر کا ن گنا ہے۔ (۱۱۴
ثابت کرو کہ اسطوانہ کے محور کا غرق شدہ طول جبکہ وہ سکون کے محل میں ہو

$$\text{ج}\,\text{ت}^2\,\text{ن}^2 \div 4\pi^2(\text{ن}^2 - 1)$$

ہوگا جہاں ت ایک پورے اہتزاز کا وقت ہے۔

۸ ـــــ ث کثافت کی ایک موم بتی ثہ کثافت کے ساکن پانی میں انتصاباً تیر رہی ہے اس کو روشن کر دیا گیا اور دیکھا گیا کہ اس کا شعلہ پانی کی طرف یکساں رفتار ع سے اتر رہا ہے اور بتی جس رفتار سے جل رہی ہے وہ و ہے ثابت کرو کہ

$$\text{و}\,(\text{ثہ} - \text{ث}) = \text{ثہ}\,\text{ع}$$

نیز ثابت کرو کہ اگر بتی کو اُس وقت بجھا دیا جائے جبکہ اس کا طول ل باقی رہے

تو بتی پانی کے باہر اُٹھ کر آ جائیگی اگر و > √(ث ل ج / ث) لیکن اگر

و < √(ث ل ج / ث) تو اس کے اہتزازات کا وقت ۲ π √(ث ل / ج) ہوگا۔

۹ — ایک قائم مخروط انتصابی محور اور نیچے وار راس کے ساتھ سیال میں تیر رہا ہے اور اس کے محور کا ۱/ن حصہ غرق ہے۔ مخروط کے وزن کے مساوی ایک وزن اس کے قاعدہ پر رکھدیا گیا ہے۔ جس سے مخروط واپس اٹھنے کے پیشتر اتنا ڈوب جاتا ہے کہ اس کا محور پورا غرق ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن^۳ + ن^۲ + ن = ۷$$

۱۰ — ۲عہ زاویہ راس کا مخروط ا نصف قطر کے اسطوانہ میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کے محور کا طول ا غرق ہے۔ اگر اسکو ایک صغیر طول میں انتصاباً نیچے ڈھکیل دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے اہتزاز کا وقت ہوگا

$$۲π \sqrt{\frac{(ا^۲ - ف^۲ مس^۲ عہ) ف}{۳ ا^۲ ج}}$$

جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے۔

۱۱ — ایک ظرف گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے، اس کا محور انتصابی ہے اور اس میں مائع کی اتنی مقدار ہے جسکا حجم اسی وتر خاص کے ایک مکافی نما کے قطعہ کے حجم کے مساوی ہے جو اس مائع میں تیر رہا ہے۔ اگر اس مکافی نما کو اتنا اٹھایا جائے کہ اس کا راس عین سطح پر ہو اور اگر چھوڑ دینے پر یہ اپنے محور کے ۳/۴ کے مساوی گہرائی تک لوٹنے سے قبل غرق ہو جائے تو ثابت کرو کہ

مائع کی کثافت : مکافی نما کی کثافت :: ۴۸ : ۷

۱۲ — دئے ہوئے زاویہ راس کا ایک ٹھوس مخروط، ایک ایسے محور پر تھاما گیا ہے جس کے گرد یہ حرکت کر سکتا ہے اور جو مخروط کے قاعدہ کے ایک قطر پر منطبق ہوتا ہے۔ اگر محور کو افقی طور پر پکڑا جائے اور اتنا نیچے کیا جائے کہ مخروط کے حجم کا ۱/۸ نیچے وار راس کے ساتھ ایک متجانس مائع میں غرق ہو جائے

تو مائع اور مخروط کی کثافتوں میں نسبت معلوم کرو جبکہ توازن تعدیلی ہو۔
اگر محور کو اِتنا نیچے نہ کیا جائے کہ توازن تعدیلی ہو جائے اور پھر مخروط کو خفیف طور پر ہٹا دیا جائے تو صغیر اہتزاز کا وقت معلوم کرو۔

۱۳ — ایک چپٹا (Oblate) کرہ نما پوری طرح دو سیالوں میں غرق کر دیا گیا ہے۔ نچلے سیال کی کثافت اضافی اوپر کے سیال کی کثافت اضافی کا دوچند ہے کرہ نما انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا مرکز سیالوں کی مشترک سطح میں ہے۔

یہ فرض کر کے کہ صغیر ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اولاً انتصابی سمت میں اور ثانیاً اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے افقی خط کے گرد ثابت کرو کہ صغیر اہتزازوں کے اوقات علی الترتیب ہونگے

$$۲\pi\sqrt{\frac{۲ب}{ج}} \quad \text{اور} \quad ۲\pi\sqrt{\frac{۸}{۵} - \frac{ب}{ج}\times\frac{ا^۲+ب^۲}{ا^۲-ب^۲}}$$

جہاں تکوینی ناقص کے نصف محور ا اور ب ہیں۔

۱۴ — ایک متجانس ٹھوس جسم ایک مائع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کلیۃً غرق شدہ تیر رہا ہے اس کا مرکز ثقل گ گہرائی پر ہے۔ ثابت کرو کہ صغیر انتصابی اہتزاز کا وقت $۲\pi\sqrt{ف/ج}$ ہے۔

۱۴ — یکساں موٹائی کا ایک پتر امتساوی الساقین قائم الزاویہ مثلث کی شکل کا ہے۔ اس کا ایک حادہ زاویہ سیال کی سطح کے نیچے ثابت کر دیا گیا ہے اور یہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وہ ضلع جو غرق نہیں ہے افقی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے اپنے مستوی میں صغیر اہتزاز کا وقت ہوگا (۱۱۵)

$$۲\pi\sqrt{ا/ج}$$

جہاں مثلث کے ہر ضلع کا طول ا ہے۔

۱۶ — ایک جسم کی تکوین منحنی ما ∝ لا$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ کو محور لا کے گرد گھمانے سے

ہوئی ہے۔ یہ جسم تیر رہا ہے اس طور پر کہ اسکے محور کا حصہ ف غرق ہے۔ اگر اس کو بقدر $(\text{ن}^{\frac{1}{\text{ن}-1}} - 1)$ ف کے نیچے بٹھادیا جائے تو ثابت کرو کہ لوٹنے پر وہ عین محل آئے گا۔

۱۷۔۔۔ م کمیت کا ایک گردشی جسم مختلف مائعات میں تیر رہا ہے اگر کسی مائع میں انتصابی اہتزاز کے وقت ت اور اسی مائع کی کثافت ث میں ربط

$$\frac{1}{\text{ث}} = \text{ف}\left(\frac{1}{\text{ت}^2\,\text{ث}}\right)$$

پایا جائے جہاں ف ایک دئے ہوئے تفاعل کو تعبیر کرتا ہے تو ثابت کرو کہ جسم کی نصف النہاری تراش کی مساوات ہوگی

$$\frac{4\pi^2}{\text{ج}}(\text{لا}+\text{م}) = \frac{\text{ر}\,\text{ا}}{\text{ما}}\,\text{ف}'\left(\frac{\text{ج}\,\text{ما}^2}{4\pi^2\,\text{م}}\right)$$

۱۸۔۔۔ ایک یکساں فانہ کی دھار پر عمود وار تراش ہر جگہ متساوی الساقین مثلث ہے جس کا نصف زاویہ راس $\text{مس}^{-1}\frac{\pi}{4}$ اور قاعدہ ب ہے۔ اسکی دھار مائع کی سطح میں ثابت کر دی گئی ہے اور فانہ اپنے سے دوچند کثافت نوعی کے مائع میں تیر رہا ہے۔ پھر اس کو راس کے گرد ایک صغیر زاویہ ط میں نیچے بٹھا دیا گیا ہے ثابت کرو کہ اپنے ابتدائی محل پر لوٹ آنے کے لئے جو وقت درکار ہوگا وہ تقریباً یہ ہوگا

$$\frac{1}{8\,\text{ط}}\sqrt{\frac{5\,\text{ب}}{\pi\,\text{ج}}}\left\{\text{جا}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2 \text{[لہ]}$$

لہ جا(T) گاما تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔ مترجم

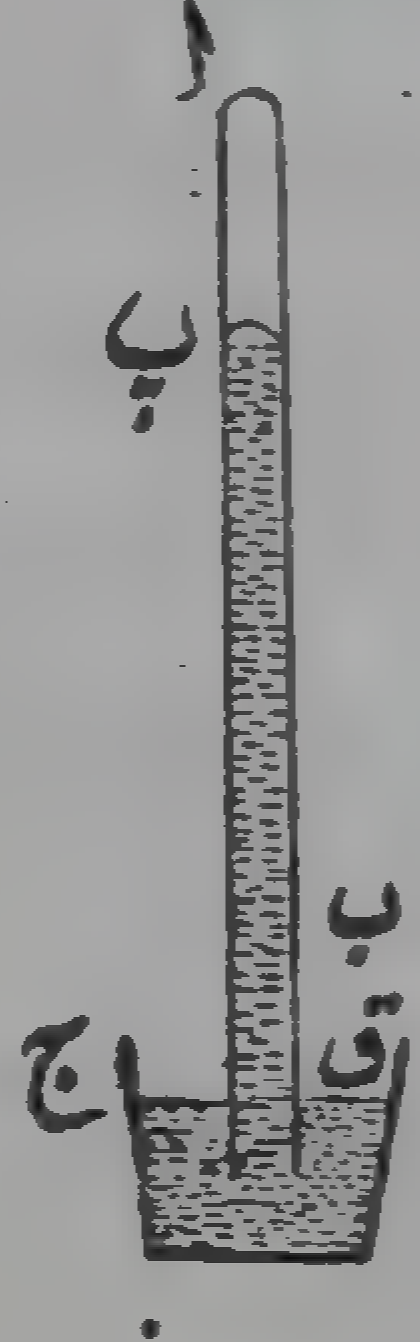
(۱۱۶)

باب ہفتم

کرہ ہوائی کا دباؤ

۱۰۹ــــ اگر ایک شیشہ کی نلی تقریباً تین فٹ لمبی جس کا ایک سرا بند ہو پارے سے بھردی جائے اور پھر پارہ کے ایک ظرف میں الٹا کر اس طرح رکھی جائے کہ اس کا کھلا سرا ڈوبا ہوا رہے تو یہ معلوم ہوگا کہ نلی کے اندر پارہ کچھ اُتر گیا ہے اور اس طرح ساکن ہے کہ اس کی اوپر کی سطح برتن کے پارہ کی سطح کے اوپر تقریباً ۲۹ انچ بلند ہے۔ یہ تجربہ جسکو پہلے طریسلی (Torricelli) نے کیا بارپیما کے استعمال کی طرف رہبری کرتا ہے جس سے کرہ ہوائی کا دباؤ ناپا جا سکتا ہے۔

بارپیما اپنی سادہ ترین شکل میں ایک سیدھی شیشہ کی نلی ا ب ہے جس میں پارہ ہوتا ہے اور جس کا نچلا سرا پارہ کے ایک چھوٹے حوض میں ڈوبا ہوا رہتا ہے۔ سرا ا بند ہوتا ہے اور بازو ا ب میں ہوا نہیں ہوتی۔



تجربوں سے یہ معلوم ہوا ہے کہ سطح ج کے اوپر پارہ کی سطح پ کا ارتفاع تقریباً ۲۹ انچ ہوتا ہے اور چونکہ سطح پ پر کوئی دباؤ نہیں ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ ج پر ہوا کا دباؤ وہ قوت ہے جو پارہ کے ستون پ ق کو تھامے ہوئے ہے۔

ہم نے پہلے یہ بتایا ہے کہ ساکن سیال کا دباؤ افقی مستوی پر کے تمام نقطوں

پر وہی ہوتا ہے اس لئے ج پر کا دباؤ ق پر پارہ کے دباؤ کے مساوی ہے۔
فرض کرو کہ پارہ کی کثافت ثہ ہے اور ج پر کرہ ہوائی کا دباؤ π ہے، تب

π = ج ثہ ب ق

اور ارتفاع ب ق سے کرہ ہوائی کے دباؤ کی پیمائش ہوتی ہے۔
پارہ کی کثافت زیادہ ہونے کی وجہ سے یہ سب سے زیادہ موزوں سیال ہے جو بارپیماؤں کی بناوٹ میں استعمال ہو سکتا ہے حالانکہ کرہ ہوائی کا دباؤ کسی قسم کے مائع کے استعمال سے ناپا جا سکتا ہے۔ پارہ کی کثافت پانی کی کثافت کا تقریباً ۱۳٫۵۹۸ گنا ہے اور اس لئے پانی کے بارپیما میں پانی کے ستون کا ارتفاع تقریباً ۳۳ ۳/۴ فٹ ہوگا۔
(۱۱۷) پارہ کی کثافت تپش کے ساتھ بدلتی ہے اور اس لئے ثہ لازماً تپش کا ایک تفاعل ہے۔
تجربہ سے یہ معلوم کیا گیا ہے کہ ۱° سنتی گرید کے اضافہ کے لئے پارہ کا پھیلاؤ اپنے حجم کا ۱/۵۵۵۰ گنا ہوتا ہے پس اگر تپش ت° پر کثافت ثت اور تپش ۰° پر کثافت ثہ ہو تو

ثہ = ثت (۱ + ت/۵۵۵۰) = ثت (۱ + ۰٫۰۰۰۱۸۰۱۸ ت)

∴ ثت = ثہ (۱ − ط ت) اگر ط = ۰٫۰۰۰۱۸۰۱۸

اور π = ج ثہ (۱ − ط ت) ب ق

ضابطہ π = ج (۱ − ط ت) ف کی مدد سے کسی مقام پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ کی پیمائش ہو سکتی ہے بشرطیکہ عرض بلد کی تبدیلی سے ج کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس کا لحاظ رکھا جائے۔ نیز یہ دیکھا گیا ہے کہ ایک ہی مقام پر خواہ تپش بدلے یا نہ بدلے یہ دباؤ بدلتا ہے اور پہاڑوں پر چڑھنے میں یا کسی مقام کی ہمواری سے اوپر کسی ذریعہ سے صعود کرنے میں یہ دباؤ گھٹتا ہے۔ یہ بات سیالات کے توازن کے نظریہ کے مطابق ہے کیونکہ اوپر چڑھنے میں

بار پیما کے اوپر ہوا کے ستون کا ارتفاع گھٹ جاتا ہے اور اس لئے ج پر ہوا کا دباؤ جو اس کے اوپر کی ہوا کے ستون کے وزن کے مساوی ہے گھٹ جاتا ہے اور اس لئے نلی میں پارہ نیچے اُترتا ہے۔

اب اگر پارہ کے ارتفاع اور اُس ارتفاع میں جس میں کہ صعود واقع ہوتا ہے ایک ربط معلوم ہو جائے تو ظاہر ہے کہ ایک ہی وقت میں دو مقامات پر بار پیمائی ستونوں کے مشاہدات سے ہم اُن مقامات کے ارتفاعوں میں فرق معلوم کر سکتے ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم ایک ضابطہ کی تلاش کرینگے۔ لیکن پہلے ہم اُن قوانین کا بیان کر دینا ضروری سمجھتے ہیں جو مختلف تپشوں پر ہوا اور گیسوں کے دباؤں میں ضبط پیدا کرتے ہیں اور نیز اُن قوانین کا جو گیسوں کے آمیزوں سے متعلق ہیں۔

۱۱۰ — ہم نے لچکدار سیال کے دباؤ، کثافت اور تپش کے درمیان اس رشتہ

د = م ث (۱ + ع ت)

کو پہلے بیان کیا ہے۔ یہ تجربہ کے دو حسب ذیل نتیجوں سے اخذ کیا گیا ہے۔

(۱) اگر تپش مستقل رہے تو ہوا کا دباؤ اس کے حجم کے بالعکس بدلتا ہے۔ (کلیہ بائل)

(۲) اگر دباؤ مستقل رہے تو ہوا کی کسی کمیت کی تپش میں ۱° سنتی گریڈ کا (۱۱۸) اضافہ اس میں اتنا پھیلاؤ پیدا کرتا ہے جو اس کے صفر درجہ سنتی گریڈ پر کے حجم کا ۰۰۳۶۶۵. گنا ہوتا ہے۔ (ڈالٹن اور گے لزک کا کلیہ)

اس طرح اگر ہوا کا دباؤ د اور کثافت ث ہو جبکہ تپش صفر ہے تو

د = م، ث

اب فرض کرو کہ تپش کو ت تک بڑھایا جاتا ہے جبکہ دباؤ وہی رہتا ہے۔ اس کو سمجھنے کے لئے فرض کرو کہ ہوا ایک اسطوانہ میں ہے جس میں ٹھیک بیٹھنے والا قابل حرکت ایک فشارہ لگا ہوا ہے۔ اور اس فشارہ پر ایک مستقل قوت لگی ہوئی ہے

اس طرح ہوا کی لچکدار قوت میں اضافہ غشارہ کو باہر ڈھکیلنے کا اثر رکھیگا یہاں تک کہ کثافت کی تخفیف سے اور اس لئے متناظر دباؤ کی تخفیف سے توازن بر قرار ہو جائے۔ تب کلیہ دوم سے حاصل ہوتا ہے

ثَ = ث (۱ + عہ ت)

جہاں ث نئی کثافت ہے اور عہ = ۰۰۳۶۶۵ء

∴ د = م ثَ (۱ + عہ ت)

اگر تَ تپش پر اسی سیال کا دباؤ دَ اور کثافت ثً ہو تو

دَ = م ثً (۱ + عہ تَ)

اور $\frac{د}{دَ} = \frac{ثَ}{ثً} \cdot \frac{۱ + عہ ت}{۱ + عہ تَ}$

تمام اقسام کی گیسوں کے لئے مقدار عہ تقریباً وہی ہوتی ہے، لیکن م کی قیمت مختلف گیسوں کے لئے مختلف ہوگی۔ اس لئے ہر صورت میں تجربہ کی مدد سے اس کو معلوم کرنا چاہیئے۔

۱۱۱ —— تپش مطلق۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ گیس کی تپش کو اتنا گھٹا دیا گیا ہے کہ اس کا دباؤ حجم کی تبدیلی کے بغیر معدوم ہو جاتا ہے تو ہم تپش کے مطلق صفر پر پہنچتے ہیں اور تپش مطلق اس نقطہ سے ناپی جاتی ہے۔

یہ مان کر کہ تب اس تپش کو سنٹی گریڈ تپش پیما پر تعبیر کرتا ہے ہمیں مساوات ۱ + عہ تب = ۰ سے حاصل ہوتا ہے

$$تب = - \frac{۱}{عہ} = - ۲۷۳^\circ$$

فارن ہایٹ کے پیمانہ میں مطلق صفر -۴۵۹° ہوگا۔

مساواتوں د = م ث (۱ + عہ ت)،

۰ = م ث (۱ + عہ تب)

سے حاصل ہوتا ہے

(۱۱۹) د = م ث ع (ت - ت۰)

= م ث ع ت

اگر ت تپش مطلق ہو۔

چونکہ ث ح مستقل ہے اسلئے د ح / ت بھی مستقل ہے اور یہ کلیہ مطلق پیمانہ میں، دباؤ حجم اور تپش کے ربط کو ظاہر کرتا ہے۔

۱۱۴ — آمیزے۔ مختلف لچکدار سیالوں کے آمیزے کا دباؤ۔

دو مختلف گیسوں پر غور کرو جو دو ظرفوں میں ہیں جن کے حجم ح اور حَ ہیں۔ اور فرض کرو کہ ان کے دباؤ اور تپشیں د اور ت دونوں کے لئے ایک ہی ہیں۔ فرض کرو کہ ان دو ظروف میں الحاق پیدا کیا گیا یا دونوں گیسوں کو ایک بند ظرف میں جس کا حجم ح + حَ ہے منتقل کر دیا گیا ہے۔ ایسی صورت میں جبکہ ان میں کوئی کیمیائی عمل وقوع پذیر نہیں ہوتا یہ معلوم ہوا ہے کہ دونوں گیسیں علیحدہ نہیں رہتیں بلکہ ایک دوسرے میں نفوذ کرتی ہیں حتیٰ کہ وہ ایک دوسرے سے پوری طرح ملجاتی ہیں اور یہ کہ جب توازن قائم ہو جاتا ہے تو آمیزے کے دباؤ اور تپش دونوں وہی ہوتے ہیں جو پہلے تھے۔

اس اہم تجربہ کی واقفیت سے ہم حسب ذیل مسئلہ اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر دو گیسوں کو جن کی تپش وہی ہے ایک ظرف میں جس کا حجم ح ہے ملا دیا جائے۔ اور اگر ان گیسوں کے دباؤ د اور دَ ہوں جبکہ ان کو فرداً فرداً حجم ح والے ظرف میں داخل کیا جائے تو آمیزے کا دباؤ د + دَ پر ہوگا۔

فرض کرو کہ دونوں گیسوں کو ایک دوسرے سے جدا کر دیا گیا ہے اور اس گیس کے حجم میں جس کا دباؤ د ہے تپش کی تبدیلی کے بغیر اتنا تغیر کر دیا گیا ہے کہ اس کا دباؤ دَ ہو جاتا ہے۔ تب کلیہ بائل کی رو سے اس کا حجم د ح / دَ ہوگا۔

اب فرض کرو کہ ان دو گیسوں کو ایک ظرف میں جس کا حجم

ح + (د / دَ) ح یا ((د + دَ) / دَ) ح

ہے ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے تب آمیزے کا دباؤ وہی دَ ہوگا اور تپش غیر متغیر رہیگی - اب اگر آمیزے کو حجم حَ میں دبا دیا جائے تو اس کا دباؤ کلیہ بائل کے رو سے د + دَ ہوگا -

یہ نتیجہ صریحاً گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے پر صادق آتا ہے -

(۱۲۰) ۱۱۳ — دو مختلف گیسوں کے حجم ح ، حَ ہیں اور ان میں کے دباؤ علی الترتیب د ، دَ ہیں - ان کو ایک دوسرے سے اس طرح ملا دیا گیا ہے کہ انکے آمیزے کا حجم ع ہو جاتا ہے - آمیزے کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے -

دونوں گیسوں کے دباؤ جبکہ ان کو حجم ع میں محدود کیا جائے علی الترتیب ہیں

$$\text{د}\,\frac{\text{ح}}{\text{ع}} \;،\; \text{دَ}\,\frac{\text{حَ}}{\text{ع}}$$

اور اس لئے دفعہ ماسبق سے آمیزے کا دباؤ

$$\text{د}\,\frac{\text{ح}}{\text{ع}} + \text{دَ}\,\frac{\text{حَ}}{\text{ع}}$$

ہے اور اگر یہ دباؤ د_1 سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{د}_1\,\text{ع} = \text{د}\,\text{ح} + \text{دَ}\,\text{حَ}$$

ملانے کے پیشتر اگر گیسوں کی مطلق تپشیں ت اور تَ ہوں اور ملانے کے بعد تپش مطلق تہ ہو جائے اور حجم ع تو گیسوں کے دباؤ علی الترتیب ہونگے

$$\frac{\text{د}\,\text{ح}}{\text{ت}}\,\frac{\text{تہ}}{\text{ع}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{دَ}\,\text{حَ}}{\text{تَ}}\,\frac{\text{تہ}}{\text{ع}}$$

پس آمیزے کا دباؤ د_1 ان دو مقداروں کا حاصل جمع ہوگا اور اس لئے

$$\frac{\text{د}_1\,\text{ع}}{\text{تہ}} = \frac{\text{د}\,\text{ح}}{\text{ت}} + \frac{\text{دَ}\,\text{حَ}}{\text{تَ}}$$

گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے کی صورت میں

$$\frac{د ع}{ی} = \Sigma \frac{د ح}{ت}$$

۱۱۴ ـــ دفعات ماسبق کے نتیجے اور کلیئے بخارات کی صورت میں اُسی طرح صادق آتے ہیں۔ بخارات اور گیسوں کے جبلی خصوصیات میں بلالحاظ اُن کے کیمیائی خصوصیات کے صرف یہ فرق ہے کہ قبل الذکر آسانی کے ساتھ، تپش کی تخفیف سے، مائع میں تبدیل ہو جاتے ہیں اور مو خرالذکر کی تکثیف صرف بہت بڑے دباؤ یا انتہائی ٹھنڈک یا دونوں کے ایک ساتھ استعمال سے ہو سکتی ہے[ا]

۱۱۵ ـــ بخار۔ اگر ایسی فضا ربیں جس میں خشک ہوا ہے پانی داخل کیا جائے تو (۱۲۱) بھاپ فوراً بن جاتی ہے اور یہ معلوم ہوا ہے کہ بھاپ کی کثافت اور دباؤ صرف تپش پر منحصر ہوتے ہیں اور ہوا کی کثافت پر منحصر نہیں ہوتے۔ پس اگر ہوا کو خارج بھی کر دیا جائے تو بھاپ کی کثافت اور دباؤ وہی برقرار رہیں گے۔ اگر تپش میں اضافہ کیا جائے یا فضا میں وسعت پیدا کی جائے تو بھاپ کی مزید مقدار تیار ہو جائے گی۔ لیکن اگر تپش کو گھٹا دیا جائے یا فضا کو کم کر دیا جائے تو بھاپ کا کچھ حصہ کثیف ہو جائیگا۔

[ا] پروفیسر فیاریڈے نے کاربانک ایسڈ گیس اور دوسری گیسوں کو جن کی تکثیف کے لئے بہت بڑے دباؤ کی ضرورت تھی کثیف کرنے میں کامیابی حاصل کی اور اس کے تجربہ کے نتائج سے یہ خیال پیدا ہوا کہ بہت ممکن ہے کہ تمام گیسیں، نخات کے بخارات ہوں۔ اس کی بہت کچھ تائید ۱۸۷۷ء میں ہوئی جبکہ ایم۔ پی کیٹ (M. Pictet) نے اُس سال کے اوائل میں ۳۰۰ کرہ ہوائی کے دباؤ کے زیر عمل آکسیجن کو مائع میں تبدیل کیا اور اسی سال کے ماہ دسمبر میں ایم کیللٹیٹ (M, Cailletet) نے نیٹروجن اور ہوا کو مائع میں تبدیل کیا۔ ۱۸۸۴ء میں روب لوسکی (Wroblewski) نے ہیڈروجن کو مائع بنایا اور ۱۸۹۹ء میں ڈوار (Dewar) نے ٹھوس ہیڈروجن حاصل کی اور اب ہوا اور دوسری مختلف گیسیں مائع کی شکل میں تجارتی اشیاء ہیں۔

فضا میں جب تک پانی کی کافی مقدار باقی رہے جس سے بھاپ بن سکتی ہے فضا بھاپ سے ہمیشہ سیر شدہ ہوگی یعنی فضا میں اتنی بھاپ ہوگی جتنی کہ اس تپش پر اس فضا میں رہ سکتی ہے۔ لیکن اگر تپش کو اتنا بڑھا دیا جائے کہ تمام پانی بھاپ بن جائے تو اس تپش اور اس سے اعلےٰ تپشوں کے لئے بھاپ کا دباؤ اُسی کلیہ کی پابندی کریگا جس کلیہ کی ہوا کا دباؤ پابندی کرتا ہے۔

ہر صورت میں خواہ فضا سیر شدہ ہو یا نہ ہو اگر ہوا کا دباؤ د اور بھاپ کا د۱ ہو تو آمیزے کا دباؤ د + د۱ ہوگا۔

۱۱۶—کرہ ہوائی میں ہمیشہ آبی بخار موجود ہوتا ہے جس کی مقدار مختلف اوقات پر مختلف ہوتی ہے کبھی کم اور کبھی زیادہ۔ اگر کرہ ہوائی کی فضا کا کوئی حصہ بخار سے سیر کردیا جائے یعنی اگر بخار کی کثافت اس تپش پر جتنی بڑی ہو سکتی ہے اُتنی ہو جائے تو تپش کو گھٹانے سے بخار کے کچھ حصہ کی تکثیف ہو جائے گی لیکن اگر اس تپش پر بخار کی کثافت کثافت اعظم نہ ہو تو کوئی تکثیف وقوع پذیر نہ ہوگی جب تک کہ تپش کو اُس نقطہ کے نیچے تک نہ گھٹا دیا جائے جس پہ فضا میں تکثیف شروع ہو جاتی ہے۔

شبنم کی پیدائش۔ اگر کسی سطح کو جو کرہ ہوائی سے تماس رکھتی ہے اتنا سرد کر دیا جائے کہ اس کی تپش اس کے نزدیک کی فضا کے سیر شدہ ہونے کے نقطہ سے نیچے ہو جائے تو آبی بخار کی تکثیف رونما ہوگی اور مکثف بخار سطح پر شبنم کی شکل میں نمودار ہوگا۔ اس لئے زمین پر شبنم کی پیدائش اسکی سطح کے ٹھنڈے ہونے پر منحصر ہے اور یہ عملی طور پر زیادہ سرعت سے اُس وقت ہوتا ہے جبکہ آسمان پر بادل نہ ہوں اور اس لئے اشعاع کے ذریعہ حرارت کا مقابلۃً زیادہ نقصان ہوتا ہو۔

نقطہ شبنم وہ تپش ہے جس پر شبنم ابتداً پیدا ہونا شروع ہوتی ہے۔ اس کا تعین بالراست مشاہدے سے کرنا پڑتا ہے۔

(۲۲ مختلف تپشوں پر جو بخار کو سیراب کرنے والی کثافتیں ہیں ان کے جواب میں بخار کا دباؤ بھی تجربہ سے معلوم کرلینا چاہیئے اور اگر ایسا کیا جائے تو نقطہ شبنم

کے مشاہدے سے کرہ ہوائی میں بخار کا دباؤ فوراً معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ اگر نقطۂ شبنم تَ اور اس کے متناظر معلومہ دباؤ دَ ہو تو کسی تپش ت پر جو تَ کے اوپر ہے دباؤ د' مساوات

$$\frac{\text{د}}{\bar{\text{د}}} = \frac{1 + \text{ع ت}}{1 + \text{ع}\,\bar{\text{ت}}}$$

سے معلوم ہو جائیگا۔

۱۱۷ — گیس کی تپش اور دباؤ پر پچکاؤ یا بسط کا اثر۔

تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو جو ایک ایسے ظرف کے اندر بند ہے جس میں حرارت داخل نہیں ہو سکتی پچکایا جائے تو اس کی تپش بڑھ جاتی ہے اور یہ کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو خواہ وہ کسی قسم کے ظرف میں بند ہو یکایک پچکا دیا جاوے اس طرح پر کہ حرارت کو باہر نکلنے کا موقع نہ ملے تو اس صورت میں بھی تپش اسی طرح بڑھ جاتی ہے۔

۱۱۸ — استعداد حرارت۔ کسی جسم کی استعداد حرارت، حرارت کی وہ مقدار ہے جو اس کی تپش کو ایک درجہ بڑھا دینے میں مطلوب ہوتی ہے۔

حرارت کی اکائی جو عملاً استعمال ہوتی ہے حرارت کی وہ مقدار ہے جو پانی کی اکائی کمیت کی تپش میں ایک درجہ کا اضافہ پیدا کردے جبکہ پانی کی تپش ۰° سنٹی گریڈ اور ۴° سنٹی گریڈ کے درمیان ہو۔

حرارت نوعی۔ کسی جسم کی حرارت نوعی اس کی کمیت کی ایک اکائی کی استعداد حرارت ہے یا بالفاظ دیگر حرارت نوعی وہ نسبت ہے جو حرارت کی اُس مقدار کو جو جسم کی تپش کو ۱° بڑھا دینے میں مطلوب ہوتی ہے حرارت کی اُس مقدار کے ساتھ ہو جو مساوی وزن کے پانی کی تپش کو ایک درجہ بڑھا دینے میں درکار ہوتی ہے۔

اگر حرارت کی مقدار فرق کمیت کی ایک اکائی میں فرت تپش کی تبدیلی پیدا کردے تو حرارت نوعی کا ناپ $\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}}$ ہوگا۔

گیسوں میں دو صورتوں پر غور کرنا ضروری ہے (۱) جبکہ دباؤ مستقل رہے اور گیس کو پھیلنے دیا جائے (۲) جبکہ حجم مستقل رہے۔
ان دو صورتوں میں حرارت نوعی کو ہم رموز $\text{ج}_{\text{د}}$ اور $\text{ج}_{\text{ح}}$ سے تعبیر کریں گے۔

یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ $\text{ج}_{\text{د}}$، $\text{ج}_{\text{ح}}$ سے بڑا ہے کیونکہ پہلی صورت میں حرارت جو گیس کو دی گئی ہے گیس کے پھیلانے میں بھی کام کرتی ہے اور اس کی تپش کے بڑھانے میں بھی۔

۱۱۹ — حرناگذر پھیلاؤ — گیس کی دی ہوئی مقدار کے پچکاؤ یا بسط کا اثر دریافت (۱۲
کرنے میں یہ ظاہر ہے کہ حرارت مطلوبہ ح، د اور ت کا تفاعل ہوگی اور چونکہ ح د ∝ ت اس لئے کسی پھیلاؤ کے لئے حرارت مطلوبہ ح اور د کا تفاعل ہوگی۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{فرق} = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ح}}\,\text{فرح} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف د}}\,\text{فرد}$$

اور بالعموم د = م ش ء ت یا اگر گیس کی دی ہوئی مقدار کی کمیت کو کمیت کی اکائی مانا جائے تو

$$\text{ح د} = \text{م ء ت} = \text{ل ت}$$

اگر دباؤ مستقل ہو تو $\text{فرق} = \text{ج}_{\text{د}}\,\text{فرت}$

$$\therefore \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ح}}\,\text{فرح} = \text{ج}_{\text{د}}\,\text{فرت} = \text{ج}_{\text{د}}\,\frac{\text{د فرح}}{\text{ل}}$$

اور

$$\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ح}} = \frac{\text{ج}_{\text{د}}}{\text{ل}}\,\text{د}$$

اگر حجم مستقل ہو تو

$$\frac{\text{جف ق}}{\text{جف د}}\,\text{فرد} = \text{ج}_{\text{ح}}\,\text{فرت} = \text{ج}_{\text{ح}}\,\frac{\text{ح فرد}}{\text{ل}}$$

اور $\frac{\text{جف ق}}{\text{جف د}} = \frac{\text{ج}_{\text{ح}}}{\text{ل}}\ \text{ح}$

اس لئے اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے یعنی اگر فرق = ۰ تو

$$\text{ج}_{\text{د}}\frac{\text{فر ح}}{\text{ح}} + \text{ج}_{\text{ح}}\frac{\text{فر د}}{\text{د}} = 0$$

$$\therefore\ \text{د}^{\text{ج}_{\text{ح}}} \times \text{ح}^{\text{ج}_{\text{د}}}\ \text{مستقل ہے}$$

اگر $\text{ج}_{\text{ح}}$ کو $\text{ج}_{\text{د}}$ کے ساتھ جو نسبت ہے اُس کو مستقل مانیں۔
اگر د، ح تغیر پاکر دَ، حَ ہو جائیں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{دَ}}{\text{د}} = \left(\frac{\text{ح}}{\text{حَ}}\right)^{\text{جہ}}$$

جہاں $\text{جہ} = \text{ج}_{\text{د}} / \text{ج}_{\text{ح}}$ ، اور نیز حاصل ہوگا

$$\frac{\text{تَ}}{\text{ت}} = \frac{\text{حَ دَ}}{\text{ح د}} = \left(\frac{\text{ح}}{\text{حَ}}\right)^{\text{جہ}-1}$$

مساوات $\text{د ح}^{\text{جہ}}$ = مستقل، حرحرکیات میں حرناگذر خطوط کی مساوات ہے اور یہ گیس کی کسی کمیت کے حجم اور اس کے دباؤ کے درمیانی ربط کو تعبیر کرتی ہے جبکہ حجم میں تغیر کے وقت نہ کوئی حرارت ضائع ہو اور نہ پہنچائی جائے۔

ہوا کی کسی کمیت کے یکایک پھیلاؤ یا بچکاؤ کی صورت میں بھی مساوات بالا درست رہتی ہے کیونکہ حرارت کے قابل قدر نقصان یا بیرونی ماخذوں سے حرارت کے اکتساب کے لئے کافی وقت نہیں ملتا۔ یہ معلوم ہوگا کہ ربط بالا آواز کے نظریہ میں بہت زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

۱۲۰ — $\text{ج}_{\text{د}} - \text{ج}_{\text{ح}}$ مستقل۔ اصول توانائی کی مدد سے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ (۱۲۴)
کسی گیس کے لئے $\text{ج}_{\text{د}}$ اور $\text{ج}_{\text{ح}}$ کا فرق مستقل ہوتا ہے۔

حرحرکیات کے ایک کلیہ کی رو سے کسی نظام میں حرارت کے

استعمال سے جو توانائی داخل کی جاتی ہے وہ حرارت کی مقدار کے متناسب ہوتی ہے پس اگر حرارت کی اکائی کا حیلی معادل غ ہو اور گیس کی اکائی کمیت میں حرارت کا اضافہ فرت جبکہ دباؤ مستقل رہے تو توانائی داخل شدہ ہوگی

غ × ج د فرت

لیکن یہ توانائی کچھ تو دئے ہوئے حجم پر تپش کے بڑھانے میں صرف ہوتی ہے اور کچھ اس حجم کے پھیلانے میں۔

∴ غ × ج د فرت = د فرح + غ × ج ح فرت

اور د ح = ل ت

∴ غ (ج د − ج ح) = ل

جس سے ظاہر ہے کہ ج د − ج ح مستقل ہے۔
ہم اس مساوات سے دفعہ (۱۱۹) کا نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں۔
کیونکہ اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے تو کوئی توانائی داخل نہیں ہوگی۔

اور ∴ د فرح + غ × ج ح فرت = ۰

لیکن ح د = ل ت = غ (ج د − ج ح) ت

∴ د فرح + ح فرد = غ (ج د − ج ح) فرت

اور د فرح (ج د − ج ح) + ج ح (د فرح + ح فرد) = ۰

جس سے ج د × د فرح + ج ح × ح فرد = ۰ پہلے کی طرح۔

۱۲۱ — گیس کے حرناگذر پچکاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کا معلوم کرنا۔
دفعہ ۱۱۴ میں ہم نے یہ مان لیا تھا کہ تپش مستقل ہے یا بالفاظ دیگر یہ کہ پچکاؤ

ہم تپشی (Isothermal) ہے۔

یہ حالت اس طرح پیدا کی جاسکتی ہے کہ عمل اتنا سست کیا جائے کہ جو حرارت پیدا ہوتی ہے وہ اثنائے عمل میں تلف ہو جائے۔

اگر پچکاؤ حرنا گذار ہو یعنی عمل کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ کوئی حرارت نہ ضائع جائے اور نہ داخل ہو اور یہ اس صورت میں عملاً ہوتا ہے جبکہ پچکاؤ بہت سرعت سے واقع ہو تو ایسے پچکاؤ کے لئے دفعہ (۱۱۹) سے یہ ربط حاصل ہوتا ہے

$$د\, ح^{ج} = \text{مستقل} = م$$

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ حجم ح سے حجم ۶ تک پچکانے میں جو کام ہوتا ہے وہ (۵)

$$= -\int د\, ف ح = -\int م\, ح^{-ج}\, ف ح$$

$$= \frac{م}{۱-ج}\left(ح^{۱-ج} - ۶^{۱-ج}\right)$$

زمین کے کرۂ ہوائی کی کل کمیت

۱۲۲ — زمین کے گرد ہوا اور بخار کی کمیت کا کچھ اندازہ بار پیما کی مدد سے لگایا جاسکتا ہے۔ یہ مانکر کہ زمین ر نصف قطر کا ایک کرہ ہے اور اس کی سطح کے تمام نقطوں پر بار پیمائی ستون کا ارتفاع وہی ف ہے کرہ ہوائی کی کمیت تقریباً پارہ کی کمیت $۴ \pi ث ر^{۲} ف$ کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ زمین کی اوسط کثافت ثَ ہے

تب کرہ ہوائی کی کمیت : زمین کی کمیت

$$= ۴ \pi ث ر^{۲} ف : \frac{۴}{۳} \pi ثَ ر^{۳}$$

$$= ۳ ث ف : ثَ ر$$

لیکن پانی کو معیاری شے لینے سے ث = ۱۳٫۵۷ اور ثَ تقریباً ۵٫۵ کے مساوی معلوم کیا گیا ہے۔ اور اگر ف کی تقریبی قیمت ۲۹٫۹ انچ

لی جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ کمیتوں کی یہ نسبت اُس نسبت سے کسیقدر کم ہے جو ایک کو دس لاکھ کے ساتھ ہے[1]۔

متجانس کرہ ہوائی کی بلندی

۱۲۳ــــ اگر ہوا کے پورے ستون کی ہر جگہ وہی کثافت ہوتی جو زمین کی سطح پر ہے تو اس کے ارتفاع کو ل اور پارہ کے ارتفاع کو ف سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوگا ث ف = ث ل

جہاں ث ہوا کی کثافت ہے۔ یہ معلوم کیا گیا ہے کہ نسبت ث : ث تقریباً ۱۰۴۶۲ : ۱ ہے اور اس لئے گزشتہ کی طرح ف کی قیمت ۲۹٫۹ استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ل، ۵ میل سے کسیقدر کم ہے۔

کرۂ ہوائی کے ارتفاع کی ضروری حد

ظاہر ہے کہ زمین کی سطح سے کچھ فاصلہ پر اس کی کشش گھٹ جاتی ہے اور اس لئے ہوا کی کثافت اور دباؤ گھٹ جاتے ہیں اس طرح نتیجہ بالا حقیقت سے بہت بعید (۱۲۶)
ہے۔بہرکیف ارتفاع کی حد اس بات کو پیش نظر رکھ کر معلوم کیجا سکتی ہے کہ زمین کے

---

[1] تجربہ کی بنا پر زمین کی اوسط کثافت محسوب کرنے کا سوال اکثر زیر بحث رہا ہے۔ جے۔ ایچ۔ پوائنٹنگ کے مضمون Adam's Prize Essay 1893 میں زمین کی اوسط کثافت کی قیمت ۵٫۴۹۳۴ حاصل کی گئی ہے۔ سی۔ وی۔ بائیز (Phil Trans. 1895) ہیں اور سی۔ بران (C. Braun) Denkschrift d. Math. natur Klasse d. Wiener Akad, 1895 میں اس کو ۵٫۵۲۷ بتاتے ہیں۔ نیز دیکھو جے۔ ایچ پوائنٹنگ کا مضمون Gravitation constant and mean density of the Earth, Encycl. Brit, eleventh edition.

مرکز سے ایک خاص فاصلے پر اس کی کشش ہوا کے ذروں کو دائری مداروں میں رکھنے کے ناقابل ہوگی۔ لیکن ذروں کا ان مداروں کو مرتسم کرنا ضروری ہے تاکہ اضافی توازن کی حالت قائم رہ سکے۔

خط استوا پر جلد سمار، $\frac{ج}{۲۸۹}$ کے مساوی ہے جہاں سہ زمین کی زاوئی رفتار ہے اور اس لئے ی ارتفاع پر وہ قوت جو ہوا کے ذرہ کمیت ک کو اپنے دائری حرکت میں رکھنے کے لئے درکار ہو ک ج (ر + ی)/۲۸۹ ر کے مساوی ہوگی۔ اسی ارتفاع پر زمین کی کشش

$$= \frac{ک ج ر^{۲}}{(ر + ی)^{۲}}$$

اور اس لئے انتہائی ارتفاع مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$\frac{ر + ی}{۲۸۹ ر} = \frac{ر^{۲}}{(ر + ی)^{۲}}$$

یا $$ی = ر \left\{ \sqrt[۳]{۲۸۹} - ۱ \right.$$

یعنی ی، ۵ ر سے کسیقدر بڑا ہے۔

ممکن ہے کہ یہ ارتفاع اصلی ارتفاع سے بہت زیادہ ہو کیونکہ غباروں میں تجربات کی بنا پر معلوم ہوا ہے کہ اوپر چڑھتے وقت ہوا کی تپش بہت زیادہ سرعت کے ساتھ گھٹتی جاتی ہے اور اس لئے یہ بالکل ممکن ہے کہ ۵ ر سے کم ارتفاع پر ہوا بیحد سردی کی وجہ سے مائع میں تبدیل ہوگئی ہو اور اس لئے اسکی بیرونی سطح ایسی صورت میں اُسی قسم کی ہوگی جس قسم کی غیر لچکدار سیالوں کی سطحیں ہوا کرتی ہیں۔

بار پیما کے ذریعہ ارتفاعوں کا معلوم کرنا

۱۲۴ — بار پیما کے سیمابی ستون کے ارتفاع اور سطح سمندر کے اوپر اس آلہ کے ارتفاع کے درمیان ربط قائم کرتے وقت ہمیں کرہ ہوائی کی تپش کے متعلق ایک مفروضہ قائم کرلینا چاہیئے۔

اول فرض کرو کہ تپش مستقل ہے اور ی ارتفاع پر دباؤ اور کثافت د ، ث سے تعبیر ہوتے ہیں اور یَ ارتفاع پر ان کی قیمتیں دَ ، ثَ ہیں ۔ تب توازن کی مساواتیں ہونگی

$$\text{فرد} = -\,\text{ج ث فی}$$

اور

$$\frac{\text{د}}{\text{ث}} = \frac{\text{دَ}}{\text{ثَ}} = \text{م}$$

∴

$$\text{م لوک د} = \text{مر} - \text{ج ی}$$

∴

$$\text{لوک}\,\frac{\text{د}}{\text{دَ}} = \frac{\text{ج}}{\text{م}}\,(\text{یَ} - \text{ی})$$

(۱۲۷) نیز اگر ف ، فَ سے دو مقامات پر کے بار پیماؤں کے ارتفاع تعبیر ہوں اور ان مقامات کے ارتفاع ی اور یَ ہوں تو

$$\text{یَ} - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{د}}{\text{دَ}} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ف}}{\text{فَ}} \;\ldots\ldots(۱)$$

اگر تپش مستقل نہ ہو تو فرض کرو کہ ان دو مقامات پر تپشیں تہ ، تہَ ہیں ۔ اب اگر ان دو مقامات کی بلندیوں کے درمیان ، اوسط یکساں تپش تا = ½(تہ + تہَ) کا مفروضہ اختیار کیا جائے تو د اور ث میں ربط د = م ث × (۱ + ع تا) حاصل ہوگا اور مساوات (۱) ہو جائیگی

$$\text{یَ} - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}\left\{۱ + \tfrac{۱}{۲}\,\text{ع}\,(\text{تہ} + \text{تہَ})\right\}\text{لوک}\,\frac{\text{ف}}{\text{فَ}} \;\ldots\ldots(۲)$$

اور اگر دونوں مقامات پر بار پیماؤں کے اندرونی پارہ کی تپشوں کے فرق کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو دفعہ (۱۰۹) سے

$$\frac{\text{د}}{\text{دَ}} = \frac{\text{ف}\,(۱ - \text{طہ تہ})}{\text{فَ}\,(۱ - \text{طہ تہَ})}\text{ ، جہاں طہ} = ۰۰۰۱۸۱۸.$$

اور مساوات (۲) ہو جائیگی

$$\text{ی}' - \text{ی} = \frac{\text{م}}{\text{ج}} \left\{ ۱ + \tfrac{۱}{۲}\, \text{ع} (\text{ت} + \text{ت}') \right\} \text{لوک} \frac{\text{ف} (۱ - \text{ط ت})}{\text{ف}' (۱ - \text{ط ت}')} \quad \ldots (۳)$$

۱۲۵ــــ لیکن اگر سطح زمین کے اوپر ارتفاع کافی زیادہ ہوں تو یہ ضروری ہے کہ زمین کے مرکز سے مختلف فاصلوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔ اس لئے ہم زیادہ صحیح ضابطہ کی تلاش کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ سطح بحر پر جاذبہ ارض کا ناپ ج ہے اور زمین کا نصف قطر ر ہے تو ارتفاع ی پر تجاذبی قوت

$$\text{ج} \frac{\text{ر}^۲}{(\text{ر} + \text{ی})^۲}$$

سے ناپی جائیگی۔ اور توازن کی مساوات ہوگی

$$\text{فرد} = - \text{ج} \frac{\text{ر}^۲}{(\text{ر} + \text{ی})^۲} \text{ث فری}$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ د = م ث (۱ + ع ت) اور یہاں یہ دیکھ لینا ضروری ہے کہ د درحقیقت ہوا کے دباؤ اور آبی بخار (جو ہوا میں شامل ہے) کے دباؤ کا مجموعہ ہے۔

پس اگر آبی بخار کی کثافت ث' ہو تو د ذیل کی شکل کی دو مقداروں کا مجموعہ ہوگا

$$\text{م ث}_۱ (۱ + \text{ع ت}) + \text{م}' \text{ث}' (۱ + \text{ع ت})$$

(۱۲۸) اور اس لئے مساوات بالا میں مقدار م ث درحقیقت دو مقداروں م ث۱[1]، م' ث' کا مجموعہ ہے جو علی الترتیب ہوا اور آبی بخار کے جواب میں ہیں۔

اوپر کی دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرد}}{\text{د}} = - \frac{۱}{۱ + \text{ع ت}} \cdot \frac{\text{ج ر}^۲ \text{فری}}{(\text{ر} + \text{ی})^۲}$$

[1] پوری صحت کے لحاظ سے یہ بہتر ہوگا کہ م ث کی بجائے م ث۱ لکھا جائے جہاں ث۱ خالص ہوا کی کثافت ہے۔

اور گذشتہ کی طرح ہم ت کو مستقل اور ان دو مقامات پر کی تپشوں کے اوسط کے مساوی مانیں گے۔

تکمل سے

$$\text{م لوک د} = \frac{1}{1+\text{ع ت}} \cdot \frac{\text{ج ر}^2}{\text{ر} + \text{ی}} + \text{ہر}$$

اور

$$\therefore \quad \text{م لوک} \frac{\text{دَ}}{\text{د}} = \frac{\text{ج ر}^2 (\text{ی} - \text{یَ})}{(1+\text{ع ت})(\text{ر}+\text{ی})(\text{ر}+\text{یَ})} \quad \ldots\ldots (1)$$

فرض کرو کہ گذشتہ کی طرح پارہ کے مشاہدہ کردہ ارتفاع ف، فَ اور تپشیں تہ، تَہ ہیں۔ تب چونکہ ی ارتفاع پر جاذبہ ارض کی قوت مقدار $\frac{\text{ج ر}^2}{(\text{ر}+\text{ی})^2}$ سے ناپی جاتی ہے اسلئے

$$\text{د} = \frac{\text{ج ر}^2}{(\text{ر}+\text{ی})^2} \, \text{ث ف} \, (1 - \text{ط تہ})$$

$$\text{دَ} = \frac{\text{ج ر}^2}{(\text{ر}+\text{یَ})^2} \, \text{ث فَ} \, (1 - \text{ط تَہ})$$

$$\therefore \quad \frac{\text{دَ}}{\text{د}} = \left(\frac{\text{ر}+\text{ی}}{\text{ر}+\text{یَ}}\right)^2 \frac{1 - \text{ط تَہ فَ}}{1 - \text{ط تہ ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اب چونکہ ط ایک بہت چھوٹی مقدار ہے اسلئے

$$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{م}(1+\text{ع ت})(\text{ر}+\text{ی})(\text{ر}+\text{یَ})}{\text{مہ ج ر}^2} \left\{ \text{لوک}_{10} \frac{\text{فَ}}{\text{ف}} + 2\,\text{لوک}_{10} \frac{\text{ر}+\text{ی}}{\text{ر}+\text{یَ}} - \text{مہ ط}(\text{تَہ} - \text{تہ}) \right\}$$

جہاں $\text{مہ} = \text{لوک}_{10}\,\text{ہو} = .۴۳۴۲۹۴۵$

اس ضابطہ سے اگر یَ معلوم ہو تو ی کی قیمت محسوب کیجا سکتی ہے۔ اگر نچلا مقام سطح بحر کے قریب واقع ہو تو یَ = ۰ اور

$$\text{ی} = \frac{\text{م}(1+\text{ع ت})}{\text{مہ ج}} \left(1 + \frac{\text{ی}}{\text{ر}}\right) \left\{ \text{لوک}_{10} \frac{\text{فَ}}{\text{ف}} + 2\,\text{لوک}_{10} \left(1 + \frac{\text{ی}}{\text{ر}}\right) - \text{مہ ط}(\text{تَہ} - \text{تہ}) \right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

۱۲۶ — گزشتہ تحقیقات میں ہم نے سطح زمین کے مختلف حصوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کا کوئی لحاظ نہیں کیا ہے۔ زمین کی کرہ نمائی شکل اور اپنے محور کے گرد اس کی گردش کی وجہ سے جاذبہ ارض کی قوت کی قیمت مختلف عرض بلد پر مختلف ہوتی ہے اور زمین کے چھلکے کی ساخت کے باعث زمین اور سمندر پر اس کی قیمت مختلف ہوتی ہے اور نیز یہ معلوم کیا گیا ہے کہ بحری چھوٹے جزیروں پر براعظموں کی بہ نسبت اس کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ (۱۲۹)

ج کی اوسط قیمت کے لئے ایک جدید ضابطہ

ج = ۹۷۸٫۰۴۶ (۱ + ۰٫۰۰۵۳۰۲ جب^2 فہ − ۰٫۰۰۰۰۰۷ جب^2 ۲ فہ) سمر/ثانیہ^2

یا ج = ۹۸۰٫۶۳۲ (۱ − ۰٫۰۰۲۶۴۴ جم ۲ فہ + ۰٫۰۰۰۰۰۷ جم^2 ۲ فہ) سمر/ثانیہ^2

حاصل ہوا ہے جہاں فہ عرض بلد ہے اور خط استوا اور عرض بلد ۴۵° پر ج کی قیمتیں بالترتیب ۹۷۸٫۰۴۶ اور ۹۸۰٫۶۳۲ ہیں۔

اگر ہم ج = ۹۸۰٫۶ (۱ − ۰٫۰۰۲۶۴۴ جم ۲ فہ) لیں تو ی کے لئے جو آخری جملہ ہم نے حاصل کیا ہے وہ ہو جائیگا

$$ی = \frac{م\,(۱ + ع\,ت)(۱ + ی/ر)}{۹۸۰٫۶\,س\,(۱ - ۰٫۰۰۲۶۴۴\ جم\ ۲\ فہ)} \left\{ لوک_{۱۰} \frac{پَ}{پ} + ۲\,لوک_{۱۰}\left(۱ + \frac{ی}{ر}\right) - س\,ط\,(تَ - تہ) \right\} \ldots\ldots (۴)$$

ان ضابطوں میں جیساکہ ہم نے اوپر دیکھا ہے م کی قیمت ہوا کے آبی بخار کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے لیکن اگر ہوا کو خشک فرض کیا جائے تو ضابطہ ہوگا د = م ث (۱ + ع ت) اب اگر ہوا ۰° سنٹی گریڈ تپش پر ہو اور اس کا دباؤ ۷۶۰ ملی میٹر پارہ کے مساوی ہو تو م ث = د = ۷۶۰ ج ثہ،

Handbuch der Physik, A. Winkelmaner, Leipzig, 1908, p. 479 دیکھو

Figure of the Farth by A. R. Clark and F. R. نیز دیکھو مضمون

Helmert in the Encyc. Brit. Eleventh Edition.

جہاں ثہ پارہ کی کثافت ہے۔

اور ثہ/ث = ۱۰۴۶۲ لینے سے

م = ۱۰۴۶۲ × ۷۶۰ ج ملی میٹر

= ۷۹۵۱٫۱۲ ج میٹر

اس سے سرم/ ۹۸۰٫۵۶ سہ = ۱۸۳۰۸ میٹر ہو جائے گا۔ لیکن اس میں آبی بخار کو بالکل نظر انداز کر دیا گیا ہے اور م کی ایسی قیمت جو مشاہدہ کردہ حقائق کے زیادہ مطابق نتیجہ پیدا کرتی ہے ۷۹۶۳٫۲ ج ہے جس سے حاصل ہوگا

م / ۹۸۰٫۵۶ سہ = ۱۸۳۳۶ میٹر

ضابطہ (۴) سے ی معلوم کرنے کیلئے اول اس کی تقریبی قیمت مساوات کے بائیں جانب میں ی/ر کو نظر انداز کر کے معلوم کرنی چاہیئے۔ پھر اگر اس تقریبی قیمت کو اس مساوات کے بائیں جانب میں استعمال کیا جائے تو ی کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوگی۔ اس عمل کو بشرط ضرورت پھر دہرایا جا سکتا ہے۔

۱۲۷ — دوسری تصحیحات بھی ضروری ہیں جب کہ عملی طور پر بارپیما کے ذریعہ ارتفاعوں کا ٹھیک ٹھیک معلوم کرنا مطلوب ہو۔ مثلاً م کی قیمت اس وجہ سے بھی بدلجاتی ہے کہ دی ہوئی تپش اور دباؤ پر آبی بخار کی کثافت خشک ہوا کی کثافت سے جو انہی حالات کے زیر اثر ہو کم ہوا کرتی ہے اور آبی بخار کا تناسب خشک ہوا کے ساتھ دو مقامات پر مختلف ہو سکتا ہے۔ (۱۴۰)
اور بالعموم مختلف ہوتا ہے۔

علاوہ بریں اگر اوپر والا مقام زمین کی سطح مرتفع کے کسی حصہ پر ہو تو زمین کے اس حصہ کی کشش کو بھی محسوب کرنا چاہیئے جو اس کی اوسط سطح کے اوپر ہے۔ اس کشش کا اثر یہ ہوگا کہ مقدار ج ر۲/(ر + ی)۲ میں بقدر

۳ ج ی/۴ر کے اضافہ ہو جائے گا۔ اس طرح ی ارتفاع پر جاذبہ کی قوت کا ناپ

$$\frac{ج\,ر^۲}{(ر+ی)^۲} + \frac{۳\,ج\,ی}{۴\,ر}$$

ہوگا۔ یا تقریباً $ج\left\{۱ - \frac{۵\,ی}{۴\,ر}\right\}$ (Routh, Analytical Statics II P. 12)

اس صورت میں د کے لئے مساوات حاصل ہوگی

$$فرد = -ج\left\{۱ - \frac{۵\,ی}{۴\,ر}\right\} ث\,فری$$

اور اس لئے اگر نچلا مقام سطح بحر پر ہو تو

$$م\,(۱ + ع\,ت)\,لوک\,\frac{دَ}{د} = ج\,ی\left(۱ - \frac{۵\,ی}{۸\,ر}\right)$$

یا

$$ی = \frac{م\,(۱ + ع\,ت)}{ج}\left(۱ + \frac{۵\,ی}{۸\,ر}\right) لوک\,\frac{دَ}{د}$$

دفعہ (۱۲۵) کی مساوات (۲) کی بجائے ہمیں مساوات

$$\frac{دَ}{د} = \left(۱ + \frac{۵\,ی}{۴\,ر}\right)\left(\frac{۱ - ط\,تہ\,تَ}{۱ - ط\,تہ\,ت}\right)$$

حاصل ہوگی۔ اور ی کے حاصل کرنے کے لئے آخری مساوات' دفعہ (۱۲۶) کی مساوات (۴) میں $۱ + \frac{ی}{ر}$ کی بجائے $۱ + \frac{۵\,ی}{۸\,ر}$ درج کرنے سے حاصل ہوگی۔ یہ معلوم رہے کہ لوک $\left(۱ + \frac{۵\,ی}{۴\,ر}\right)$ تقریباً ۲ لوک $\left(۱ + \frac{۵\,ی}{۸\,ر}\right)$ کے مساوی ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ی اور ر کو میٹروں میں ناپا جائے تو $\frac{ی}{ر}$

= ۱۵۷ ... ... ۰۰۰ ی تقریباً

اس طرح $\frac{h}{r}$ کو نظر انداز کرنے سے جو غلطی واقع ہو گی وہ عام طور پر چھوٹی ہو گی۔ خیال کیا جاتا ہے کہ اس قسم کا ضابطہ سب سے پہلے لاپلاس نے بیان کیا[۱]

۱۲۸ ـــ یہ بھی معلوم رہے کہ بار پیما کے اندر کے پارہ کی تپش کو ہم نے وہی مانا ہے جو اس کے گرد کی ہوا کی ہے۔ لیکن بعض صورتوں میں مثلاً جبکہ ہوائی جہاز میں مشاہدات لئے جائیں تو یہ ممکن ہے کہ بار پیما ایک ہی مقام پر اتنے عرصہ (۱۳۱) تک نہ رہے کہ اس کی تپش اس کے گرد کی ہوا کی تپش کے مساوی ہو جائے پارہ کی تپش بہرحال تپش پیما کے ذریعہ دریافت ہو سکتی ہے جب اس کے جوفہ کو بار پیما کے حوض میں رکھا جائے۔ اس طرح سے پارہ کی جو تپشیں حاصل ہونگی انکو دفعہ (۱۲۵) کی مساوات (۲) میں استعمال کرنا ہوگا۔

۱۲۸ - ا - حملی توازن ـــ متبادل مفروضہ تپش کے حملی توازن کا ہے ۔ لارڈ کیلون نے اس کو اس طرح بیان کیا ہے[۲] "جب سیال کے تمام حصے آپس میں آزادانہ تبادلہ کرتے ہوں اور اشعاع و ایصال کا اثر قابل قدر نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ سیال کی تپش حملی توازن کی حالت میں ہے" اس حالت میں یہ بات مستنبط ہوتی ہے کہ اگر مختلف ہموار سطحوں پر کی ہوا کی مساوی کمیتوں کو حرارت کے کسب

---

[۱] Mecanique Celeste, Livre X, Ch. IV — لاپلاس کا ضابطہ جو دفعہ (۱۲۶) کے ضابطہ (۴) میں صرف عددی سروں میں اختلاف رکھتا ہے اس موضوع کے متعلق اساسی ضابطہ قرار دیا جاتا ہے۔ سر جان مور کی کتاب Meteorology, 1910 کے صفحہ ۱۲۹ میں اسکو درج کیا گیا ہے بار پیمائی تصحیحات کے استعمالی ضوابط کے لئے طبیعات کی کسی جدید کتاب کا مطالعہ کرو مثلاً (Chwolson) کی کتاب Lehrbuch der Physik, 1902) جلد اصفحہ ۴۴۳ اور جلد اول عددی کے لئے دیکھو (Observer's Handbook) جسکو (Metrological Office نے ۱۹۰۸ میں شائع کیا۔

[۲] Collected papers V. III P. 255

یازیان کے بغیر آپس میں تبدیل کر دیا جائے تو وہ صرف دباؤ کثافت اور تپش کا تبادلہ کریں گے اور بحیثیت مجموعی کوئی تبدیلی نہ ہوگی - اس لئے اس صورت میں مذکورہ بالا مساواتیں ہو جائیں گی

فرد = - ج ث فری .... (۱)

د = م ثا^جہ اور د = ل ث ت

جہاں ی ارتفاع پر مطلق تپش کو ت تعبیر کرتا ہے -

∴ م جہ ث^جہ-۲ فرث = - ج فری

اور تکمل سے (م جہ / جہ - ۱) ث^جہ-۱ = ھ - ج ی

∴ (جہ / جہ - ۱) (د / ث) = ھ - ج ی

∴ (جہ / جہ - ۱) ل (ت - تب) = - ج ی

جہاں سطح بحر پر مطلق تپش کو تب تعبیر کرتا ہے -

∴ ت / تب = ۱ - (جہ - ۱ / جہ) × (ج ی / ل تب)

اور اگر متجانس کرہ کا ارتفاع ھ ہو تو

ل ثب تب = دب = ج ثب ھ

∴ ت / تب = ۱ - (جہ - ۱ / جہ) × (ی / ھ) .... (۲)

اگر مساوات (۱) میں ج کی بجائے ج ر^۲ / (ر + ی)^۲ رکھا جائے تو گزشتہ کیطرح تکمل اور اندراج سے ہمیں حاصل ہوگا

ت / تب = ۱ - (جہ - ۱ / جہ) × (ر ی / ھ (ر + ی)) ...... (۳)

١٢٩ا— ذیل کی دو مثالوں سے باب ہذا کے اصولوں کی توضیح ہوتی ہے۔ (١٣٢)

(١) ایک بے وزن فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھتا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ فشارہ ابتداً اسطوانہ کی چوٹی یا سرے پر ہے۔ اگر فشارے کے سرے پر آہستہ آہستہ پانی ڈالا جائے تو معلوم کرو کہ باہر بہہ جانے کے پیشتر کتنا پانی ڈالا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کا ارتفاع ا ہے اور فشارہ جس گہرائی تک نیچے جاتا ہے وہ ی ہے۔ تب توازن کے محل میں اسطوانہ کی اندرونی ہوا کا دباؤ π + ج ث ی ہوگا۔ جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ π اور پانی کی کثافت ث ہے۔

لیکن، یہ دباؤ : π = ا : ا − ی

∴ πا / (ا − ی) = π + ج ث ی

فرض کرو کہ آبی بار پیما کا ارتفاع گ ہے۔

تو π = ج ث گ

گ ا = (ا − ی) (گ + ی)

اور ی = ٠ ، یا ا − گ

اس لئے جب تک کہ اسطوانہ کا ارتفاع گ سے بڑا نہ ہو پانی داخل نہیں کیا جاسکتا۔ کیونکہ بالفرض اگر فشارے کو نیچے دبا کر بھی اس پر پانی ڈالا جائے تو نیچے کی ہوا کا دباؤ فشارے کو اُٹھا دیگا۔

منفی حل کو، جبکہ ا < گ ، یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ یہ ایک مختلف سوال کا حل ہے جس سے یہی جبری مساوات قائم ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ فشارہ کے اوپر بڑھایا گیا ہے اور فشارہ کو ایک ایسی قوت سے بقدر ی فاصلہ کے اوپر اُٹھانا مقصود ہے جو اُس پانی کے وزن کے مساوی ہے جو اس اسطوانہ میں ی ارتفاع تک بھرا جاسکتا ہے۔

اس سے مساوات پیدا ہوتی ہے

$$\frac{\text{π - ج ث ی}}{\text{π}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا + ی}}$$

یا

$$\text{ی = گ - ا}$$

(۲) ایک غبارہ کی حرکت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کرکے کہ کسی محل میں اس کی ہٹائی ہوئی ہوا کی کمیت متجانس ہے اور اثنائے حرکت میں تپش مستقل رہتی ہے۔

فرض کرو کہ غبارہ کی کمیت کے مرکز کا ارتفاع ی اور اس کی کمیت ک ہے۔ اس کا حجم ح اور ی ارتفاع پر ہوا کی کثافت ث ہے۔ تب وہ مساوات جس سے حرکت کا تعین ہوتا ہے یہ ہوگی

$$\text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2} = \text{جَ ث ح - ک جَ}$$

جہاں

$$\text{جَ} = \text{ج}\,\frac{\text{ر}^2}{(\text{ر + ی})^2}$$

لیکن مساوات فرد = - جَ ث فری اور د = م ث سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{د} = \text{π}\,\text{و}^{-\frac{\text{ج ر ی}}{\text{م}(\text{ر + ی})}}$$

اور اس لئے

$$\text{ک}\,\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{π ح ج ر}^2}{\text{م}(\text{ر + ی})^2}\,\text{و}^{-\frac{\text{ج ر ی}}{\text{م}(\text{ر+ی})}} - \text{ک ج}\,\frac{\text{ر}^2}{(\text{ر + ی})^2}$$

جس میں ک = ثہ ح رکھنے سے اور $\text{۲}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$ سے ضرب دیکر تکمل کرنے سے (۱۳)

$$\text{ثہ}\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{ب - ۲π}\,\text{و}^{-\frac{\text{ج ر ی}}{\text{م}(\text{ر+ی})}} + \frac{\text{۲ ثہ ج ر}^2}{\text{ر + ی}}$$

ابتدائی شرائط سے

$$\text{۰ = ب - ۲π + ۲ ثہ ج ر}$$

$$\therefore\ \text{ثہ}\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{۲π}\left\{\text{۱ -}\ \text{و}^{-\frac{\text{ج ر ی}}{\text{م}(\text{ر+ی})}}\right\} - \frac{\text{۲ ثہ ج ر ی}}{\text{ر + ی}}$$

غبارہ کا زیادہ سے زیادہ ارتفاع

$$= \frac{\text{فرعی}}{\text{فرت}}$$

رکھنے سے حاصل ہو گا۔ اور اگر غبارہ کی اوسط کثافت اور ہوا کی اوسط کثافت میں بہت تھوڑا فرق ہو تو ری چھوٹا ہو گا اور ایک تقریبی قیمت معلوم کیجا سکتی ہے

امثلہ

(۱)۔ اگر ہوا کی کثافت اضافی ۰۰۱۳ء اور پارہ کی ۹۵ء۱۳ ہو اور اگر بار پیما کا ارتفاع ۳۰ انچ ہو تو ثابت کرو کہ مستقل ہم کی قیمت تقریباً ۸۳۶۳۰ ہو گی جبکہ طول اور وقت کی اکائیاں فٹ اور ثانیہ ہیں۔

(۲)۔ ۵ء۱۵° سنتی گریڈ پر خشک ہوا کے ایک لیٹر کا وزن ۲۲۳ء۱ گرام ہے جبکہ بار پیما کا ارتفاع ۷۶۰ ملی میٹر ہے۔ اس تپش پر آبی بخار کا دباؤ پارہ کے ۶ء۱۲ ملی میٹر ستون کے مساوی ہے اور اس کی کثافت کو اسی تپش اور دباؤ پر کی خشک ہوا کی کثافت سے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۵ کو ۸ کے ساتھ ہے۔ ایک لیٹر ہوا کا وزن معلوم کرو جب اس کو مذکورہ بالا تپش اور دباؤ پر آبی بخار سے سیر شدہ کر دیا جائے۔

(۳)۔ ایک ناقص بار پیما کے ارتفاع ۲ء۲۹ اور ۳۰ انچ ہیں جبکہ صحیح آلہ کے ارتفاع ۴ء۲۹ اور ۳ء۳۰ ہوتے ہیں۔ ناقص بار پیما کی نلی کا وہ طول معلوم کرو جس کو اس کے اندر کی ہوا ۳۰ انچ دباؤ کے زیر اثر پر کرے گی۔

(۴)۔ کرہ ہوائی کی ایک مکعب گز ہوا کو ایک ظرف میں جبکا حجم ایک مکعب فٹ ہے بچکایا گیا ہے۔ بار پیما کا ارتفاع ۳۰" ہے۔ جمع شدہ توانائی کا عددی ناپ تقریباً معلوم کرو جبکہ پارہ کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے ۵۹۶ء۱۳ ہے اور پانی کے ایک مکعب انچ کا وزن ۲۵۲ء۲۷۷ گرین ہے۔

(۵)۔ ایک بالکل صحیح سیمابی بار پیما کے ارتفاع ع اور ع' ہیں جبکہ

ایک ناقص بار پیما کے متناظر ارتفاع جس میں کچھ ہوا ہے ا اور ب ہیں —
ثابت کرو کہ اگر ناقص بار پیما کا ارتفاع ج ہو تو

$$\frac{(ع - ا)(ہ - ب)(ا - ب)}{(ا - ج)(ع - ا) - (ب - ج)(ہ - ب)}$$

کی صحت درکار ہوگی۔

(۶)- اگر تپش پیما کو ایک مائع میں جس کی تپش معلوم کرنا مطلوب ہے
جزءً ڈبو دیا جائے اور اس سے تپش ت کا اظہار ہو جبکہ ہوا کی تپش تہ ہو اور
تپش پیما کا غیر غرق شدہ حصہ م درجے ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م (ت - تہ)}{۶۸۴۰ + تہ - م}$$

کی صحت درکار ہوگی اگر تپش پیما کے اندرونی پارہ کا پھیلاؤ حرارت کے ۱° کے
لئے $\frac{1}{۶۸۴۰}$ ہو یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ہر حصہ میں پارہ کی تپش اس حصہ کو
گھیرنے والی شے کی تپش کے مساوی ہے۔

(۷) ایک بند انتصابی اسطوانہ کے اندر جسکی تراش کا رقبہ ایک ہے و وزن کا
ایک فشارہ ہے ابتداً فشارہ اسطوانہ کے وسط میں ہے اور اس کے نیچے اور
اوپر کی فضا سیر شدہ ہوا سے بھری ہوئی ہے۔ اگر فشارہ کو اپنے حال پر چھوڑ دیا
جائے تو وہ ابتدائی ارتفاع کا نصف نیچے اتر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیر شدہ
بخار کا تناؤ ۳ و - ۴ ϖ ہوگا جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ ϖ ہے۔ اس عمل کے
ابتدا اور اختتام پر تپش وہی فرض کرلی گئی ہے۔

(۸) انتصابی بار پیمائی نلی بنائی گئی ہے جس کے اوپر کا حصہ سرے پر
بند کردیا گیا ہے۔ اس حصہ کی تراش کا رقبہ $ا^{2}$ ہے۔ بار پیما کا درمیانی حصہ
ایک جوفہ ہے جس کا حجم $ب^{3}$ ہے۔ بار پیما کے نچلے حصہ کی تراش کا رقبہ
$ج^{2}$ ہے اور اس کا پیندا کھلا ہوا ہے۔ جوفہ تو پارہ سے بھرا ہوا ہے لیکن
نلی کے نچلے اور اوپر کے حصوں میں پارہ جزءً بھرا ہوا ہے۔ پارہ کو نیچے
سے باہر نکل پڑنے سے ایک ڈھکنی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو آزادانہ نیچے

اوپر حرکت کر سکتی ہے اور جس پر ہوا کا دباؤ عمل کرتا ہے۔ نلی کے بالائی حصہ میں خلا ہے۔ سیمابی ستون کے نچلے اور اوپر کے سروں کے محل میں تغیر معلوم کرو جبکہ کرۂ ہوائی کے دباؤ میں دیا ہوا تغیر واقع ہو۔

اگر آلہ کے اندرونی کل پارہ کا حجم ھ ج^{2} ہو جہاں بارپیما کا ارتفاع ھ ہے تو یہ بھی ثابت کرو کہ اوپر کی سطح ہمش کے تغیر سے غیر متاثر رہیگی۔

(۹) ایک اسطوانی ظرف غواص پانی میں ڈوبتا ہے یہاں تک کہ اس کے کچھ حصہ ح میں ہوا باقی رہتی ہے۔ اس محل میں ہوا کی کچھ مقدار اس میں داخل کی جاتی ہے جس کا حجم کرہ ہوائی کے زیر اثر ۲ ح ہے۔ معلوم کرو کہ غواص کو کتنی گہرائی تک اور نیچے ڈوبنا چاہیئے کہ اس کے اندر کی کل ہوا کا حجم اتنا ہی ہو جائے جتنا کہ محل اول میں تھا۔

نیز اس کے لئے شرط دریافت کرو کہ محل اول میں جب ہوا زور سے داخل کیجاتی ہے تو ہوا غواص کے نیچے سے بچکر نکلنے نہ پائے۔

(۱۰) ایک ظرف ایسی سطح کی شکل کا ہے جسکی تکوین مکافی کی ایک قوس کو جو راس پر ختم ہو جاتی ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے۔ اس ظرف کو نیچے وار منہ کے ساتھ پارہ کے ایک برتن میں ڈبویا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ظرف کے اندر کی ہوا کا دباؤ اس فاصلے کے مربع کے تناسب معکوس میں ہوگا جو ظرف کے راس اور اندرونی پارہ کی سطح کے درمیان ہے۔ نیز یہ فرض کر کے کہ ظرف کے محور کے طول کو بارپیما کے ارتفاع کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۴۵ کو ۶۴ کے ساتھ ہے ظرف کے اندرونی پارہ کی سطح کی گہرائی معلوم کرو جبکہ ظرف عین پوری طرح غرق ہو۔

(۱۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھتا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ ابتداً فشارہ اسطوانہ کے سرے پر ہے۔ اگر پانی فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ ڈالا جائے تو ثابت کرو کہ پانی کی اوپر کی سطح زیر ترین ہوگی جب کہ پانی کی گہرائی $\sqrt{(\text{ا ف})}$ − ف ہو جہاں آبی بارپیما کا ارتفاع ف ہے اور اسطوانہ کا ارتفاع ا۔

(۱۲) بار پیما کا ارتفاع ۸۸ء۲۹ انچ ہے اور تپش پیما نقطہ شبنم پر ہے۔ بار پیما اور پانی کے ایک پیالہ کو قابلہ میں رکھدیا گیا ہے جس سے ہوا خارج کردی گئی ہے۔ اب بار پیما کا ارتفاع ۳۶ء۰ انچ ہو جاتا ہے۔ کرہ ہوائی کی ہوا کا دیا ہوا حجم جتنی جگہ گھیرتا ہے اُس کو معلوم کرو اگر اس سے اس کے دباؤ اور تپش کی تبدیلی کے بغیر اس کا بخار خارج کردیا جائے۔

(۱۳) ایک سیدھی نلی ایک سرے پر بند دوسرے پر کھلی، ایک محور کے گرد جو اس کو زاویہ قائمہ پر ملتا ہے مستقل زاوئی رفتار سے گھوم رہی ہے۔ جاذبہ ارض کے عمل کو نظر انداز کرکے نلی کے اندرونی ہوا کی کثافت کسی نقطہ پر معلوم کرو۔

(۱۴) یکساں سوراخ کی ایک خمیدہ نلی کے بازو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ یہ نلی اپنے انتصابی بازو کے گرد جس کا سرا پانی میں غرق ہے مستقل زاوئی رفتار سہ سے گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی بازو میں جس ارتفاع تک پانی چڑھیگا وہ ہوگا

$$\frac{\Pi}{ج\, ث}\left(1 - و^{-\frac{سہ^2 ا^2}{2م}}\right)$$

جہاں افقی بازو کا طول ا، کرۂ ہوائی کا دباؤ Π، پانی کی کثافت ث ہے اور م وہ نسبت ہے جو کرۂ ہوائی کے دباؤ کو اس کی کثافت کے ساتھ ہے۔

(۱۵) ا نصف قطر کی یکساں تپلی دائری نلی جس میں ہوا ہے ایک محور کے گرد زاوئی رفتار سہ سے گھوم رہی ہے یہ محور نلی کے مستوی میں واقع ہے اور اس کا فاصلہ نلی کے مرکز سے ج ہے ہوا کے وزن کو نظر انداز کرکے (۱۲۵)
کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر ج، ا سے کم ہو اور اعظم اور اقل دباؤ د اور دَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$لوک \frac{د}{دَ} = \frac{سہ^2}{2م}(ا + ج)^2$$

(۱۶) اگر دو مقامات کے بار پیمائی ارتفاعوں کے لوکارثموں کے فرق کو .... ا سے ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس سے تخمیناً وہ فرق حاصل ہوگا

جو ان مقامات کے ارتفاعوں میں ہے جبکہ ان ارتفاعوں کو فیدموں (Fathoms) میں ناپا جائے۔

(۱۷)۔۔۔ ح اور حَ حجم کے دو غیر موصل ظرف ہوا سے بھرے ہوئے ہیں، ان میں ہوا کے دباؤ د، دَ ہیں اور تپشیں ت، تَ۔ اگر ہوا کی ان کمیتوں کو ح حجم کے ایک غیر موصل برتن میں ملا دیا جائے تو آمیزہ کا دباؤ معلوم کرو۔

(۱۸)۔۔۔ دو جوفے جن میں ہوا ہے شیشے کی یکساں سوراخ دار افقی نلی سے ملا دیئے گئے ہیں اور اس نلی کے اندر مائع کا ایک بلبلہ، ہوا کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ جوفوں کو علی الترتیب ت۱ درجے اور ت۲ درجے تک گرما کر بلبلہ کے مقام میں ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اگر ہر جوفہ کی تپش کو بقدر تہ درجے کے گھٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ بلبلہ میں مزید ہٹاؤ پیدا ہوگا جو ابتدائی ہٹاؤ کے ساتھ

۲ عہ تہ : ۲ + عہ (ت۱ + ت۲ - ۲ تہ)

کی نسبت رکھیگا جہاں پھیلاؤ کی شرح عہ ہے۔

(۱۹)۔ایک لچکدار کروی لفافہ کے گرد ہوا ہے جو بخار سے سیرشدہ ہے۔ اگر اس کی اندرونی ہوا کا دباؤ کرۂ ہوائی کے دباؤ کا دوچند ہوتا تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا دوچند ہو جاتا اور اگر اس کے اندر، کرہ ہوائی کے دباؤ پر جتنی ہوا سما سکتی ہے اس کے ۷، گنا ہوا ہوتی تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا سہ چند ہو جاتا۔ یہ فرض کرکے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے سطح کا پھیلاؤ ثابت کرو کہ ہوا کے دباؤ کا $\frac{۱}{۲۵}$ حصہ بخار کے دباؤ کی وجہ سے ہے جو اس میں شامل ہے۔

(۲۰)۔ایک مخروطی خول کا زاویہ راس $\frac{\pi}{۲}$ اور ارتفاع ف ہے اس میں اس کے وزن کا دوچند پانی سما سکتا ہے اس کو اوندھا کرکے (یعنی جبکہ راس اوپر کی طرف ہو) انتصابی محور کے ساتھ پانی میں ڈبویا گیا ہے اور پھر پانی کو زاویائی رفتار (۷ ج^{۳}/۲ ف^{۳})$^{\frac{۱}{۲}}$ سے گھمایا گیا ہے۔ گھمانے کی

وجہ سے مخروط پانی میں اس قدر ڈوب جاتا ہے کہ اس کا راس پانی کی سطح میں ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ آبی بار پیما کے ارتفاع کو مخروط کے ارتفاع سے وہی نسبت ہے جو ۳ کو $\sqrt[3]{28}$ کے سے ہے۔

(۲۱) ایک چھوٹے غبارہ میں ہوا ہے اور ۱۰۰ گرین سیسہ اس کے ساتھ بندھا ہوا ہے۔ اس کے لفافہ کی وہی کثافت ہے جو پانی کی ہے۔ سیسہ سمیت اس کو پانی میں ڈبویا گیا ہے۔ اگر پانی کی تپش اور کرہ ہوائی کے دباؤ پر غبارہ میں ایک مکعب انچ ہوا سا سکے تو کتنی گہرائی تک اس کو ڈبونا پڑے گا کہ یہ غیر قائم توازن کے محل میں آجائے جبکہ آبی بار پیما کا ارتفاع ۳۲ فٹ ہو اور یہ دیا گیا ہو کہ

ہوا کی کثافت : پانی کی کثافت : سیسہ کی کثافت = ۱ : ۸۰۰ : ۹۱۲۰

(۲۲) ایک یکساں ٹھوس مکافی نما سے اس کا نصف حجم علیحدہ کر کے ایک پیالہ بنایا گیا ہے اس طور پر کہ اس کا اندرونی احاطہ ایک مساوی ہم محور مکافی نما ہے جس کا راس قبل الذکر مکافی نما کے ماسکہ پر ہے۔ پیالہ سیال میں اوپر دار راس اور انتصابی محور کے ساتھ ڈبویا گیا ہے اور نیچے سے اتنی گیس خلا میں داخل کی گئی ہے کہ راس سیال کی سطح میں اُٹھ آتا ہے اب اگر پیالے کے اندرونی احاطہ کی نصف گہرائی تک پانی ہو تو ثابت کرو کہ سیال کی کثافت مکافی نما کی کثافت کا $\frac{۵}{۳}$ ہے۔

(۲۳) اگر ہوا کا دباؤ ایسے بدلے جیسے اس کی کثافت کی $(۱ + \frac{۱}{م})$ ویں قوت تو تپش اور جاذبہ ارض کے تغیرات کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ کرہ ہوائی کی بلندی متجانس کرہ ہوائی کی بلندی کا (م + ۱) گنا ہو گی۔

(۲۴) و وزن کا فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ساکن ہے۔ اسطوانہ کی عمودی تراش ک ہے اور فشارہ ہوا کے ستون کی گہرائی ا سے تھما ہوا ہے۔ فشارہ کے ڈنڈے پر ایک انتصابی دھکہ ق پڑتا ہے جس سے فشارہ بقدر ف فاصلے کے نیچے چلا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{و} + \pi\,\text{ک})\left\{\text{ف} + \text{و ڈک}\left(1 - \frac{\text{ف}}{\text{ڈ}}\right)\right\} + \frac{\text{ج ق}^2}{2\,\text{و}} = 0$$

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ π ہے۔

۲۵۔۔۔ ایک کروی غبارے کا نصف قطر ر ہے اور اس میں گیس کی کچھ مقدار ہے جسکی کثافت سطح زمین پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ پر ثہ ہے۔ اگر غبارہ تناؤ ت کو عیں سنبھالنے کے قابل ہو تو ثابت کرو کہ یہ پھٹ جائے گا اگر اس کی رفتار اتنی ہو جائے جتنی

$$\frac{\text{و}^2}{2} = \frac{2\,\text{ت}}{\text{ثہ ر}} + \text{م ڈک}\left(1 - \frac{2\,\text{ت}}{\text{د ر}}\right)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ جہاں غبارہ کی حرکت کی مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۲۶۔۔۔ یہ فرض کرکے کہ کرہ ہوائی پوری فضا میں پھیلا ہوا ہے اور اس کی تپش ہر جگہ یکساں ہے ثابت کرو کہ مریخ کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کو زمین کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کے ساتھ تقریباً ۱۶ : ۵ کی نسبت ہوگی۔ یہ دیا گیا ہے کہ مریخ کی کثافت وہی ہے جو زمین کی ہے اور اس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا نصف ہے اور زمین پر کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۰۳۳ گرام فی مربع سمر ہے اور ہوا کے ایک مکعب سمر کمیت کا وزن ۰٫۰۰۱۲۴۷ گرام ہے۔ زمین کا نصف قطر ۶۳۶۶۸۰۰ میٹر ہے۔

۲۷۔۔۔ اگر بار پیما کی درجہ بندی کے بعد ہوا کا ایک خفیف حجم ح پارہ کے اوپر کے خلا میں داخل کیا جائے اور تپش غیر متغیر رہے تو ثابت کرو کہ کسی مشاہدہ شدہ ارتفاع ف کے لئے

$$\frac{\text{ف}}{\text{ج} - (1 - \text{ن})(\text{ف} - \text{ف})} \times \frac{\text{ح}}{\text{ع}}$$

کی تصحیح کرنی پڑے گی۔ جہاں نلی کی تراش کا رقبہ ع، برتن کی تراش کا رقبہ ع/ن اور ج اُس ظاہری خلا کا طول ہے جو ناقص بار پیما کے دوسرے مشاہدہ شدہ

ارتفاع ف کے جواب میں ہے۔

۲۸ —— اگر کرہ ہوائی کی تپش بلندی کے ساتھ یکساں طور پر گھٹتی فرض کی جائے تو ثابت کرو کہ سطح بحر سے کسی مقام کا ارتفاع ی

$$= ا \left\{ ١ - \left(\frac{ف}{ف_ب} \right)^{م} \right\}$$

جہاں اس مقام پر اور سطح بحر پر بار پیما کے ارتفاع بالترتیب ف، ف ب ہیں اور ا، م مستقل ہیں۔

۲۹ —— حملی توازن کی حالت میں ثابت کرو کہ کرہ ہوائی کی تپش اوپر وار یکساں شرح سے گھٹتی جائے گی۔ اس شرح کو سنٹی گریڈ کے درجوں میں فی ۱۰۰ میٹر معلوم کرو جبکہ حسب ذیل باتیں معلوم ہوں:-

بار پیما کا ارتفاع = ۷۶٫۰

تپش (مطلق) = ۲۷۲° سنٹی گریڈ

ہوا کی کثافت = ۰۰۱۲۹٫

پارہ کی کثافت = ۱۳٫۶۰

نوعی حرارتوں کی نسبت (جہ) = ۱٫۴۲

(س۔ گ، ث نظام میں)۔

باب ہشتم

ملائم سطحوں کا تناؤ

۱۳۰۔ ملائم سطحوں (Flexible surfaces) کے توازن کے عام مسئلہ پر لگرانج نے (Mecanique Analytique Tom. I) میں اور نیز زیادہ تفصیل سے پائیسن نے (Memoirés de l'Institut, 1812) میں بحث کی ہے۔ ہم اس باب میں خاص قسم کے سوالات پر غور کریں گے جو عام صورت سے پیدا ہوتے ہیں یعنی ایسے سوالات پر جو ملائم سطحوں پر سیالات کے عمل سے متعلق ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سیال کا دباؤ کسی سطح پر جو سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہو اُس سطح کی عمادی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے فی الحقیقت ہمیں ایسی ملائم سطحوں کے توازن پر غور کرنا ہوگا جو عمادی دباؤں اور ان کو محدود کرنے والے خطوط پر کے تناؤں کے زیر عمل ساکن ہوں۔

عمومیت کی خاطر اصطلاح "ملائم سطح" ایسی چیزوں کو تعبیر کرتی ہے جیسے کپڑا اور پتلا کاغذ جن کو موڑنے میں کوئی قابل قدر مزاحمت محسوس نہیں ہوتی اور جو موڑنے یا مروڑنے کے بعد اپنی ابتدائی شکل پر لوٹنے کا میلان نہیں رکھتیں۔ کامل طور پر ملائم سطحوں کو خواہ وہ امتداد پذیر (Extensible) ہوں یا امتداد ناپذیر بے لچک خیال کیا جائے گا۔

دفعات ذیل میں ہم یہ فرض کریں گے کہ ملائم سطح کے کسی دو حصوں کے درمیان جو زور عمل کرتا ہے اُس کی سمت سطح کے بالکلیہ مماس ہے۔

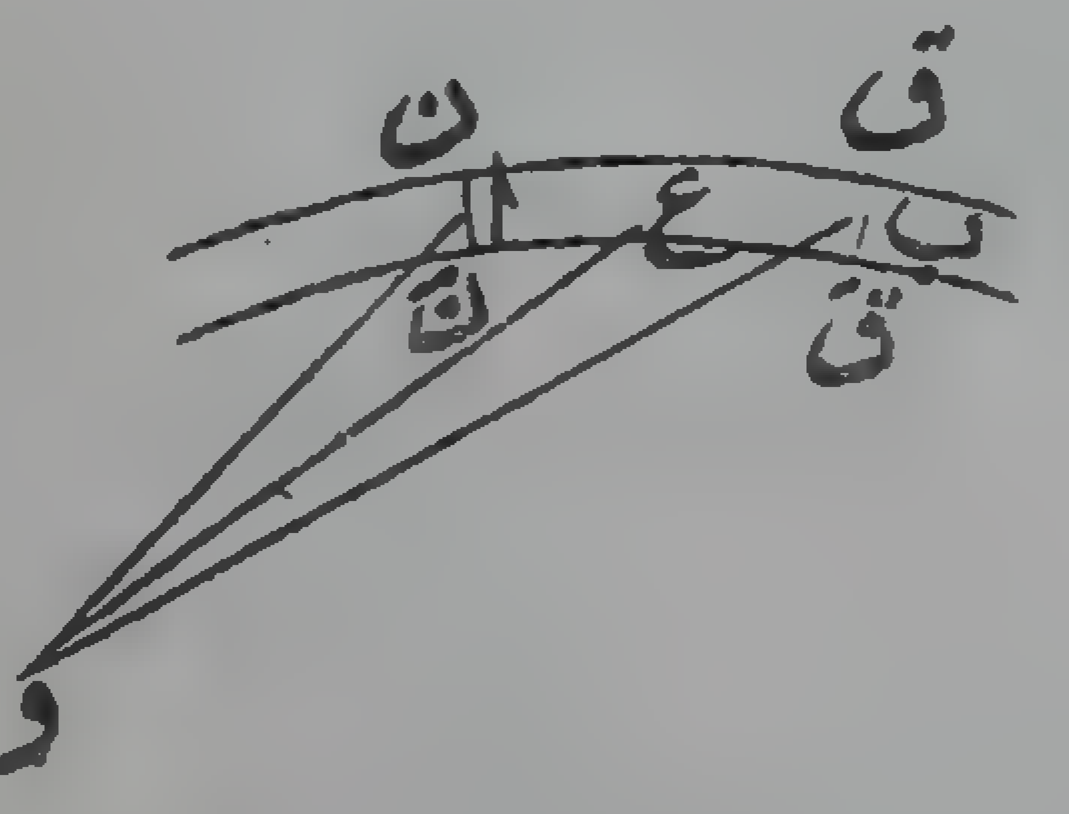
تناؤ کا ناپ

ایک ملائم اور بے لچک سطح پر غور کرو جو تناؤ کی حالت میں ہے خواہ یہ سطح استداد پذیر ہو یا استداد ناپذیر اور فرض کرو کہ نقطہ ن میں سے گذرنے والے کسی عمادی مستوی سے جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کی ایک چھوٹی قوس ق ن قَ ہے۔ اب اگر خط ق قَ سے محدود ہونے والی سطح کے حصوں کے درمیان حاصل عمل ت × ق قَ ہو جو مماسی مستوی میں ق قَ پر عمود ہے تو نقطہ ن پر کے تناؤ کا ناپ ت ہوگا۔ بہ الفاظ دیگر نقطہ ن پر کے تناؤ کی شرح ت ہے یا وہ قوت جو اس شئے کی ایسی تراش پر عمل کریگی جسکا طول اکائی ہے اور جو ہر جگہ ایسی حالت تناؤ میں ہے جیسی کہ ن پر کی سطح۔

عام طور پر سطح کے ان حصوں کے درمیان جن کو ق قَ علیحدہ کرتا ہے جو زور عمل کرے گا وہ ق قَ کے عمود وار نہیں ہوگا اور اس لئے وہ تناؤ ت × ق قَ اور قوت ته × ق قَ کا حاصل ہوگا جہاں قوت ته × ق قَ منحنی ق قَ کے مماس کی سمت میں عمل کرتی ہے اور ته اسی قسم کی ایک مقدار ہے جیسی کہ ت ہے اور اس کی پیمائش بھی اسی طرح ہوتی ہے۔

۱۳۱ — ایک ظرف قایم مستدیر اسطوانے کی شکل کا ہے جس کی منحنی سطح ملائم اور جس کا محور انتصابی ہے۔ اس ظرف میں سیال ہے۔ کسی نقطہ پر کے تناؤ اور دباؤ کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔ (۱۳۸)

فرض کرو کہ سطح کا ایک چھوٹا حصہ ن قَ ہے جو دو مستویوں کے درمیان جو محور پر عمود وار ہیں اور اسطوانے کے دو کھونٹوں کے درمیان محدود ہے۔



فرض کرو کہ ن ق کے کسی نقطہ پر افقی تناؤ ت اور دباؤ د ہے۔ تب سطح کا عنصر ن قَ ذیل کی قوتوں کے

زیر عمل متوازن ہوگا:- عمادی دباؤ د × ن نَ × ن ق، مماسی قوتیں ت × ن نَ اور ت × ق قَ، اور ن ق اور نَ قَ پر کے انتصابی تناؤ اگر انتصابی سمت میں کوئی تناؤ عمل کریں۔

پس قوتوں کو عماد و ع کی سمت میں تحلیل کرنے سے جو نقطہ وسطی ع تک کھینچا گیا ہے۔

د × ن نَ × ن ق = ۲ت × ن نَ جب ($\frac{1}{2}$ ن و ق)

= ۲ت × ن نَ $\frac{1}{2}$ $\frac{\text{ن ق}}{\text{ر}}$، اگر نصف قطر ر ہو،

یا ت = د ر

۱۳۲— اگر کسی شکل کی اسطوانی ملائم سطح میں سیال ساکن ہو تو اسطوانے کے محور کے علی القوایم تراش کے کسی نقطہ پر کا تناؤ وہی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سطح کا ایک عنصر ن قَ ہے (شکل دفعہ ۱۳۱) فرض کرو کہ ا پر کا مرکز انحنا و، ا پر کا تناؤ ت، ب پر کا ت + مف ت اور نقاط ا اور ب پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ مف فہ ہے۔

نیز فرض کرو کہ ن قَ پر کے سیالی دباؤ کی سمت کا میلان و ا کے ساتھ مف سا ہے جبکہ و ا، و ب کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔

تب ا پر کے مماس کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے

(ت + مف ت) جم فہ - ت = د × ا ب جب مف سا

= د ر مف فہ جب مف سا

اگر ا پر کا نصف قطر انحنا ر ہو۔

پس بالآخر جب کہ مف فہ معدوم ہو جائے

$\frac{\text{ذ ت}}{\text{ذ فہ}}$ = ۰

اور چونکہ تراش کے ہر نقطہ پر یہ بات صادق آتی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ت

مستقل ہے ۔

سمت و ع میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے گذشتہ دفعہ کی طرح ربط (۱۲۹)

ت = در

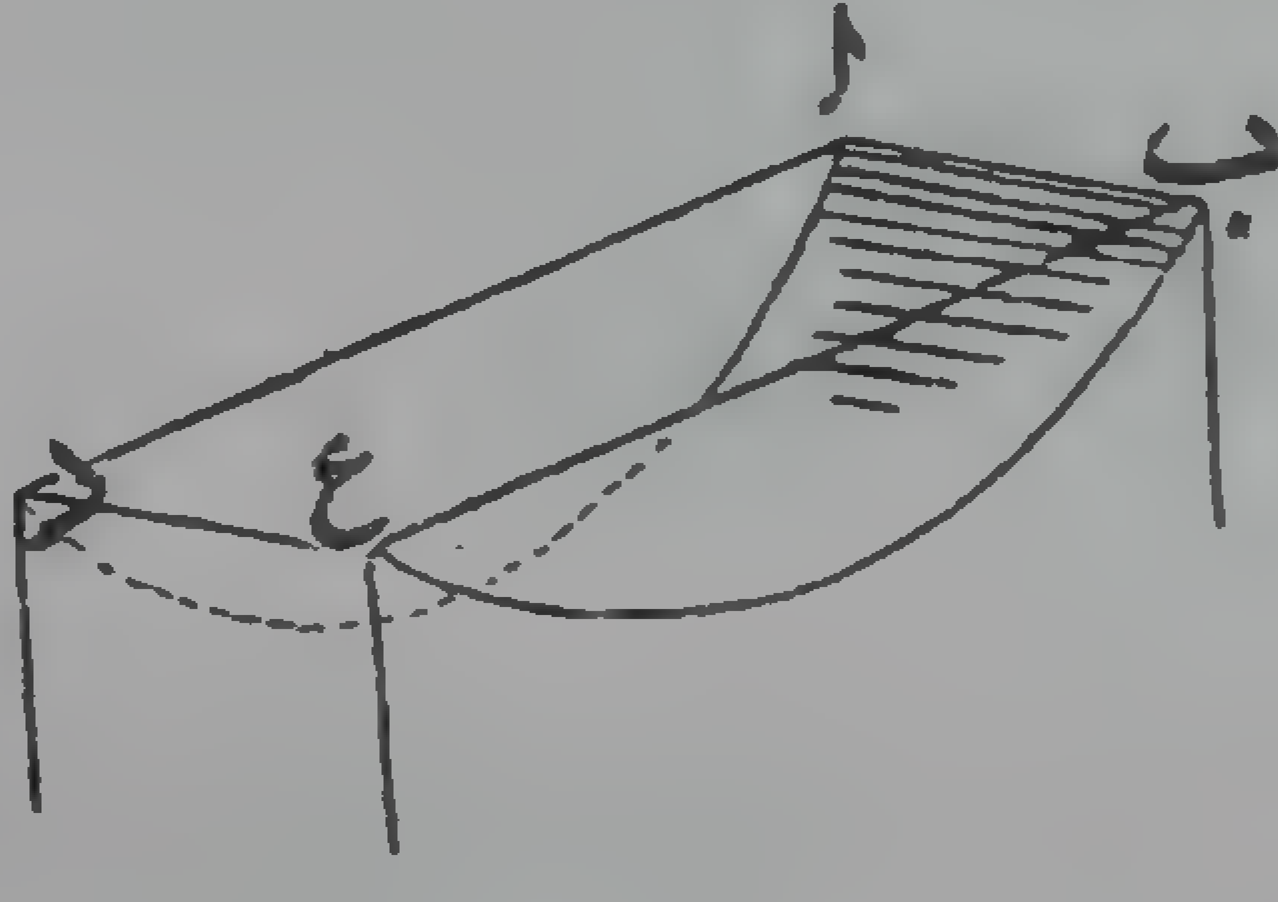
حاصل ہوگا جو سطح کے کسی نقطہ پر کون سے علی القوایم تناؤ، دباؤ اور انحنا کے درمیان ربط ہے ۔

ت کو مستقل لینے سے مساوات در = ت سے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم ہو جائیگا اگر سطح دی ہوئی ہو۔

اگر سیال پر عمل کرنے والی قوتیں دی ہوئی ہوں اور اس لئے د، سیال کے اندر کسی نقطہ کے محددوں کا معلومہ تفاعل ہو تو ایسی مساوات سے لائم سطح کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جاتا ہے ۔

ثوبیہ اور لدنیہ

۱۳۳ — ثوبیہ (Lintearia) وہ منحنی ہے جو مہین کپڑے کے ایک مستطیلی ٹکڑے پر پانی ڈالنے سے پیدا ہوتا ہے جبکہ اس کے سرے افقی طور پر تھامے گئے ہوں اور پانی بازوں پر سے نکلنے نہ پائے ۔



اس طرح اگر کپڑے یا جھلی کے کنارے اب، ع د ایک صندوق کے کناروں پر ثبت کردئے جائیں اور اگر اضلاع اد، ب ع صندوق پر ٹھیک بیٹھتے ہوں اور کپڑے پر پانی ڈالدیا جاے اور پھر اد یا ب ع کے متوازی، ایک انتصابی مستوی سے کپڑے کو تراشا جائے تو یہ عمودی تراشش ثوبیہ ہوگی۔

دباؤ چونکہ عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے کپڑے کا تناؤ مستقل ہے اور اس لئے اگر نقطہ ن پر کا نصف قطرِ انحنا ر ہو اور ب ع پانی کی سطح ہو

(دوسری شکل دیکھو) تو

ج ث × ن ل × ر مستقل ہے۔

تناؤ کو ج ث م۲ سے تعبیر کرنے سے اور ن م = ما لینے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{م^۲}{ر} = ن ل = ف - ما$$

پس

$$\frac{م^۲}{ر^۲}\ \frac{فر ر}{فر فہ} = \frac{فر ما}{فر فہ} = ر جب فہ$$

اور " $\frac{م^۲}{۲ ر^۲} = $ جم فہ − جم عہ ، اگر ب پر کا انصراف عہ ہو ،

یا $\frac{ما}{ر}\ \frac{فر س}{فر فہ} = \frac{م}{\sqrt{۲}\sqrt{\text{جم فہ − جم عہ}}}$

جو ثوبیہ کی ذاتی مساوات ہے۔

اب اس میں جب $\frac{عہ}{۲}$ = ک ، اور جب $\frac{فہ}{۲}$ = ک جن ع[1] (۱۴۰)

رکھنے سے حاصل ہوگا

$$فرس = \frac{م\ فر فہ}{۲\ ما \sqrt{\text{جب}^۲ \frac{عہ}{۲} - \text{جب}^۲ \frac{فہ}{۲}}}$$

$$= \frac{م\ ک\ \text{صن ع طن ع فر ع}}{ک\ ما \sqrt{۱ - ک^۲ \text{جن}^۲ ع} \sqrt{۱ - \text{جن}^۲ ع}}$$

---

[1] ترقیم :- جن ع = Sn u

صن ع = Cn u

طن ع = Dn u

= م فرع

∴ س = م ع + مستقل

یا اگر ہم س کو زیرترین نقطہ سے ناپیں تو

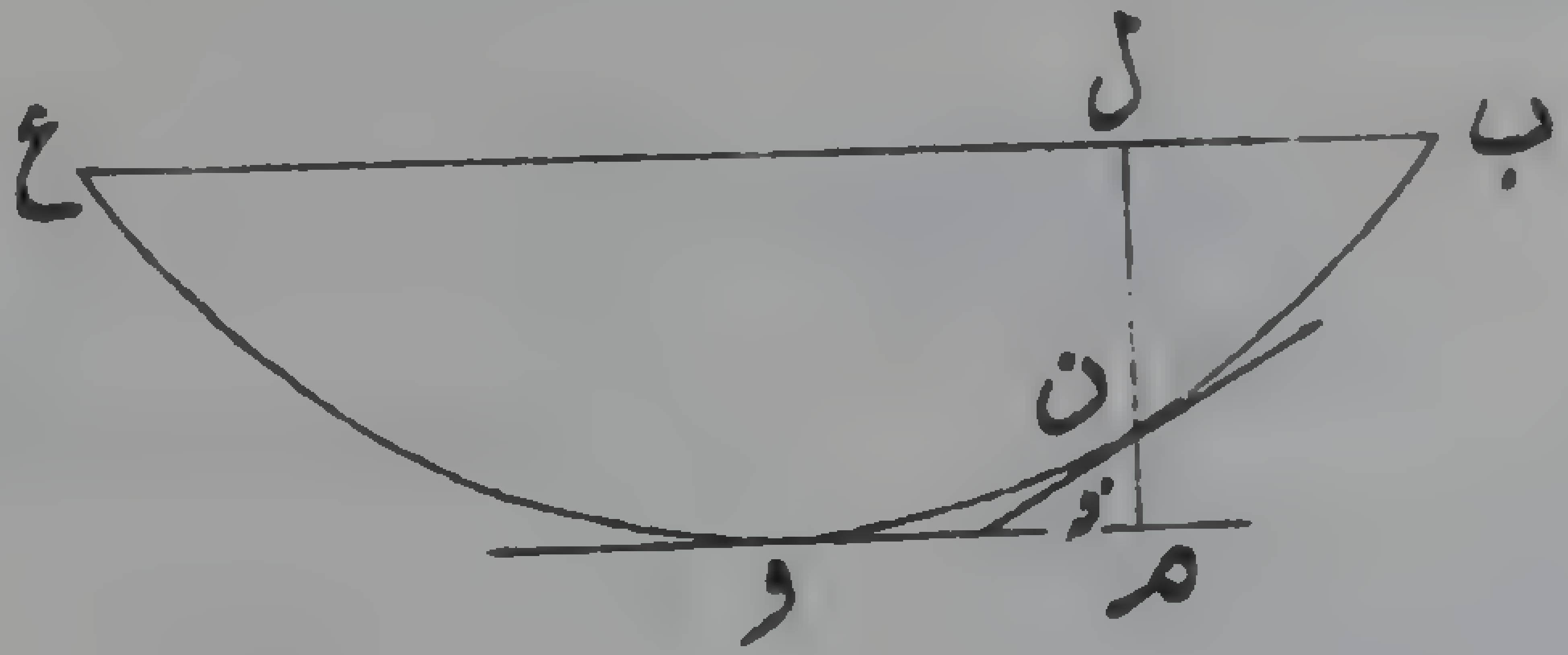
س = م ع .... (۱)

تب گہرائی ن ل = ف − ۱ = م²/ر

= م √۲ √(جم فہ − جم ع)

= ۲ م ک √(۱ − جن² ع)

یعنی ف = ۲ م ک صن ع .... (۲)



پھر اگر و ھ = لا

تو فرلا/فرس = جم فہ = ۱ − ۲ ک² جن² ع

∴ لا = م ∫₀^ع (۱ − ۲ ک² جن² ع) فرع

یعنی لا = م {۲ ق (حط ع) − ع} .... (۳)

جہاں ق دوسری قسم کا ناقصی تکملہ ہے۔

حدی شرائط یہ ہیں کہ لا، ما، س سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں جبکہ ع = ۰

ق (حط ع) = E (am u)

اور اُن قیمتوں کو مساوات (۲) میں استعمال کرنے سے ہمیں ب = ۲ م ک حاصل ہوتا ہے۔ نیز اگر لا = ا اور س = ل جب کہ ما = ف تو ان کو مساوات (۲) میں مندرج کرنے سے ۰ = صن ۶ / پس معلوم ہوا کہ ۶ کی متناظر قیمت ک ہے جو ناقصی تفاعل کا حقیقی ربعی دور ہے ۔ اور اس لئے (۱) اور (۳) سے ہم حاصل کرتے ہیں

ل = م ک

اور ا = م {۲ ق (ط ک) - ک}

اس لئے توبیہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ مستقلوں کے درمیان وہ روابط ہوں جو اوپر بیان ہوئے۔

۱۴۳ — لدنیہ[2] (Elastica) وہ منحنی ہے جو ایک لچکدار ڈنڈے کو موڑنے (۱۴۱)
سے پیدا ہوتا ہے یہ توبیہ کے تماثل ہے۔

ڈنڈے کو ب و ع سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ توازن / ب اور ع پر کی قوتوں سے جو متضاد سمتوں میں عمل کرتی ہیں برقرار رہتا ہے۔

نقطہ ن پر جھکاؤ کا معیار اثر (Bending moment) انحنا کے متناسب ہے[1]۔ اور اس لئے ب ن کے توازن پر غور کرنے سے اور نقطہ ن کے گرد معیار لینے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نقطہ ن پر کا انحنا ایسے بدلتا ہے

[1] Routh, *Analytical Statics*, II. p. 269, or Kelvin and Tait, *Natural Philosophy*, 591

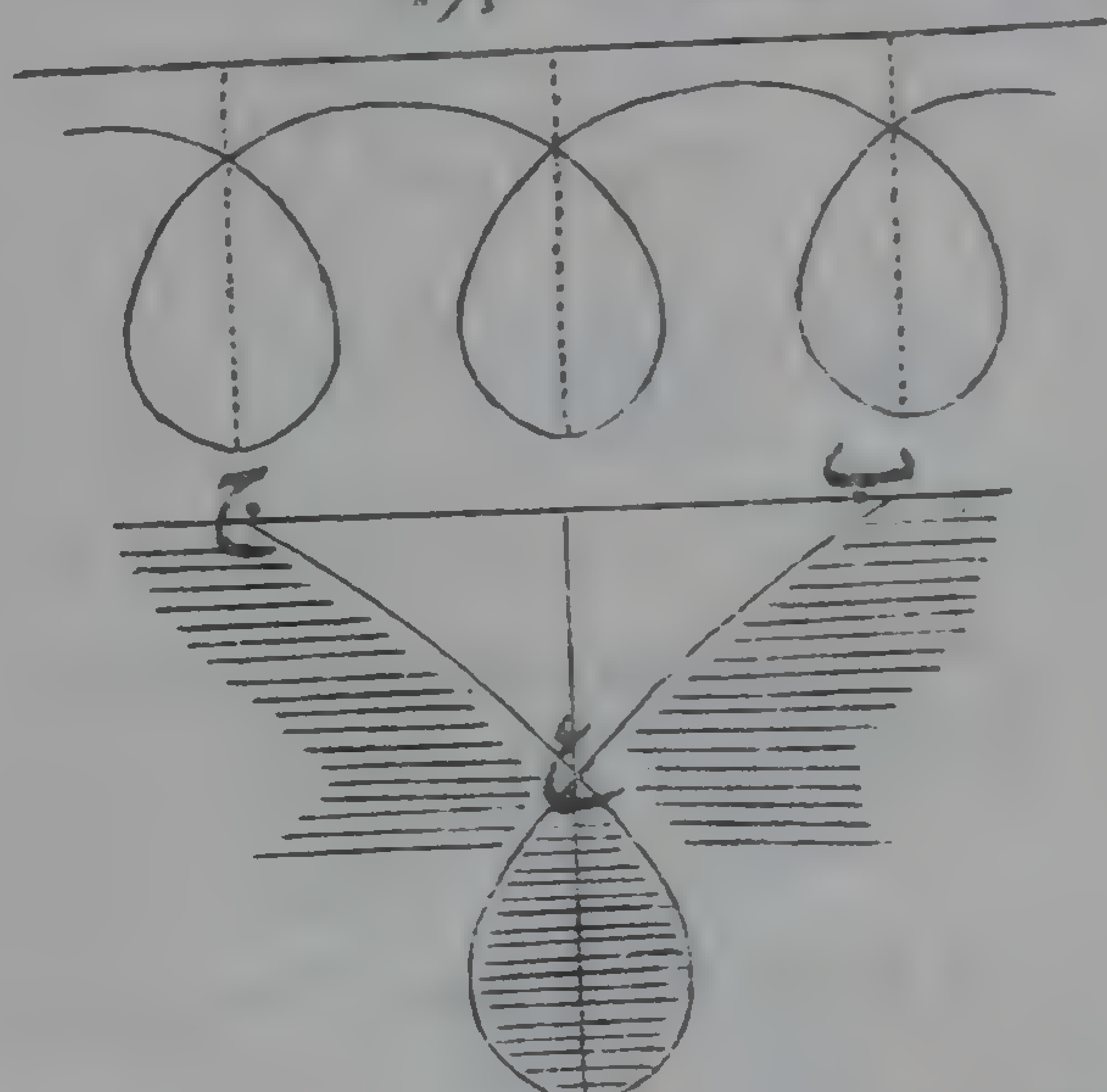
[2] For a full discussion of the Elastica, see Kelvin and Tait, *Natural Philosophy*, 611; Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, p. 384, or L. Levy, *Precis Elementaire de la Theorie des Fonctions Elliptiques*, p. 112.

جیسے ن ل۔ اس طرح

ر × ن ل = م۲

اور اس لئے لدنیہ، ثوبیہ کے مماثل ہے۔

۱۳۵ — لدنیہ لفیفوں (convolutions) کی مختلف تعداد پر مشتمل ہو سکتا ہے جس طرح کہ اشکال ذیل سے ظاہر ہے



پانی کی سطح اور اس کے دباؤ کی مناسب ترتیب و تنظیم سے ثوبیہ کے بھی مختلف لفیفے ہو سکتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم ب ج کو سطح آب تصور کریں اور اس طرح کے انتظامات عمل میں لائیں کہ پانی فضا ر و ع میں بھر دیا جائے اور پانی ب ع اج ع حصوں کو اوپر وار دبائے تو ہمیں ایک لفیفے والے لدنیہ کے مماثل ثوبیہ مل جائیگا۔

اگر ہم یہ تصور کریں کہ ب ج، مڑے ہوئے ڈنڈے کو ب اور ج پر مس کرتا ہے جس کے لئے یہ ضروری ہوگا کہ ڈنڈا لا متناہی طول کا ہو اور اگر گذشتہ کی طرح و پر کے مماس سے انصراف ٹا پایا جائے تو

ر = ∞، جبکہ ف = ۲۱

اوراس لئے $\frac{\text{م}^2}{\text{ر}^2} = ۱ + \text{جم فہ}$ ، یا $\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}} = \frac{\text{م}}{۲\,\text{جم}\,\frac{\text{فہ}}{۲}}$

اگر س کو و سے ناپیں تو

$$\text{س} = \text{م لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{فہ}}{۴}\right)$$

آئندہ معلوم ہوگا کہ یہ شعری منحنی ہے۔

۱۳۶ —— ویرس ٹراس (Weirstrass) کے ناقصی تفاعیل کی رقوم میں بھی ہم ثوبیہ کی[1] مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ مثلاً دفعہ (۱۳۲) سے

$$\frac{\text{ف} - \text{ا}}{\text{م}^2} = \frac{۱}{\text{ر}} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرلا}^2}}{\left\{۱ + \left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرا}}}{\left(۱ + \text{ع}^2\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\therefore \quad \frac{۲\,\text{ف ا} - \text{ا}^2}{\text{م}^2} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۱ + \text{ع}^2}} = ۱ - \text{جم فہ} \quad \ldots\ldots(۱)$$

تاکہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = ۱ - \frac{۲\,\text{ف ا} - \text{ا}^2}{۲\,\text{م}^2}$

اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرا}} = \frac{۲\,\text{م}^2 + \text{ا}^2 - ۲\,\text{ف ا}}{\sqrt{(۲\,\text{ف ا} - \text{ا}^2)(۴\,\text{م}^2 - ۲\,\text{ف ا} + \text{ا}^2)}}$

رکھو $۲\,\text{ف ا} - \text{ا}^2 = \text{ی}$ تو $۲(\text{ف} - \text{ا})\,\text{فرا} = \text{فری}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فری}} = \frac{۲\,\text{م}^2 - \text{ی}}{\sqrt{۴\,\text{ی}(\text{ی} - ۴\,\text{م}^2)(\text{ی} - \text{ف}^2)}}$$

[1] جیمس برنولی پہلا شخص تھا جس نے ثوبیہ کی مساوات دریافت کی۔

اور فرض کرو کہ
ی = و + ⅓ (۴ م² + ف²)

تو فرلا / فری = { ⅓ (۲ م² − ف²) − و } / √ (۴ {و + ⅓ (۴ م² + ف²)} {و − ⅓ (۸ م² − ف²)} {و + ⅓ (۴ م² − ۲ ف²)})

اب فرض کرو کہ
ء = ∫ فرو / √ (۴ (و − ع۱) (و − ع۲) (و − ع۳))

جہاں ع۱ = ⅓ (۸ م² − ف²)، ع۲ = − ⅓ (۴ م² − ۲ ف²)، ع۳ = − ⅓ (۴ م² + ف²)

(۱۴۳) پس چونکہ (۱) سے ف = ۲ م جب ء/۲، ف² < ۴ م²

اس لئے ع۱ > ع۲ > ع۳

اس لئے و = فھ (ء + صد) جہاں صد مستقل ہے

اب ۰ ≤ لا ≤ ف، اسلئے ۰ ≤ ی ≤ ف²

اور ∴ − ⅓ (۴ م² + ف²) ≤ و ≤ − ⅓ (۴ م² − ۲ ف²)

یعنی ع۳ ≤ و ≤ ع۲

پس ء کو حقیقی لینے سے، صد کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سہ ہونا چاہیئے اور اس کا حقیقی حصہ، ء کی زیرین حد کے مناسب انتخاب سے صفر لیا جاسکتا ہے۔

∴ و = فھ (ء + صد۳)

اس طرح چونکہ فرلا / فرو = − (½ ع۲ + و) / √ (۴ (و − ع۱) (و − ع۲) (و − ع۳))

∴ فرلا = − { ½ ع۲ + فھ (ء + صد۳) } فرء

اور　　لا = ھر - ½ ع۲ ع + طا (ع + سہ)　　[$\zeta(u+\omega_3)$ ≡ (طا(ع + سہ)]

جہاں طا، ویرسٹراس کا زیٹا تفاعل (Zeta-Function) ہے اور ھر مستقل ہے۔

نیز جبکہ　لا = ۰ تو ی = ۰ اور و = ع۳ = فھ (سہ)

پس　ع = ۰　　اور ھر = - طا (سہ)، پس

لا = طا (ع + سہ) - طا (سہ) - ½ ع۲ ع ...... (۲)

اور چونکہ　۲ ف ما - ما۲ = ی = و - ع۳، اس لئے

۲ ف ما - ما۲ = فھ (ع + سہ) - ع۳ .... (۳)

نیز　فرس / فرما = {۱ + (فرلا / فرما)۲}^½ = ۲ م۲ / √(۲ ف ما - ما۲)(۴ م۲ - ۲ ف ما + ما۲)

اسی طرح انہی اندراجات سے

فرس / فری = ۲ م۲ / √{۴ ی (ی - ۴ م۲)(ی - ف۲)}

اور　فرس / فرو = ۲ م۲ / √۴ (و - ع۱)(و - ع۲)(و - ع۳)

پس　فرس = ۲ م۲ فرع

∴　س = ۲ م۲ ع .... (۴)

بشرطیکہ س کو و سے ناپا جائے، جہاں ع حسب بالا صفر ہو جاتا ہے۔

۱۳۷- اگر لا = لہ اور س = ل جبکہ ما = ف تو اس قیمت کے لئے　(۱۴۴)

ی = ف۲ اور و = - ⅓ (۴ م۲ - ۲ ف۲) = ع۲

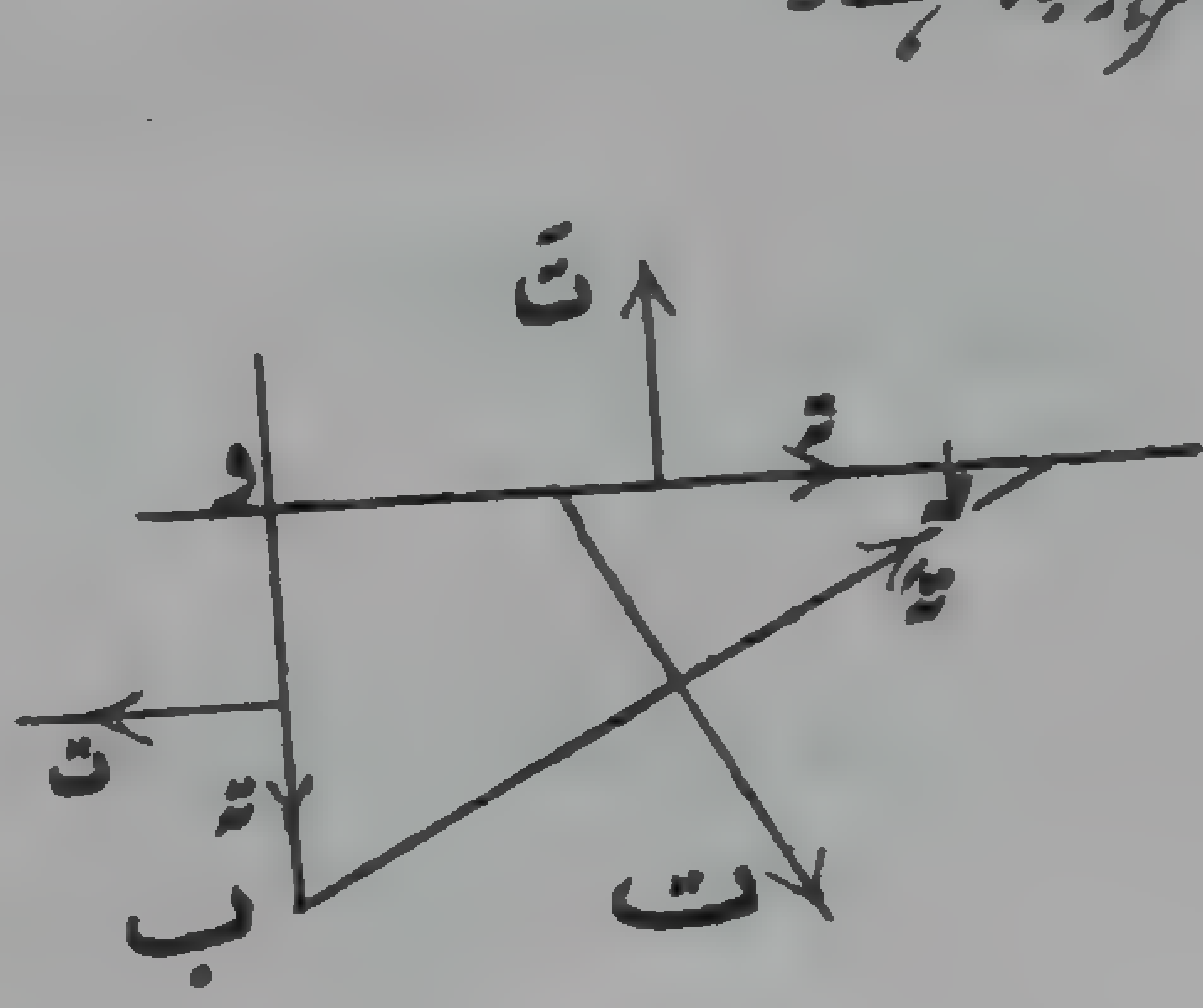
اس لئے فہ (ع + سہ۲) = ع۲ ، پس ع کی متناظر قیمت سہ۱ ہونی چاہیئے اور مستقلوں اور دوروں میں روابط ذیل ہونگے

ل۱ = طا (سہ۲) ـ طا (سہ۲) ـ ½ ع۲ سہ۱

ل = ۲ م۲ سہ

ہم نے ایسی صورت کے لیے شکلیں کھینچی ہیں جس میں پانی ہموار سطح ب ج تک بھرا ہوا ہے۔ لیکن اگر پانی کی مقدار اس سے کم ہو تو کپڑے کے وہ حصے جن کو پانی مس نہیں کرتا مستوی ہونگے اور ف کی قیمت اس صورت میں سطح آب کے نیچے راس کی گہرائی ہوگی۔

۱۳۸ — تناؤ اور مماسی عمل۔ ایک مستوی ملائم جھلی کے توازن پر غور کرو۔ جھلی کے کسی خط پر کا زور یعنی سطح کے اُن متصل حصوں کے درمیان عمل جو اس خط سے محدود ہیں عام طور پر اس خط کے ساتھ میلان رکھے گا اور اس لئے ایک تناؤ ت اور ایک مماسی عمل تہ سے تعبیر ہوگا۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ کسی دو سمتوں میں جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہوں تہ کی قیمت وہی ہوتی ہے اور یہ کہ دو سمتیں ایسی بھی ہوتی ہیں جن کے لئے تہ صفر ہو جاتا ہے۔



سطح کا کوئی مربع عنصر لینے سے متقابل اضلاع کے ایک جوڑے پر کے مماسی اعمال تہ فرس اور (تہ + مف تہ) فرس انتہا میں جفت تہ مف س۲ بناتے ہیں اگر عنصر کا ایک ضلع مف س ہو۔ اور چونکہ اس کی تعدیل دوسرے جفت تہَ مف س۲ سے ہونی چاہیئے اگر تہَ علی القوائم سمت میں مماسی عمل

ہو اس لئے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تہ اور تہَ مساوی ہیں -

اب ایک چھوٹا مثلثی عنصر و ا ب لو جو و پر قائم الزاویہ ہے اور زوروں کو شکل کے بموجب تعبیر کرو -

(۴۵) ب ا کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

تہَ ا ب + تہ و ا جم ط + تَ × و ا جب ط = ت × و ب جم ط + تہ × و ب جب ط

∴ ۲ تہَ = (ت - تَ) جب ۲ ط - ۲ تہ جم ۲ ط

تہَ صفر ہوگا جب کہ

(ت - تَ) مس ۲ ط = ۲ تہ

جس سے دو علی القوائم سمتیں حاصل ہوتی ہیں -

۱۳۹ ——— اگر شکل میں ہم یہ مان لیں کہ و ا اور و ب صفر مماسی عمل کی سمتیں ہیں اور اگر قوتوں کو ب ا کے متوازی اور اس کے علی القوائم سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو مساواتیں

ت = ت جب² ط + تَ جم² ط

تہَ = (ت - تَ) جب ط جم ط

حاصل ہونگی -

اس صورت میں مقادیر ت اور تَ بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے یا چھوٹے سے چھوٹے اور بڑے سے بڑے تناؤں کو تعبیر کرینگی اور اس لئے ہم ان کو صدری تناؤ کہیں گے -

۱۴۰ ——— اگر ا ب پر کے حاصل زور ر × ا ب کا میلان و ا کے ساتھ فہ ہو تو

مس فہ = (تَ × و ا) / (ت × و ب) = (تَ / ت) مم ط

∴ مس فہ مس ط = تَ / ت

نیز $\quad$ ر^2 × اب^2 = ت^2 × د ب^2 + تَ^{2} × د ا^2

∴ $\quad$ ر^2 = ت^2 جب^2 ط + تَ^{2} جم^2 ط

اور $\quad$ ط کو ساقط کرنے سے ہمیں ربط ملیگا

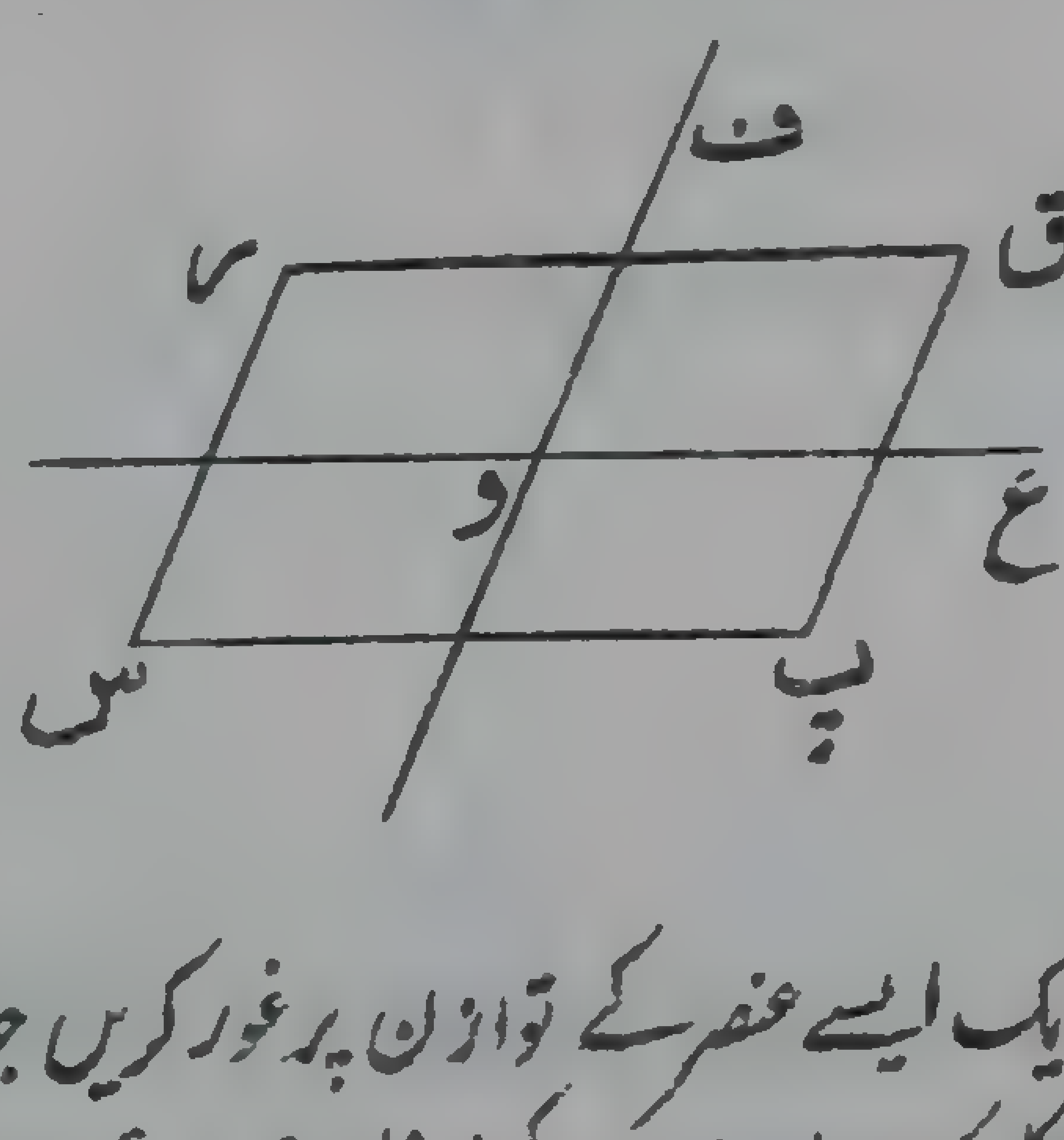
$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{فہ}}{\text{ت}^2} + \frac{\text{جب}^2\,\text{فہ}}{\text{تَ}^2}$$

اگراب سمتوں د ا اور د ب میں نقطہ د کے صدری تناؤت اور تَ ہوں اور اگر د ع کا میلان د ا کے ساتھ ط ہو تو د ع پر کے زور کی سمت د ف مساوات

$$\text{مس فہ مس ط} = \frac{\text{تَ}}{\text{ت}}$$

سے حاصل ہوگی اور زور کی مقدار فی اکائی طول سمت د ف میں اُس ناقص کے نصف قطر سے تعبیر ہوگی جس کے نصف محاور صدری تناؤں سے تعبیر ہوتے ہیں ۔

(۱۴۶) ۱۴۱ — مزدوج زور ۔ اگر د ع پرکا زور د ف کی سمت میں عمل کرے تو د ف پر کا زور د ع کی سمت میں عمل کرے گا ۔



کیونکہ اگر ہم ایک ایسے عنصر کے توازن پر غور کریں جو ایک متوازی الاضلاع پ ق ر س کی شکل کا ہو اور جس کے اضلاع د ع اور د ف کے متوازی ہوں تو پ س اور ق ر پر کے زور متعادل ہیں اور اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے

کہ پ ف اور ما س پر کے زور بھی تعادل میں ہیں اور اس لئے سمتوں د ع اور ع و میں عمل کرتے ہیں۔

۱۴۲ـــــ اگر و ع اور و ف میں سے کے مزدوج زور ما اور ما' ہوں اور اگر صدری تناؤ ت کی سمت کے ساتھ و ع اور و ف کے میلان طہ اور فہ ہوں تو دفعہ (۱۴۰) سے مساواتیں

$$\frac{1}{\text{ما}^2} = \frac{\text{جم}^2\text{فہ}}{\text{ت}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{فہ}}{\text{ت}'^2}$$

$$\frac{1}{\text{ما}'^2} = \frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{\text{ت}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{طہ}}{\text{ت}'^2}$$

حاصل ہوتی ہیں۔ جہاں طہ اور فہ میں ربط ہے

$$\text{مس فہ مس طہ} = -\frac{\text{ت}'}{\text{ت}}$$

طہ اور فہ کو ساقط کرنے سے

$$\text{ما ما}' = \text{ت ت}'$$

پس معلوم ہوا کہ کسی نقطہ پر دو مزدوج زوروں کا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے اور یہ مستقل صدری تناؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

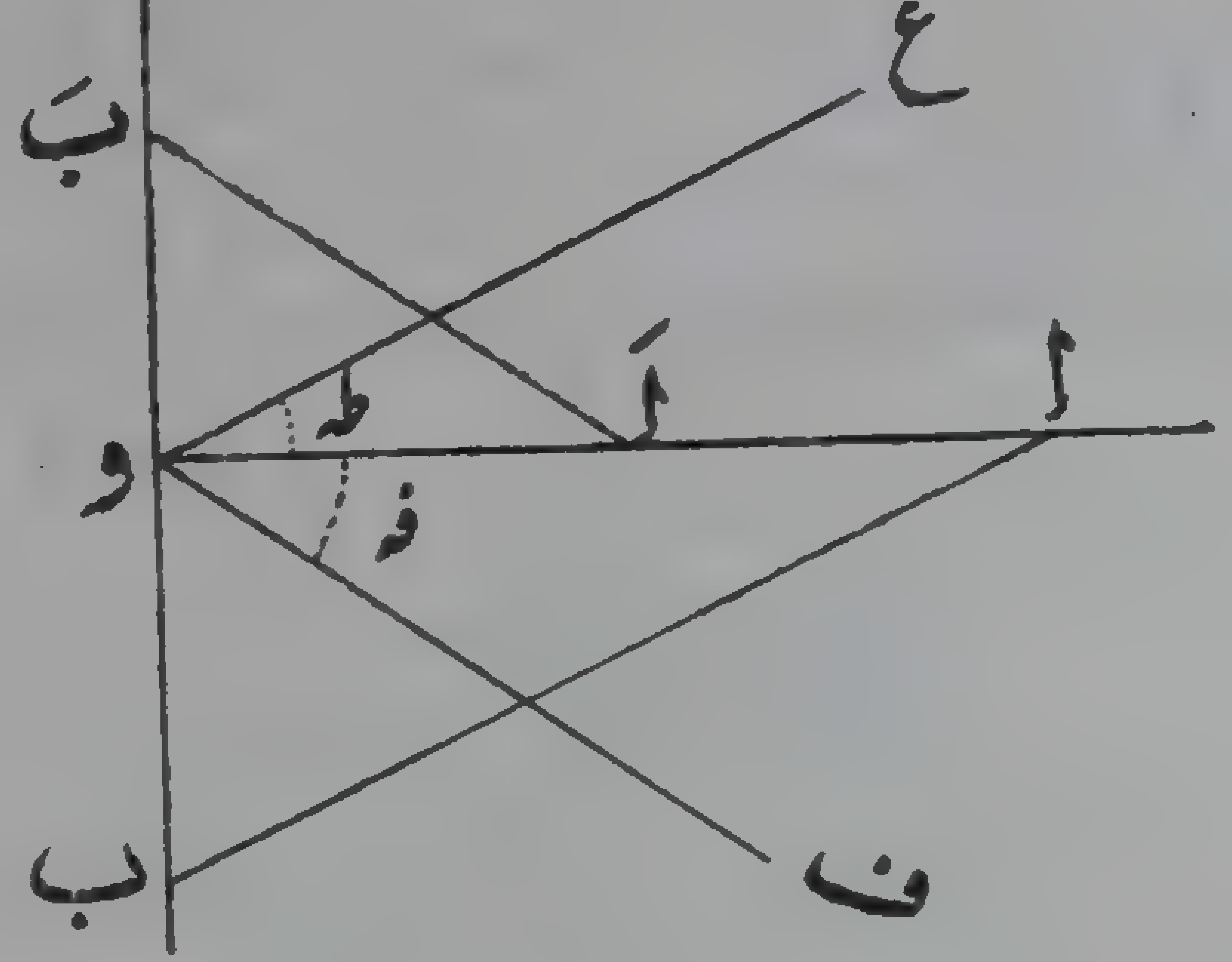
۱۴۳ـــــ یہی نتیجے دو مثلثی عناصر د ا ب، و اَ بَ کے توازن کی شرطوں کو لکھ لینے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں ا ب اور اَ بَ، و ع اور و ف کے متوازی ہیں۔

اس طرح ہمیں مساواتیں (۱۴۷)

$$\text{ما جم فہ} = \text{ت جب طہ}،\quad \text{ما جب فہ} = \text{ت}'\ \text{جم طہ}$$

$$\text{ما}'\ \text{جم طہ} = \text{ت جب فہ}،\quad \text{ما}'\ \text{جب طہ} = \text{ت}'\ \text{جم فہ}$$

حاصل ہونی چاہئیں۔ ان سے ہم مذکورہ بالا نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔



۱۴۴۔ اب اگر ہم ایک ملائم جھلی کی صورت پر غور کریں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اور اس کے ایک چھوٹے عنصر کے توازن پر غور کریں تو گذشتہ تین دفعات کے نتائج اس صورت پر بالکل عاید ہو جاتے ہیں کیونکہ عمادی دباؤ کے اجزائے تحلیلی انتہا میں بمقابلہ مماسی عمل کے معدوم ہو جاتے ہیں۔

۱۴۵۔ صدری تناؤ کسی شکل کی ایک ملائم سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ، صدری تناؤں، اور ان تناؤں کی سمتوں میں انحناؤں کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے[۱]۔

فرض کرو کہ ن کے متصل نقطے ق، قَ ہیں جو ن میں سے گذرنیوالے

---

[۱] طالب علم کو یہ سمجھ لینا چاہیئے کہ صدری تناؤں اور صدری انحناؤں کے درمیان کوئی تعلق ہے۔

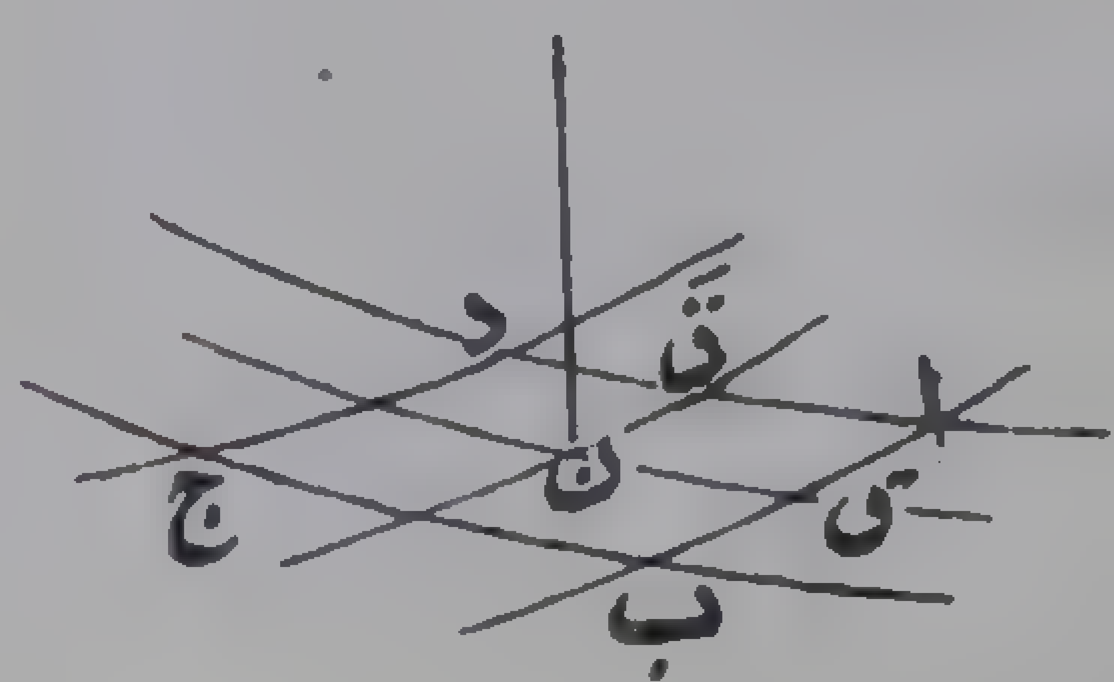
مثلاً ایک ایسی جھلی پر غور کرو جو ایک اسطوانہ کے گرد لپیٹی گئی ہے جھلی پر اُسی گھائی کے مرغولی خطوط (Helical lines) کی کچھ تعداد کھینچو۔

جھلی کو ان خطوط کی سمتوں میں تنایا جا سکتا ہے جو بالا خر بڑے سے بڑے تناؤ کی سمتیں بن جائینگی اس صورت میں عمودی تناؤ صفر ہوگا اور ایک کمون پر کے نور کی سمت اس کمون کے ساتھ میلان رکھیگی

صدری تناؤ کے خطوط ن ق، ن قَ پر واقع ہیں۔ ق اور قَ میں سے عمادی مستوی کھینچو جو ن ق اور ن قَ پر عمود ہوں اور سطح کو ا ب، ا د قوسوں میں قطع کریں۔

فرض کرو کہ قَ ن، ق ن ممدودہ کے متصلہ نقطوں میں سے گزرنے والی عمادی مستوی قوسیں ب ج، ج د تراشی گئی ہیں۔

عنصر ب د، مماسی قوتوں ت × ا ب، تَ × ج د، تَ × ا د، تَ ب ج اور عمادی قوت د × ا ب × ب ج کے زیر عمل ساکن رہے۔



فرض کرو کہ منحنیوں ن ق، ن قَ کے نقطہ ن پر کے نصف قطر انحنا ر، رَ ہیں۔ تب ن پر عماد کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے ہمیں بالآخر حاصل ہوگا

$$د \times ا ب \times ب ج = ۲ ت ا ب \frac{\frac{۱}{۲} ا د}{ر} + ۲ تَ ب ج \frac{\frac{۱}{۲} ا ب}{رَ}$$

$$\text{اور} \quad \therefore \quad د = \frac{ت}{ر} + \frac{تَ}{رَ}$$

اگر سطح کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ تَ = ت تو مساوات بالا ہو جائیگی

$$\frac{د}{ت} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{رَ} = \frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۲}$$

جہاں $ر_۱$، $ر_۲$ صدری نصف قطر انحنا ہیں۔

پس اگر سطح کی مساوات ی = ف (لا، ما) ہو تو

$$\frac{د}{ت} \left\{ ۱ + \left(\frac{جف ی}{جف لا}\right)^۲ + \left(\frac{جف ی}{جف ما}\right)^۲ \right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

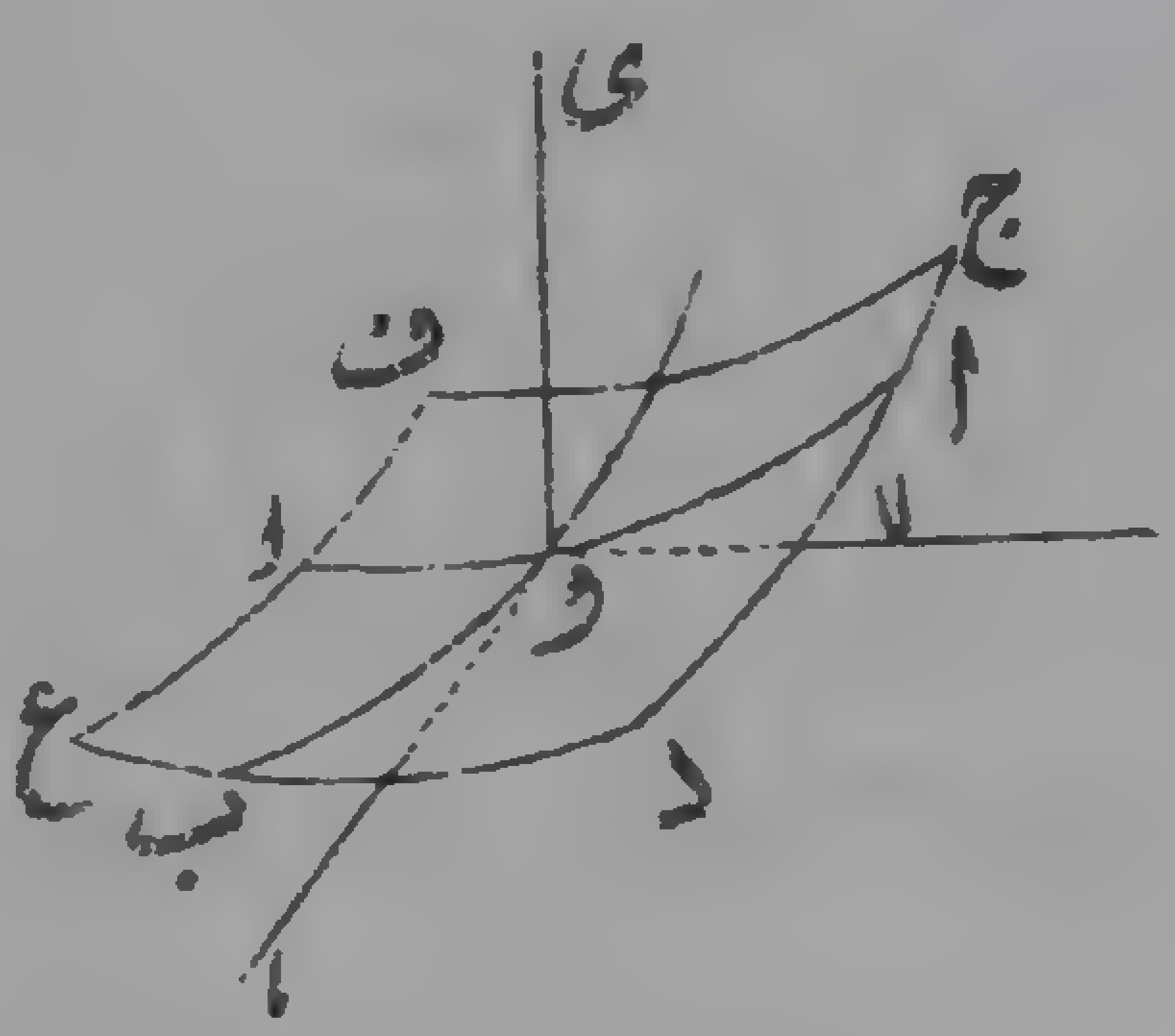
$$= \left\{ ۱ + \left(\frac{جف ی}{جف ما}\right)^۲ \right\} \frac{جف^۲ ی}{جف لا^۲} - ۲ \frac{جف ی}{جف لا} \frac{جف ی}{جف ما} \frac{جف^۲ ی}{جف لا جف ما} +$$

$$+\left\{1+\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^{2}\right\}\frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جف ما}^{2}}$$

اس مساوات کو لگرانج اور پائسن نے حاصل کیا تھا۔

۱۴۶۔ کسی سمت میں تناؤ۔ اگر ت اور تَ کی سمتیں وہی نہ ہوں جو صدری تناؤں کی ہیں تو مساوات میں مماسی عمل داخل ہوگا۔

سطح پر کوئی نقطہ و لو اور و ل، د ب ایک دوسرے پر علی القوائم لے کر فرض کرو کہ ان سمتوں میں تناؤ ت، تَ ہیں اور مماسی اعمال ث، ثَ۔ و پر عماد و ی کھینچو۔



عمادی مستویوں (و ی، ب و ی) کے متوازی اور ان سے بالکل قریب چار مستوی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مستوی سطح کو ج د، د ع، ع ف، ف ج میں قطع کرتے ہیں۔

تب بالآخر ج د اور ع ف کے مماسی اعمال ث × ج د اور ثَ × ع ف ایک دوسرے کے مساوی مگر سمت میں مخالف ہیں، یہی حال ع د اور ج ف پر کے مماسی اعمال کا ہے۔ (۱۴۹)

پس و ی کے گرد معیار اثر لینے سے دفعہ ۱۴۸ کی طرح، یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ ث = ثَ۔

اگر منحنی ج د کے نقطہ ا پر کے مماس کا میلان مستوی لا ما کے ساتھ ط ہو تو

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} \times \text{و ا}^{\text{[1]}}$$

[1] کیونکہ ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس ط} = \text{ف (و ا)} = \text{ف (۰)} + \text{و ا} \times \text{فَ (۰)} + \ldots\ldots$$

اور اسی طرح نقطۂ ا پر،

مس طہ = (جف² ی / جف لا جف ا) (- و ا)

پس سمت وی میں اعمال ت × ج د اور ت، × ع ف کا مجموعہ

= ت × ج د (جف² ی / جف لا جف ا) و ا - ت، × ع ف (جف² ی / جف لا جف ا) (- و ا)

= ت × ج د × د ع × (جف² ی / جف لا جف ا)

اور اسی طرح کی رقم عمل تَ سے حاصل ہوگی۔

وی کی سمت میں تحلیل کرنے سے اب ہمیں حاصل ہوگا

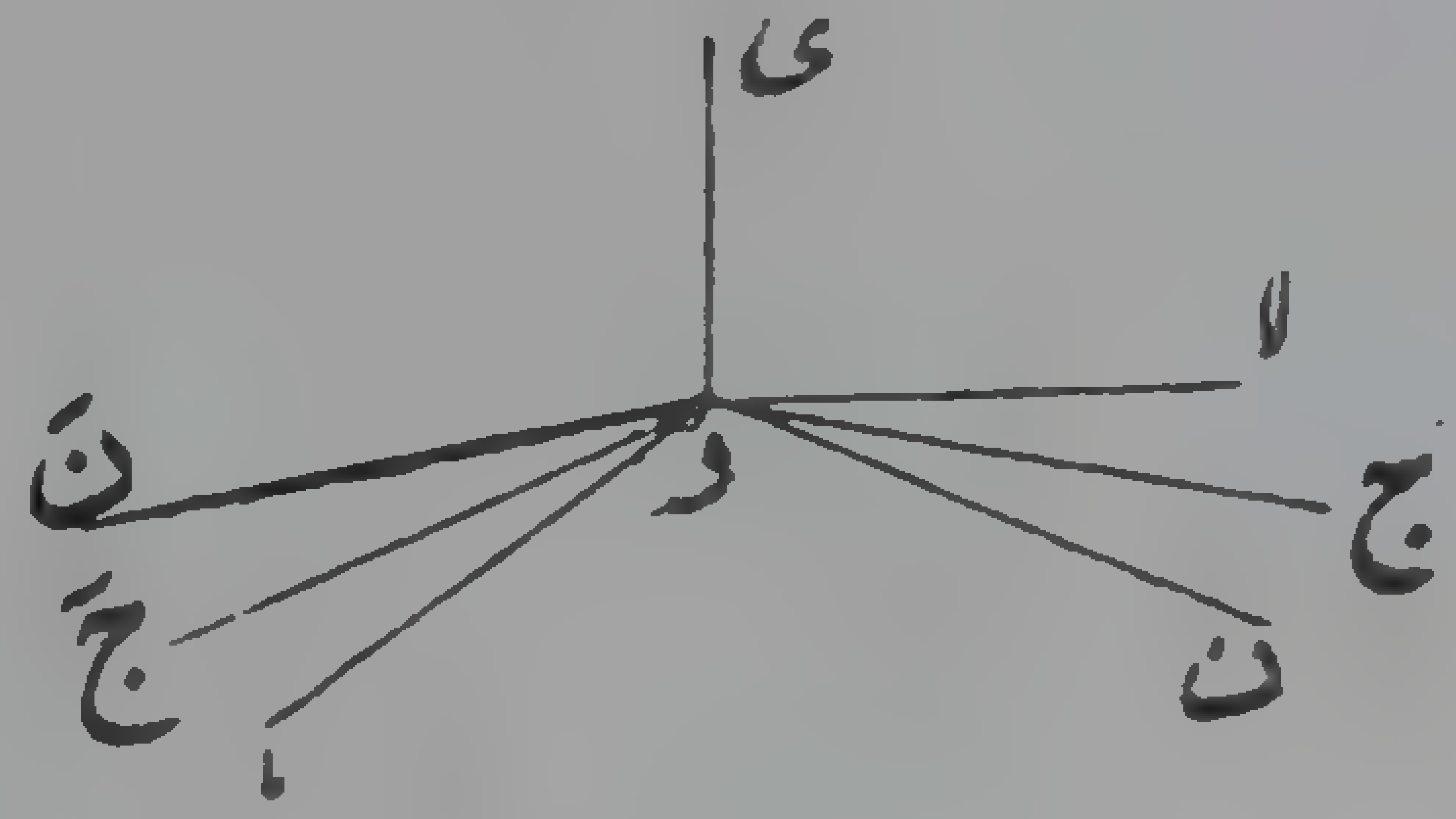
ر × ج د × د ع = ۲ ت × ج د (و ا / ر) + ۲ ت × د ع (و ب / رَ) + ۲ ت، × ج د × د ع (جف² ی / جف لا جف ا)

∴ ر = ت / ر + تَ / رَ + ۲ ت، (جف² ی / جف لا جف ا) [۱]

۱۴۷ — دفعات (۱۳۹) اور (۱۴۵) سے بھی یہی نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے اور اگرچہ یہ طریقہ بہت طویل ہے لیکن اس میں یہ فائدہ ہے کہ ہمیں صدری تناؤ کی سمتوں اور صدری انحنا کی سمتوں کے درمیان تمیز کرنے کی اہمیت اچھے طور پر واضح ہوجاتی ہے۔

بقیہ نوٹ صفحہ ۲۲۸ – جہاں ف (۰) = مس طہ کی قیمت و پر یعنی و پر (جف ی / جف ا) کی قیمت، اور فَ (۰) = (جف / جف لا) (جف ی / جف ا) یا (جف² ی / جف لا جف ا) کی قیمت و پر۔

۱ – لائم سطحوں کے توازن کے عام مسئلہ پر ڈبلیو، ایچ، بیسنٹ نے Quarterly Journal of Mathematics, Vol. IV. 1860. میں بحث کی ہے۔



(۱۵۰) اگر کسی دو علی القوائم سمتوں ولا، وما میں تناؤ $\text{ت}_{\text{لا}}$، $\text{ت}_{\text{ما}}$ ہوں اور ان میں سے کسی ایک سمت میں مماسی عمل ت ہو اور سمتوں ون، ونَ میں صدری تناؤ ت، تَ ہوں اور زاویہ ن ولا = ط، تو دفعہ (۱۳۹) کی رو سے

$$\text{ت}_{\text{لا}} = \text{ت جم}^{2}\text{ط} + \text{تَ جب}^{2}\text{ط}$$

$$\text{ت}_{\text{ما}} = \text{ت جب}^{2}\text{ط} + \text{تَ جم}^{2}\text{ط}$$

اور

$$\text{ت} = (\text{ت} - \text{تَ})\,\text{جب ط جم ط}$$

اب اگر صدری انحنا کی سمتیں وج، وجَ ہوں اور زاویہ ج ولا = فہ، اور انحنا کے صدری نصف قطر ر، رَ ہوں اور ولا، وما، ون، ونَ میں سے گزرنے والی عمادی تراشوں کے نصف قطر $\text{ر}_{\text{لا}}$، $\text{ر}_{\text{ما}}$، ر، رَ ہوں تو

$$\frac{1}{\text{ر}_{\text{لا}}} = \frac{\text{جم}^{2}\text{فہ}}{\text{ر}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{فہ}}{\text{رَ}} ،\quad \frac{1}{\text{ر}_{\text{ما}}} = \frac{\text{جب}^{2}\text{فہ}}{\text{ر}} + \frac{\text{جم}^{2}\text{فہ}}{\text{رَ}} ،$$

$$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{جم}^{2}(\text{ط} - \text{فہ})}{\text{ر}} + \frac{\text{جب}^{2}(\text{ط} - \text{فہ})}{\text{رَ}} ،\quad \frac{1}{\text{رَ}} = \frac{\text{جب}^{2}(\text{ط} - \text{فہ})}{\text{ر}} + \frac{\text{جم}^{2}(\text{ط} - \text{فہ})}{\text{رَ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ت}_{\text{لا}}}{\text{ر}_{\text{لا}}} + \frac{\text{ت}_{\text{ما}}}{\text{ر}_{\text{ما}}} = \left(\text{ت جم}^2\text{طہ} + \bar{\text{ت}}\,\text{جب}^2\text{طہ}\right)\left(\frac{\text{جم}^2\text{فہ}}{\text{ر}} + \frac{\text{جب}^2\text{فہ}}{\bar{\text{ر}}}\right)$$

$$+ \left(\text{ت جب}^2\text{طہ} + \bar{\text{ت}}\,\text{جم}^2\text{طہ}\right)\left(\frac{\text{جب}^2\text{فہ}}{\text{ر}} + \frac{\text{جم}^2\text{فہ}}{\bar{\text{ر}}}\right)$$

$$= \text{ت}\left\{\frac{\text{جم}^2(\text{طہ}-\text{فہ})}{\text{ر}} - \frac{\text{جب۲طہ جب۲فہ}}{۲\,\text{ر}} + \frac{\text{جب}^2(\text{طہ}-\text{فہ})}{\bar{\text{ر}}} + \frac{\text{جب۲طہ جب۲فہ}}{۲\,\bar{\text{ر}}}\right\}$$

$$+ \bar{\text{ت}}\left\{\frac{\text{جب}^2(\text{طہ}-\text{فہ})}{\text{ر}} + \frac{\text{جب۲طہ جب۲فہ}}{۲\,\text{ر}} + \frac{\text{جم}^2(\text{طہ}-\text{فہ})}{\bar{\text{ر}}} - \frac{\text{جب۲طہ جب۲فہ}}{۲\,\bar{\text{ر}}}\right\}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\bar{\text{ت}}}{\bar{\text{ر}}} - (\text{ت} - \bar{\text{ت}})\,\text{جب طہ جم طہ جب۲فہ}\left(\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\bar{\text{ر}}}\right)$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\bar{\text{ت}}}{\bar{\text{ر}}} - \text{ٹ جب۲فہ}\left(\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\bar{\text{ر}}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{ت}_{\text{لا}}}{\text{ر}_{\text{ا}}} + \frac{\text{ت}_{\text{ما}}}{\text{ر}_{\text{ما}}} + \text{ٹ جب۲فہ}\left(\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\bar{\text{ر}}}\right) = \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\bar{\text{ت}}}{\bar{\text{ر}}} = \text{ز}$$

لیکن و کے قرب و جوار میں سطح کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$۲\,\text{ی} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{ما}^2}{\bar{\text{ر}}}$ اگر وج، وج̄ اور و ی کے عماد کو محور مانا جائے۔ ولا، وما، وی کے حوالے سے یہ مساوات ہوگی $۲\,\text{ی} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ف لا ما} + \text{ب ما}^2$

اور چونکہ محوروں کے ان دو نظاموں کا درمیانی زاویہ فہ ہے اس لئے

$$\text{جب۲فہ} = \frac{۲\,\text{ف}}{\sqrt{(\text{ا}-\text{ب})^2 + ۴\,\text{ف}^2}}$$

اور $(\text{ا}-\text{ب})^2 + ۴\,\text{ف}^2 = (\text{ا}+\text{ب})^2 - ۴(\text{اب} - \text{ف}^2)$

$$= \left(\frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\bar{\text{ر}}}\right)^2 - \frac{۴}{\text{ر}\,\bar{\text{ر}}}$$

$$= \left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}_2}\right)^2$$

(۱۵۱) اور ف صریحاً د پر $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}$ کی قیمت ہے۔

$$\therefore \quad \text{جب}^2\text{ف}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}_2}\right)^2 = \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ت}_{\text{لا}}}{\text{ر}_{\text{لا}}} + \frac{\text{ت}_{\text{ما}}}{\text{ر}_{\text{ما}}} + 2\text{ت}\,\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \text{د}$$

۱۴۸ — ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر انتخاب شدہ سمتیں د لا، و ما، صدری انحنا کی سمتوں پر منطبق ہو جائیں تو ف = ۰ اور ضابطہ بالا

$$\frac{\text{ت}_{\text{لا}}}{\text{ر}_{\text{لا}}} + \frac{\text{ت}_{\text{ما}}}{\text{ر}_{\text{ما}}} = \text{د}$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔ پس یہ ضابطہ درست رہتا ہے جبکہ منتخبہ سمتیں صدری تناؤ کی سمتیں ہوں یا صدری انحنا کی سمتیں۔

۱۴۹ — اگر ہم ایک ایسی سطح کا تصور کریں جس کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ اس نقطہ میں سے گذرنے والے ایک خط تقسیم پر ہمیشہ عمود وار عمل کرے تو یہ بتایا جا سکتا ہے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

اگر ایسی سطح کے ایک چھوٹے مثلثی حصہ پر غور کیا جائے تو مماسی مستوی کے اندر کا توازن مثلث کے ضلعوں کے تناؤ سے پوری طرح متعین ہو جاتا ہے کیونکہ مماسی مستوی ہی کے قوار عاملہ (اگر کوئی ہوں) بمقابلہ تناؤں کے بالآخر معدوم ہو جاتی ہیں اور چونکہ ضلعوں کے تناؤ اضلاع پر عمود وار ہیں ان کو ضلعوں کے طولوں کے متناسب ہونا چاہیئے اور اس لئے تمام سمتوں میں تناؤ کے ناپ وہی ہیں۔

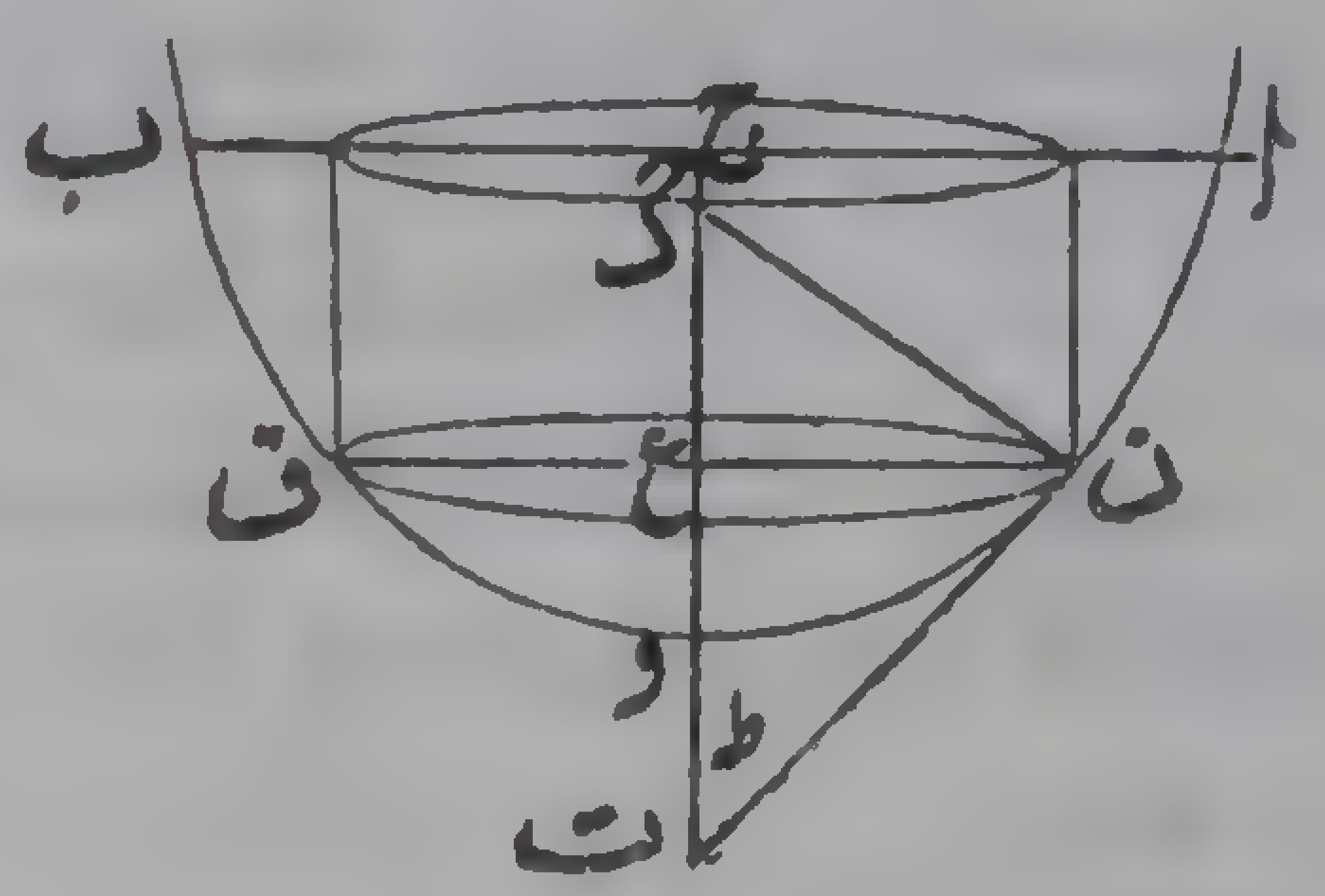
نیز سطح پر تناؤ ہر جگہ وہی ہوگا کیونکہ اگر ایک چھوٹے مستطیلی عنصر پر غور کیا جائے تو متقابلہ ضلعوں پر کے تناؤ مساوی ہونے چاہئیں۔

اس قسم کی سطح کا تصور کرنا بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ ایک کامل استوار جسم یا ایک سیال کامل کا تصور کرنا ہے تاہم ایسی سطحوں کے قریب ترین نمونے مائع جھیلوں کی

صورت میں ملتے ہیں۔ مثلاً صابونی بُلبلہ کی صورت میں یا اُن جھیلوں کی صورت میں جو شیشے کی بوتل میں نظر آئیں گی جبکہ اس کے اندر کے مائع کو خوب ہلایا جائے۔
مائع جھیلوں کی بحث کو ہم آئندہ باب تک ملتوی رکھتے ہیں۔

۱۵۰ — ایک ظرف جو ملائم اور امتداد ناپذیر شے سے بنایا گیا ہے گردشی
سطح کی شکل کا ہے۔ اس کو انتصابی محور کے ساتھ پکڑ کر متجانس مائع سے (۵۲
بھر دیا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر صدری تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہیں۔

فرض کرو کہ و ظرف کا زیر ترین نقطہ ہے۔ و کو مبدأ قرار دو۔
لا کو انتصاباً اوپر وار ناپو اور فرض کرو کہ کوئی افقی تراش ن ع ق ہے۔ اوپر کا کنارہ ا ج ب ہے جو ثابت ہے۔



افقی تراش ن ق کے تمام نقطوں پر دباؤ صریحاً وہی ہے۔

فرض کرو کہ نصف النہاری تناؤ ت ہے یعنی وہ تناؤ جو منحنی ا ن کے نقطہ ن پر کے مماس کی سمت میں نقطہ ن پر عمل کرتا ہے اور فرض کرو کہ نقطہ ن پر افقی تناؤ تَ ہے۔ یہ صدری تناؤ ہیں۔ تراش ن ق کے ساتھ ساتھ تناؤ ت کا انتصابی حاصل، سطح ن و ق پر کے حاصل انتصابی دباؤ کی تعدیل کرتا ہے۔
پس اگر

و ع = لا، ع ن = ا، اور زاویہ ن ت و = ط

تو ۲ π ا ت جم ط = ∫ب^ن ج ث π ا² فرلا + ج ث π ا² (م - لا)، اگر وج = م،

اس مساوات سے ت کا تعین ہو جاتا ہے۔ اور تَ مساوات

$$\frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{تَ}}{\text{رَ}} = \text{د} \qquad \text{دفعہ (۱۴۵)}$$ [۵]

سے حاصل ہوتا ہے جہاں د = ج ث (م ـ لا)۔

یہ یاد رہے کہ منحنی ا ن کے نقطہ ن پر نصف قطر انحنا ر ہے اور اس کے عمودوار جو عماودی تراش ہے اس کا نیم قطر انحنا رَ یعنی ن گ ہے۔

۱۵۱ — اس سے زیادہ عام مسئلہ حسب ذیل ہے۔

ایک ملائم ظرف گردشی سطح کی شکل کا ہے اور سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اس طرح پر کہ کسی دائری تراش کے تمام نقطوں پر سیالی دباؤ وہی ہے۔ کسی نقطہ پر کے صدری تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہیں۔

فرض کرو کہ ن ع ق، نَ عَ قَ دو متصل دائری تراشیں ہیں اور (۱۵۲)
نقطہ ن پر کا نصف النہاری تناؤ ت ہے۔

اگر و ن = س تو دائرہ ن ق پر محور کے متوازی حاصل تناؤ

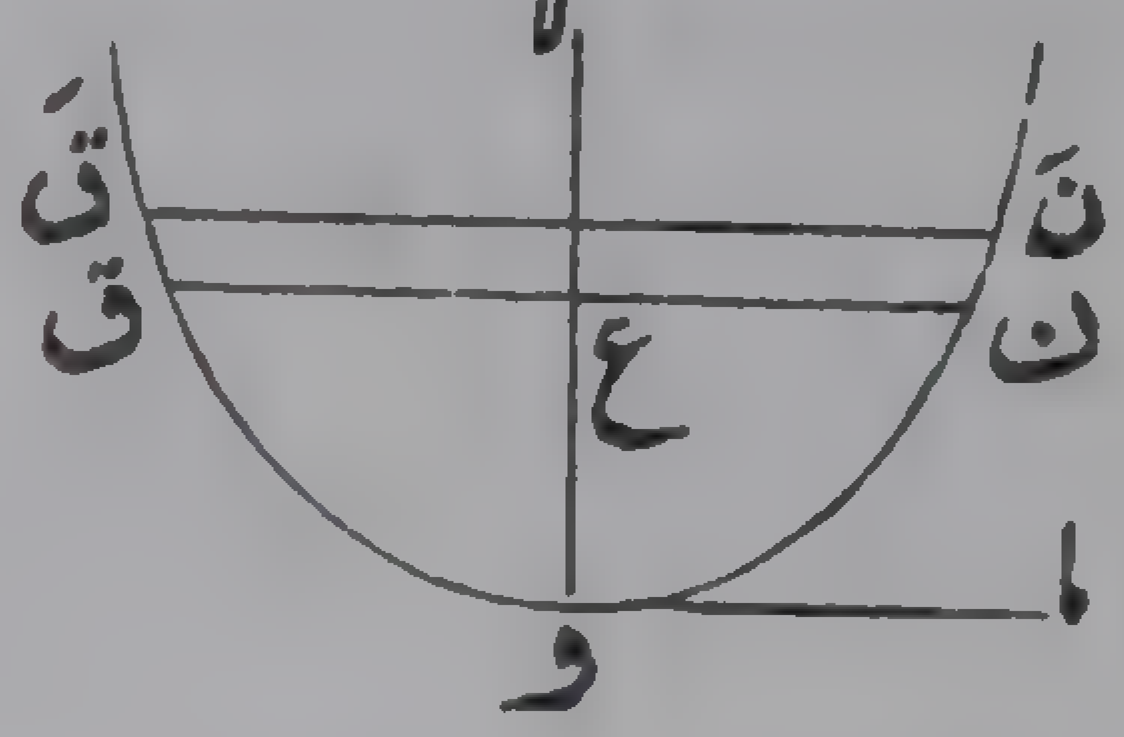
$$= ۲\pi\,\text{ا ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

∴ نَ قَ پر و لا کے متوازی حاصل تناؤ

$$= ۲\pi\left\{\text{ا ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ا ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)\text{مف س}\right\} \quad \text{اگر ن نَ = مف س}$$

[۵] یہ مساوات اس صورت کے لئے اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے۔ ایک چھوٹا عنصر لو جو انحنا کے خطوط سے محدود ہو یعنی نصف النہاروں اور افقی دائروں سے۔ میونیر (Meunier) کا مسئلہ استعمال کرو اور اس کا خیال رکھو کہ انحنا کے خطوط کے لئے منحنی عام طور پر عماودی مستوی نہیں ہوتے۔

ان دونوں کا فرق، دائروں
ن ق، نَ قَ کے درمیان
سطح کی جو پٹی ہے اُس پر کے و لا
کے متوازی حاصل دباؤ کی
تعدیل کرتا ہے۔ یہ حاصل دباؤ

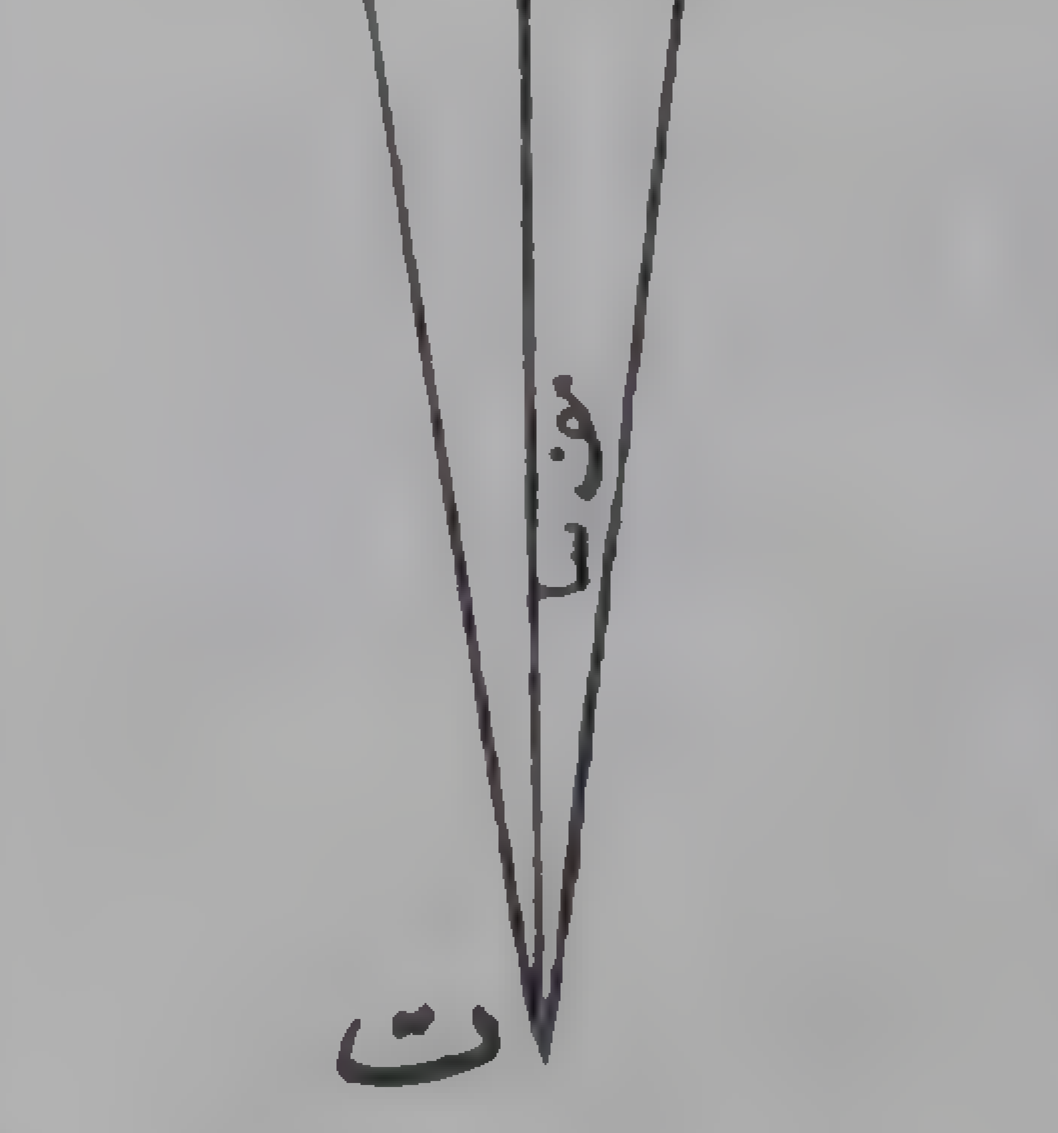


$$د \times ۲ \pi \, ا \, مف \, س \, \frac{فر \, ا}{فر \, س}$$

کے مساوی ہے اگر دائرہ
ن ق کے کسی نقطہ پر کا دباؤ
د ہو۔

$$\therefore \quad \frac{فر}{فر \, س}\left(ا \, ت \, \frac{فر \, ا}{فر \, س} \right) = د \, ا \, \frac{فر \, ا}{فر \, س}$$

اور د چونکہ لا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے اور ا سلئے
س کا تفاعل ہے اس لئے یہ مساوات تناؤت
کا تعین کرتی ہے اور تَ گذشتہ کی طرح مساوات



$$\frac{ت}{ر} + \frac{تَ}{رَ} = د$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۵۲— د کو ساقط کرنے سے ہمیں ت اور تَ
میں ایک ربط حاصل ہوگا لیکن بہتر یہ ہے کہ یہ ربط
بالراست حاصل کیا جائے۔

ایک چھوٹا عنصر نَ رَ ر ن لو جو نصف النہاری
قوسوں ن نَ، ر رَ سے اور دائری قوسوں
ن ر، نَ رَ سے محدود ہے، فرض کرو کہ

نصف النہاری مستویوں کا درمیانی زاویہ مف فہ ہے اور نصف النہاروں کے نقاط ن اور ں پر کے مماسی خطوط کے درمیان زاویہ ۲ مف سا ہے ۔

تب ن ں = ما مف فہ اور ن نَ = مف س

ن ں اور نَ ںَ کی تنصیف کرنے والے نصف النہار کی سمت کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے

فر / فر ما (ت ما مف فہ) مف ما = ۲ تَ مف س جب مف سا

= تَ مف س ن ں / ن تَ = تَ مف س ما مف فہ / ن تَ

اور چونکہ

۱ / ن تَ = جب طہ = فر ما / فر س ، شکل دفعہ (۱۵۰)

اس لئے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے ۱۵م)

فر / فر ما (ت ما) = تَ

اور چونکہ رَ = ما قط طہ اس لئے

ت / ر + تَ جم طہ / ما = د

اور اس لئے ان دو مساواتوں سے ت اور تَ معلوم ہو جاتے ہیں ۔

پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر کسی افقی تراش پر ت اعظم یا اقل ہو اور اس لئے فر ت / فر ما صفر ہو جائے تو

تَ = ت

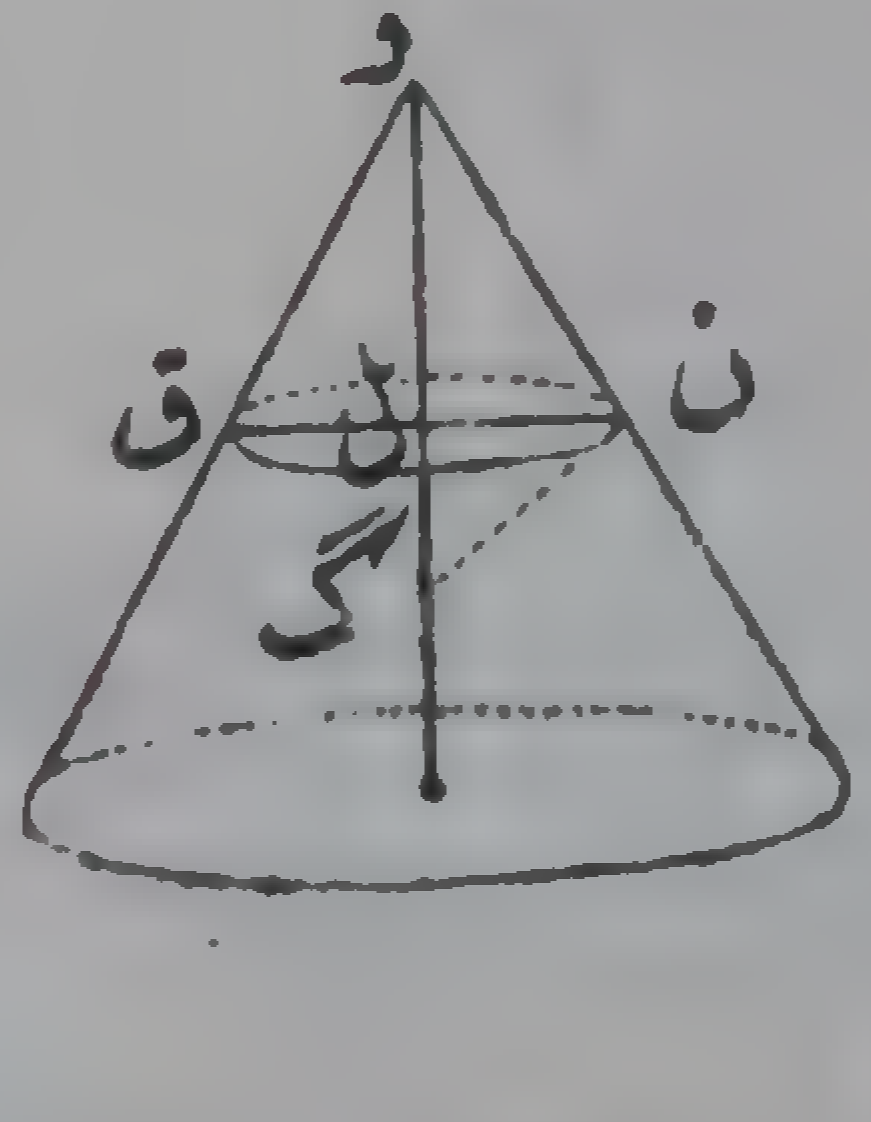
لیکن اگر ما ہی اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ برآمد نہیں ہوتا کیونکہ ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ فر ت / فر ما صفر ہے ۔

پھر اگر ہر نقطہ پر تَ = ت تو $\frac{\text{فرتَ}}{\text{فرما}} = 0$ ، اور اسی لئے ت مستقل ہے ۔

۱۵۳ — امثلہ ۔ (۱) ایک مخروطی شکل کے کامل طور پر ملائم اور لچکدار تھیلے کو نیچے وار منہ کے ساتھ ایک افقی مستوی پر کور سے جوڑ دیا گیا ہے اور راس پر کے ایک چھوٹے سوراخ کے ذریعہ اس کو مائع سے بھر دیا گیا ہے جس سے سکون کی حالت میں اس کی شکل قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل ہو جاتی ہے ۔ اگر مستوی سے اس کا الحاق توڑ دیا جائے اور مائع باہر نکل پڑے تو اُس شکل کی مساوات معلوم کرو جو یہ اختیار کریگا اگر اس کے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے ۔

فرض کرو کہ نقطہ ن پر کمون و ن کے عمود وار سمت میں تناؤ ت ہے اور سمت و ن میں تناؤ تَ ہے اور مخروط کا زاویہ راس ۲ ع ہے ۔

تب $\text{د} = \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{تَ}}{\text{رَ}}$ سے (اگر دل = لا) حاصل ہوگا



$$\text{ج ث لا} = \frac{\text{ت}}{\text{ن گ}} = \frac{\text{ت}}{\text{لا مس ع قطع ع}}$$

یا $\text{ت} = \text{ج ث لا}^2 \text{ مس ع قطع ع}$

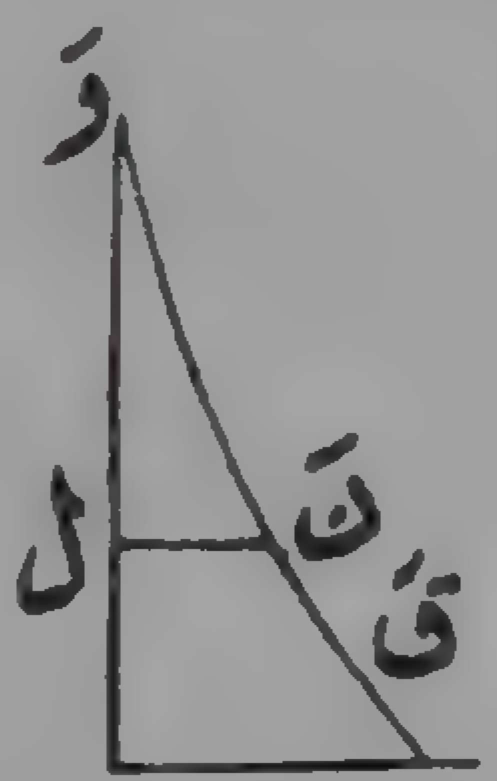
لیکن $2\pi \text{ ن ل تَ جم ع}$ = و ن ق پر حاصل انتصابی دباؤ

$$= \frac{2}{3} \text{ ج ث } \pi \text{ لا}^3 \text{ مس}^2 \text{ ع}$$

$$\bar{\text{ت}} = \frac{1}{2}\ \text{ج ث لا}^2\ \text{مس عہ قطعہ}$$

فرض کرو کہ مائع نکل جانے کے بعد سطح جس گردشی سطح کی شکل اختیار کرتی ہے اس کا تکوینی منحنی وَ نَ قَ ہے، اور وَل = ضا، نَ ل = عا، اور نَ نقطہ ن کا جواب ہے۔

اگر نَ قَ = مف س، منحنی کی ایک چھوٹی قوس



تو
$$\text{مف لا قطعہ} = \text{مف س}\left(1 + \frac{\bar{\text{ت}}}{\text{لہ}}\right)$$

اور
$$\text{لا مس عہ} = \text{عا}\left(1 + \frac{\text{ت}}{\text{لہ}}\right)$$

لچک کے مقیاس کو دونوں سمتوں میں مختلف لینے سے۔

ت اور ت̄ کی حاصل شدہ قیمتوں کو استعمال کرکے لا کو ان دو مساواتوں سے ساقط کیا جاسکتا ہے اور اس طرح ضا اور عا میں ایک ربط حاصل ہوجاتا ہے۔ (۱۵۵)

پہلی مساوات میں $\frac{\text{ج ث مس عہ قطعہ}}{2\ \text{لہ}} = \frac{1}{\text{د}^2}$ رکھو اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\ \text{جم عہ} = \frac{1}{1 + \frac{\text{لا}^2}{\text{د}^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{س}}{\text{د}}\ \text{جم عہ} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{د}}$$ ، اگر س کو و سے ناپا جائے

یا
$$\frac{\text{لا}}{\text{د}} = \text{مس}\left(\frac{\text{س}}{\text{د}}\ \text{جم عہ}\right)$$

لا کی یہ قیمت دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{د مس عہ مس}\left(\frac{\text{س}}{\text{د}}\ \text{جم عہ}\right) = \text{عا}\left\{1 + \frac{\text{ج ث د}^2\ \text{مس عہ قطعہ}}{\text{لہ}}\ \text{مس}^2\left(\frac{\text{س}}{\text{د}}\ \text{جم عہ}\right)\right\}$$

جو منحنی کی تفرقی مساوات ہے۔

اگر ل = لَ تو ۲ مس عہ = عا{ مم (س/ا جم عہ) + ۳ مس (س/ا جم عہ) }

(۲) ایک ملائم جھلی زنجیرہ نما (Catenary) کی شکل کی ہے یعنی ایسی سطح کی شکل کی ہے جس کی تکوین ایک زنجیرہ کو اس کے مرتب کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔ اس جھلی کے سرے نصف قطر ا کے دو مساوی دائری تختوں سے ثابت کردئے گئے ہیں۔ اندرونی ہوائی دباؤ کا اضافہ بیرونی ہوائی دباؤ پر د معلوم ہے۔

اس صورت میں انحنا متقابل سمتوں میں ہیں اور اگر ن پر کا عاد ن گ ہو تو ہر ایک نصف قطر انحنا ن گ کے مساوی ہوگا اور توازن کی مساواتیں ہونگی

تَ ـ تَ = د × ن گ اور تَ = فر/فرما (ما تَ)

اور چونکہ ن گ = ما²/ک ، ک فرتَ/فرما = د ما ، جہاں ک زنجیرہ کا مستقل ہے

∴ ۲ک (تَ ـ تہ) = د (ما² ـ ک²)

جہاں تہ ، راس پر کا نصف النہاری تناؤ ہے

اور تَ = تہ + د/۲ک (۳ ما² ـ ک²)

ان میں سے پہلی مساوات حصہ ا ن کے توازن پر غور کرنے سے فوراً حاصل ہوسکتی ہے جہاں زنجیرہ کے راس کو ا تعبیر کرتا ہے اور پھر تَ کی قیمت مساوات تَ ـ تَ = درئ سے حاصل ہوجاتی ہے۔

اگر تختوں کے وزن کو نظر انداز کیا جائے اور یہ فرض کیا جائے کہ

اندرونی ہوا کے دباؤ سے توازن برقرار رہتا ہے تو

$$2\pi\,\text{ا}\left\{\text{تہ} + \frac{\text{و}}{2\,\text{ک}}\left(\text{ا}^2-\text{ک}^2\right)\right\}\frac{\text{ک}}{\text{ا}} = \text{و}\,\pi\,\text{ا}^2$$

جس سے

$$2\,\text{تہ} = \text{و}\,\text{ک}$$

اور پھر تناؤ ہو جاتے ہیں۔

$$\text{ت} = \frac{\text{و}\,\text{ا}^2}{2\,\text{ک}} \quad \text{اور} \quad \text{تَ} = \frac{3\,\text{و}\,\text{ا}^2}{2\,\text{ک}}$$

۱۵۴ — ہم نے اب تک صرف یکساں موٹائی کے پتروں پر غور کیا ہے لیکن (۱۵۶)
ایسی صورتوں کو بھی شامل کرنے کی خاطر جن میں پترے متغیر موٹائی کے ہوں تناؤ کا زیادہ عام ناپ دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی متجانس مادے کی سلاخ اب سے وزن و لٹکایا گیا ہے اور سلاخ کی تراش کا رقبہ کہ ہے تب ن میں سے گزرنے والی تراش پر کا تناؤ، وزن و اور سلاخ کے حصہ ن ب کے وزن کو تھامے ہوئے ہے۔



اور اگر ان اوزان کا مجموعہ تہ کہ ہو تو نقطہ ن پر تناؤ کا ناپ فی اکائی رقبہ تہ ہوگا۔

یہ معلوم رہے کہ ت کی بہ نسبت تہ کا بُعد بقدر ایک کے کم ہے۔

درحقیقت اگر کسی نقطہ پر ایک ملائم پترے کی موٹائی ع ہو اور اس پر کا تناؤ ت ہو جو معمولی طریقہ سے تراش کی فی اکائی طول کے لئے معلوم کیا گیا ہے تو

$$\text{ت}\ \text{مف}\,\text{س} = \text{تہ}\ \text{ع}\ \text{مف}\,\text{س}$$

یا

$$\text{ت} = \text{تہ}\ \text{ع}$$

۱۵۵ — اس باب کے مسائل عموماً اُن سطحوں پر قابل استعمال نہ ہونگے جو غیر ملائم یا جن کی ملائمت ناقص ہو۔ لیکن اگر کسی خاص صورت میں سطح کے متصلہ حصوں کا درمیانی عمل کلاً مماسی مستوی میں ہو تو تناؤ اور عمادی دباؤ کے درمیان محصلہ روابط برقرار رہیں گے۔

مثلاً اگر ایک انتصابی مستدیر اسطوانہ کسی غیر ملائم شے سے بنا ہو اور اسمیں سیال بھر دیا جائے تو کسی نقطہ پر کا عمل کلاً مماسی سمت میں ہوگا اور اس کی نوعیت تناؤ کی سی ہوگی۔

امثلہ

۱ — یہ فرض کر کے کہ برا کے شکنجہ کے اسطوانے ایک ہی مادی شے سے بنے ہوئے ہیں اور ہر ایک کے اندر زور (Stress) وہی ہے اسطوانوں کی موٹائیوں میں نسبت معلوم کرو۔

۲ — ایک اسطوانی ظرف ۱۰ انچ موٹے دہات کے پتر سے بنایا گیا ہے اور اسی دہات کا ایک ڈنڈا جس کی تراش کا رقبہ ۱ مربع انچ ہے بغیر ٹوٹنے کے وزن و کو عین سنبھال سکتا ہے۔ اگر اسطوانہ کو انتصابی محور کے ساتھ رکھا جائے تو معلوم کرو کہ اس میں کتنا سیال ڈالا جا سکتا ہے کہ یہ پھٹ نہ جائے۔

۳ — ڈھلے ہوئے لوہے کی تناوی (Tensile) طاقت تراش کے فی مربع انچ کے لئے ۱۶۰۰۰ پونڈ وزن ہے۔ ایک ڈھلے ہوئے لوہے کے پانی کے ایسے نل کی موٹائی معلوم کرو جس کا اندرونی قطر ۱۲ ہے کہ اس پر کا زور اس کی انتہائی مضبوطی کا صرف $\frac{1}{8}$ ہو جبکہ پانی کا ارتفاع ۴۳۸ فٹ ہو۔

۴ — ایک مجوف مخروط کو جس کا راس نیچے دار ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ افقی تناؤ سب سے زیادہ کہاں ہے۔

نیز معلوم کرو کہ کون کی سمت میں تناؤ کی قیمت سب سے زیادہ کہاں ہے۔

۵ — ایک مستطیلی صندوق کے اوپر کا رُخ یکساں لچکدار بندھن (Band) کو اس کے متقابل ضلعوں پر باندھ دینے سے بند کر دیا گیا ہے بندھن دوسرے اضلاع پر

ٹھیک بیٹھتی ہے ۔ اگر صندوق سے ہوا بتدریج خارج کر دی جائے تو لچکدار بندھن جو شکلیں اختیار کرتی ہے ان کو معلوم کرو ۔ اور جب بندھن صندوق کی تہ کو عین مس کرے تو اُس وقت کرہ ہوائی کے اندرونی و بیرونی دباؤں میں جو فرق ہوگا اس کو معلوم کرو۔

۶ ــــ دائری سوراخ کی ایک لچکدار نلی، مربع سوراخ کی ایک استوار نلی میں رکھدی گئی ہے جس میں وہ بغیر تنے ہوئے ٹھیک بیٹھ جاتی ہے ۔ نلیاں لاتمناہی طول کی ہیں۔ اگر نلیوں کے درمیان ہوا نہ ہو اور کسی دباؤ کی ہوا لچکدار نلی میں داخل کی جائے تو ثابت کرو کہ یہ دباؤ اُس نسبت کے متناسب ہوگا جو لچکدار نلی کے اس حصہ کو جو استوار نلی کو مس کرتا ہے اُس حصہ سے ہے جو منحنی شکل کا ہے۔

۷ ــــ ایک ظرف جو کسی پتلی شے سے بنایا گیا ہے مخروطی شکل کا ہے اس کا راس نیچے وار اور محور انتصابی ہے ۔ اس کو مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کا سرا بند کر دیا گیا ہے اگر اس کو اپنے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھمایا جائے تو کسی نقطہ پر کے صدری تناؤ معلوم کرو۔

۸ ــــ ایک کروی لچکدار لفافہ کے گرد اور اس کے اندر ہوا ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ (ٹا) پر ہے۔ اس کے اندر ہوا کی مساوی مقدار داخل کر دی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ لفافہ کے کسی نقطہ پر کا تناؤ ٹا (۲ ر^3 - رَ^{3}) / ۲ رَ^{2} ہو جاتا ہے جہاں ابتدائی اور انتہائی نصف قطر کو ر، رَ تعبیر کرتے ہیں ۔

۹ ــــ ایک لچکدار کروی لفافہ میں جس کا قدرتی نصف قطر ا ہے ہوا داخل کی گئی ہے جس سے اس کا نصف قطر ب ہو جاتا ہے پھر اس کو ایک قابلہ میں جس میں سے ہوا خارج کر دی گئی ہے رکھدیا گیا ہے جس سے اس کا نصف قطر ج ہو جاتا ہے ۔ ہوا کی مقدار معلوم کرو جو اس میں داخل کی گئی ہے۔ یہ فرض کر لیا جائے کہ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے۔

۱۰ ــــ ا نصف قطر کا ایک لچکدار کروی لفافہ ہوا سے بھر دیا گیا ہے جس کی تپش (ت) اور دباؤ وہی ہیں جو گرد کی ہوا کے ہیں۔ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے اور اگر اندرونی ہوا کی مقدار دوچند کر دی جائے تو نصف قطر م ا ہو جاتا ہے اور پھر اگر اندرونی تپش کو تَ تک بڑھا دیا جائے تو نصف قطر ن ا ہو جاتا ہے۔
ثابت کرو کہ

۲ ت̄ / ت = ن۲ + ن۲ (ن۲ − ۱) (۲ − ۳م) / م۲ (م۲ − ۱)

۱۱ـــ ا نصف قطر کے نصف کروی تھیلے کو اس کی کور سے تھامکر پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لا گہرائی پر صدری تناؤں میں یہ نسبت ہوگی

لا۲ + ا لا + ا۲ : ۲ لا۲ + ۲ ا لا − ا۲

یہ بھی معلوم کرو کہ افقی تناؤ کہاں صفر ہو جاتا ہے اور تھیلے کے ایک حصہ پر اس کے منفی ہونے کے کیا اسباب ہیں۔

۱۲ـــ ایک نصف کروی تھیلے کا منہ ایک استوار مستوی سے، جو اس کی کور پر باندھ دیا گیا ہے بند کر دیا گیا ہے اور پھر اس کو اوندھا کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لا گہرائی پر صدری تناؤں میں یہ نسبت ہوگی

۳ ا − ۲ لا : ۹ ا − ۴ لا

۱۳ ـــ ا نصف قطر کا کروی نفافہ ث کثافت کے مائع سے عین بھر دیا گیا ہے۔ یہ نفافہ ایک قطر کے گرد یکساں زاویی رفتار سہ سے گھوم رہا ہے۔ جاذبہ کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ گردش کے محور سے زاوئی فاصلے فہ پر صدری تناؤ یہ ہیں

۱/۸ ث سہ۲ ا۳ جب۲ فہ اور ۳/۸ ث سہ۲ ا۳ جب۲ فہ

۱۴ـــ محدود موٹائی کا ایک اسطوانی خول ایسی مادی شے سے بنایا گیا ہے جس کا ایک ڈنڈا ایک مربع انچ تراش کا بغیر ٹوٹنے کے تناؤ تہ سنبھال سکتا ہے۔ اگر یہ خول اندرونی سیالی دباؤ ھ کے زیر عمل ہو جو اسطوانہ کو توڑنے کے عین ناکافی ہے تو ثابت کرو کہ

ھ = تہ لوک ا/ب جہاں خول کے بیرونی و اندرونی نصف قطر ا اور ب ہیں۔

۵۸) ۱۵ـــ ایک مخروط میں وزن دار مائع ہے۔ اگر کھونٹوں کی سمت میں تمام نقطوں پر مخروط کا تناؤ وہی ہو تو ثابت کرو کہ مائع کی کثافت، راس کے اوپر اس کے ارتفاع کے مربع کے تناسب معکوس میں ہے۔

١٦ــــ ایک محدب امتداد ناپذیر ملائم لفافہ گردشی سطح کی شکل کا ہے اور اس کے گردش کا محور انتصابی ہے۔ یہ لفافہ اندر سے آبی دباؤ کے زیرِ عمل ہے۔ ثابت کرو کہ نصف النہارون کی سمت میں سب سے چوڑے حصہ پر کا تناؤ اعظم یا اقل ہوگا بموجب اس کے کہ یہ تناؤ نصف النہاروں کے عمود وار تناؤ سے کم یا زیادہ ہو۔

١٧ــــ قائم مستدیر مخروط کی شکل کا ایک ملائم تھیلا مائع سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کے قاعدے کی کور ایک استوار مستوی کے ساتھ ثبت کر دی گئی ہے۔ قاعدے کے مرکز سے دافع قوتیں مائع پر عمل کرتی ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ۔ کسی نقطہ پر صدری تناؤ معلوم کرو۔

اگر استوار مستوی میں ایک سوراخ کر دیا جائے اور اس میں فشارہ لگا دیا جائے اور پھر اس فشارہ پر ایک ضرب لگائی جائے تو کسی نقطہ پر صدری دبکا تناؤ معلوم کرو۔

١٨ــــ اگر دفعہ (١٥١) میں، ظرف مکافی نما کی شکل کا ہو اور راسکہ میں سے گزرنے والی افقی تراشش کے ہر نقطہ پر صدری تناؤ مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ محور کا طول وتر خاص کا ۵/۶ ہوگا۔

١٩ــــ مائع کی کچھ مقدار جو ایک پتلے کروی خول میں ہے انتصابی قطر کے گرد یکساں زاویئی رفتار سے گھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر صدری تناؤ معلوم کرو اور گھومنے کی رفتار میں اضافہ کے اثرات کی جانچ کرو۔

٢٠ــــ ایک ملائم سطح اس قسم کی ہے کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے اور جس کی شکل مساوات ی = ف (لا، ا) سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سطح سیال کے زیرِ عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ کو تناؤ کے ساتھ جو نسبت ہے اس کو معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ یہ نسبت سطح ۴ لا^۲ = ۳ ی^۲ (لا^۲ + ا^۲) کے ایسے نقاط پر ١ : ٣ ہے جہاں لا = ما = ی

٢١ــــ ایک قائم مستدیر اسطوانہ لچکدار مادے سے بنایا گیا ہے اور اس کے سرے استوار مستویوں کے ساتھ لگا دئے گئے ہیں۔ اس کو سیالی دباؤ سے تنایا گیا ہے۔ یہ مانکر کہ نصف النہاری اور دائری تراشوں میں تناؤ ہک کے کلیہ (Hooke s law) کے تابع ہیں ایسی مساواتیں معلوم کرو جو اسطوانہ کی اختیار کردہ شکل کو پوری طرح معین

کرنے میں کافی ہوں۔ اگر د یا د مستقل ہو تو ثابت کرو کہ نصف النہاری منحنی ہے

$$\text{لا} + \text{أ} = \int \left(\frac{\text{د}\,\text{ا}^2}{2} + \text{ب}\right)\left\{\left(\frac{\text{ل}\,\text{ا}^2}{2\,\text{ا}} - \text{ل}\,\text{ا} + \text{ج}\right)^2 - \left(\frac{\text{د}\,\text{ا}^2}{2} + \text{ب}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

جہاں ابتدائی نصف قطر ا، لچک کا ایک مقیاس ل، اور تکمل کے مستقل أ، ب، ج ہیں۔

۲۲ — ایک لچکدار جھلی جبکہ وہ تنی ہوئی نہ ہو نصف قطر ا کے اسطوانے کی منحنی شکل اختیار کرتی ہے۔ اگر اس کے سرے ثابت کر دئے جائیں اور اس میں ہوا داخل کی جائے اور پھر اس کے سرے بند کر دئے جائیں تو ثابت کرو کہ محور میں سے گذرنے والی کسی تراش کو محدود کرنے والا منحنی مساوات

$$(\text{ما}^2 + \text{ف})\left(\frac{\text{ا}\,\text{د}}{\text{ل}}\ \text{قطا}\ \text{فہ} - 1\right) = 2\,\text{ا}\,(\text{ک} - \text{ما})$$

سے حاصل ہوگا۔ جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو مماس محور کے ساتھ بناتا ہے۔ محور پر کا عمود ما، بیرونی و اندرونی دباؤں کا فرق د، اور لچک کی شرح ل ہے۔ مستقل ف، ک اور ایک تیسرا مستقل جو مساوات کے تکمل سے حاصل ہو کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

۲۳ — ایک ظرف نہیں ملائم اور امتداد نا پذیر مادہ سے بنایا گیا ہے۔ اس کی شکل ایسی سطح کی ہے جو ایک زنجیرہ (Catenary) کو جس کا مبدل ک ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ اگر محور سے لا فاصلہ پر صدری تناؤ ت، تَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$2\,\text{ت} - \text{تَ} : 2\,\text{ت} = \text{لا}/\text{ک} : \text{جبز}\ 2\,\text{لا}/\text{ک}$$

جبکہ یہ فرض کر لیا جائے کہ اندرونی و بیرونی دباؤں کا فرق مستقل ہے۔

(۱۵۹) ۲۴ — اگر ایک ملائم ظرف جس کی تکوین، خط تدویر کو اپنے قاعدے کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے مائع سے عین بھرا ہوا ہو جو بغیر کسی بیرونی قوتوں کے عمل کے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ نصف النہاری

منحنیوں کی سمت میں اور ان کے علی القوائم سمت میں تناؤں کی نسبت ۲ : ۷ ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ دباؤ محور پر صفر ہو جاتا ہے۔

۲۵ —— ایک کامل طور پر ملائم ظرف کی تکوین خط مدویر کو اپنے محور کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے اس کا محور انتصابی ہے۔ اگر ظرف پانی سے تقریباً بھرا ہوا ہو تو ثابت کرو کہ ایسے نقطہ پر کا افقی تناؤ جہاں مماسی مستوی، افق کے ساتھ ۴۵° کا میلان رکھتا ہے زیر ترین نقطہ پر کے تناؤ کا $\text{مار}\sqrt{۲}\left(\frac{۲۳}{۹۶} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۱۲۸}\right)$ ہے۔ ظرف بالکل بھرا ہوا کیوں نہ ہونا چاہیئے۔

۲۶ —— مائع کے لئے ایک ظرف اس طرح بنایا گیا ہے۔ ایک بے وزن تختی کے ساتھ، کپڑے کا ایک ملائم ٹکڑا جس کی شکل نیم قطر ا کے کرہ کے منطقہ کی ہے لگا دیا گیا ہے اس کپڑے کی ایک مستوی تراشش تختی پر ٹھیک آ جاتی ہے اور دوسری کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے۔ اس ظرف کو بڑی تراش کی کور سے تمام تر غیر متجانس مائع سے بھر دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے $ی\,(ا^{۲} - ی^{۲})^{-\frac{۵}{۲}}$ جہاں ی گہرائی ہے۔ صدری تناؤ کی نسبت معلوم کرو۔

۲۷ —— ایک امتداد ناپذیر ملائم لفافہ کی شکل گردشی مکافی نما (وتر خاص ۴ ا) کی ہے۔ یہ لفافہ ک نصف قطر کے ایک ثابت افقی دائرہ سے لٹک رہا ہے۔ اس میں ث کثافت کا سیال ہے جو لفافے کے انتصابی محور کے گرد زاوئی رفتار $(ج / ۲ ب)^{\frac{۱}{۲}}$ سے گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ لفافہ کے کسی نقطہ پر محور سے ر فاصلہ پر افقی تناؤ ہوگا

$$\frac{۱}{۴}\,ج\,ث\left\{\frac{۱}{ا} - \frac{۱}{ب}\right\}\frac{ک^{۲}(۲ا^{۲} + ر^{۲}) - ر^{۲}(۳ا^{۲} + ر^{۲})}{(۴ا^{۲} + ر^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$$

۲۸ —— ایک ملائم جھلی گردشی سطح کی شکل کی ہے نصف النہاری منحنی اس طرح کا ہے کہ کسی نقطہ پر کا عماد، نصف قطرِ انحنا کا ن گنا ہے۔ جھلی کو مائع سے عین بھر دیا

گیا ہے، پورا نظام ٹھوس جسم کی طرح محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھوم رہا ہے
اگر مائع پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں اور محور پر دباؤ صفر ہو تو ثابت کرو کہ
کسی نقطہ پر صدری تناؤ کی نسبت ۴ - ن : ۱ ہوگی۔

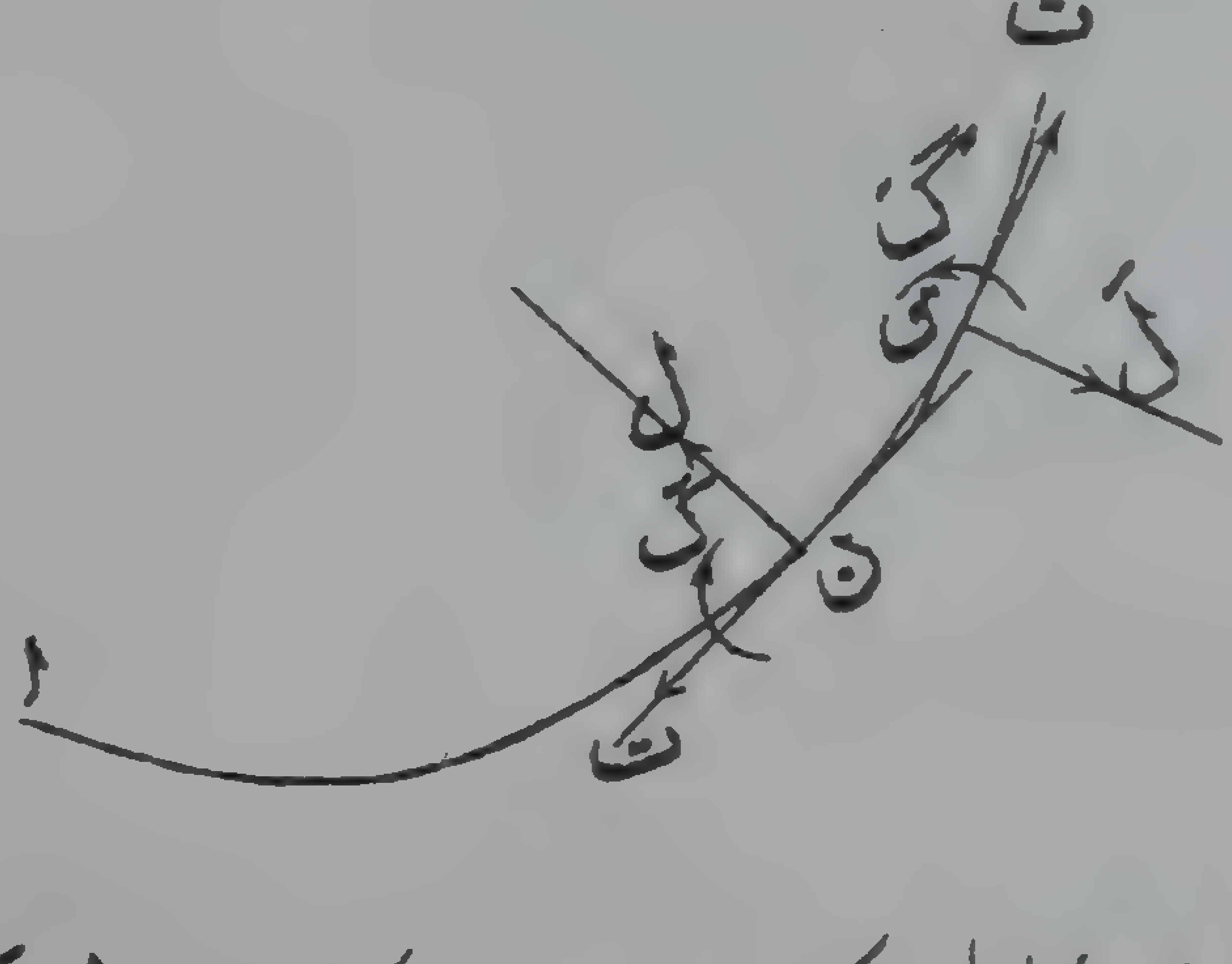
(۱۹۰)

باب نہم

استوار یا لچکدار پترا سیالی دباؤ کے زیر عمل

۱۵۶۔ اب ہم اسطوانی پترے کی صورت پہ غور کرتے ہیں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اس طرح کہ کسی کھون کے ہر نقطہ پر یہ دباؤ وہی ہے۔

اگر کھونوں کے علی القوائم ایک عمودی تراش ا ن ق لی جائے تو ن میں سے گذرنے والے اور کاغذ کی سطح پر عمود وار کھون سے جو دو حصے جدا ہونگے اُن کے درمیان کا زور ایک مماسی قوت، ایک جزّی قوت، اور ایک جفت پر مشتمل ہوگا۔



کھون کا اکائی طول لیکر ہم ان مقداروں کو ت، ل، گ سے تعبیر کرینگے۔ یہ ذہن نشین رہے کہ عنصر ن ق کے نقطہ ن پر عمل کرنے والے زور ت، ل، گ ہیں اور مخالف سمتوں میں عنصر ن ق کے

نقطہ ق پر کے اعمال ت + مف ت، ل + مف ل، گ + مف گ ہیں۔
فرض کرو کہ ن ق پر مقعر جانب سیالی دباؤ د مف س ہے اور فرض کرو کہ نقطہ ا پر کے مماس سے نقطہ ن پر کے مماس کا انصراف ف ہے تب نقطہ ن پر کے مماس اور عماد کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے اور معیاروں کو ن کے گرد لینے سے ہمیں یہ مساواتیں حاصل ہونگی

مف ت + (ل + مف ل) مف ف + د مف س (مف ف / ۲) = ۰ ،

مف ل - (ت + مف ت) مف ف + د مف س = ۰ ،

مف گ - (ل + مف ل) مف س + (ت + مف ت) (مف س / ۲) مف ف

- د مف س (مف س / ۲) = ۰ (61)

یا، انتہا میں

(فر ت / فر ف) + ل = ۰ ،

(فر ل / فر ف) - ت + د (فر س / فر ف) = ۰ ،

(فر گ / فر ف) - ل (فر س / فر ف) = ۰

اگر پترے کی شکل دی گئی ہو یعنی اگر منحنی ا ن کی ذاتی مساوات دی گئی ہو اور اگر د، ف کا معلومہ تفاعل ہو تو ان مساواتوں سے کسی مکون کے ساتھ ساتھ عمل کرنے والے زور کا تعین ہوسکتا ہے۔

۱۵۷ — مستوی پترا۔ اگر پترا لچکدار ہو اور قدرتاً مستوی ہو تو ہمیں ایک زاید شرط حاصل ہوگی اور وہ یہ کہ گ انحنا کے متناسب ہوگا یعنی گ = ع/ر

جہاں نقطہ ن پر کا نصف قطر انحنا ر ہے۔

اس صورت میں تیسری مساوات ہو جائیگی

$$\text{لَ ر} = \text{ت} \, \frac{\text{ع}}{\text{ر}^2} \, \frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}}$$

اور اس لئے پہلی مساوات سے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرفہ}} = \frac{\text{ع}}{\text{ر}^3} \, \frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}}$$

اس طرح

$$\text{ت} = \text{ک} - \frac{\text{ع}}{2\text{ر}^2}$$، جہاں ک مستقل ہے۔

دوسری مساوات میں ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{ع}}{\text{ر}^2} \, \frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرفہ}^2} - \frac{3\text{ع}}{\text{ر}^4} \left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}}\right)^2 + \text{ک} - \frac{\text{ع}}{2\text{ر}^2} = \text{د ر}$$

اس مساوات سے پترے کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جائے گا جبکہ دباؤ کا قانون دیا گیا ہو اور یا دباؤ کا قانون معلوم ہو جائے گا جبکہ اختیار کردہ شکل دی گئی ہو۔

ایسی صورت میں جبکہ د مستقل ہو یا ر کا ایک دیا ہوا تفاعل ہو تو $\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}}\right)^2 = \text{ی}$ رکھنے مساوات بالا کا پہلا تکمل حاصل ہو سکتا ہے اور اس طرح ہم $\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}}$ کو ر کی رقوم میں معلوم کر لیتے ہیں۔

۱۵۸ — اگر قدرتاً پترا دی ہوئی اسطوانی شکل کا ہو اور اس کو قدرتی شکل سے جھکایا جائے تو جفت گ جو جھکاؤ کا جفت ہے انحنا کے تغیر کے متناسب ہوگا۔ اس طرح اگر ن پر صدری نصف قطر انحنا ر$_ب$ ہو تو

$$\text{گ} = \text{ع} \left(\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}_\text{ب}}\right)$$

اس مساوات کی صداقت اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ اوسط ریشہ کا طول ٹکڑوں کے علی القوائم غیر متغیر رہتا ہے۔ ہم نے یہ بھی مان لیا ہے کہ بیرونی سیالی دباؤ کے وجود سے مساوات پر کسی قسم کا اثر نہیں ہوتا۔

۱۵۹ـــ ناقصی اسطوانہ۔ ان مساواتوں کے استعمال کی توضیح کے لئے ہم ناقصی اسطوانہ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو کسی پتلی استوار شئے سے بنا ہوا ہے سروں پر بند ہے اور ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے۔

ل کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ف}^2\,\text{ت}}{\text{ف}\,\text{فہ}^2} + \text{ت} = \text{در}$$

مزدوج محور کے ایک سرے سے س اور فہ کو ناپنے سے

$$\text{ر} = \frac{\text{ج د}^3}{\text{ا ب}} - \frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{(\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ})^{\frac{3}{2}}}$$

اور، مبدلوں کو بدلنے کے طریقہ سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$\text{ت} = \text{د}\,(\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ})^{\frac{1}{2}} + \text{ا}\,\text{جم فہ} + \text{ب}\,\text{جب فہ}$$

اور اسلئے

$$\text{ل} = \text{ا}\,\text{جب فہ} - \text{ب}\,\text{جم فہ} - \text{د}\,\frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جب فہ}\,\text{جم فہ}}{(\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ})^{\frac{1}{2}}}$$

تشاکل کی رو سے اور نیز عمل و رد عمل کے مساوی ہونے کے کلیہ کو استعمال کرنے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اوجین (Apses) پر ل صفر ہو جاتا ہے یعنی جبکہ فہ = ۰ اور جبکہ فہ = $\frac{\pi}{2}$ ۔

پس یہ معلوم ہوگا کہ ا = ۰ اور ب = ۰ اور اس لئے

$$\text{ت} = \frac{\text{د ا ب}}{\text{ج د}} \quad \text{اور} \quad \text{ل} = -\,\text{د}\,\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا ب}}\,\text{ج د جب فہ جم فہ}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{ذ گ}}{\text{ذ فہ}} = \text{ل ر} = -\,\frac{\text{د}\,(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ا}^2\text{ب}^2\,\text{جب فہ جم فہ}}{(\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ})^2}$$

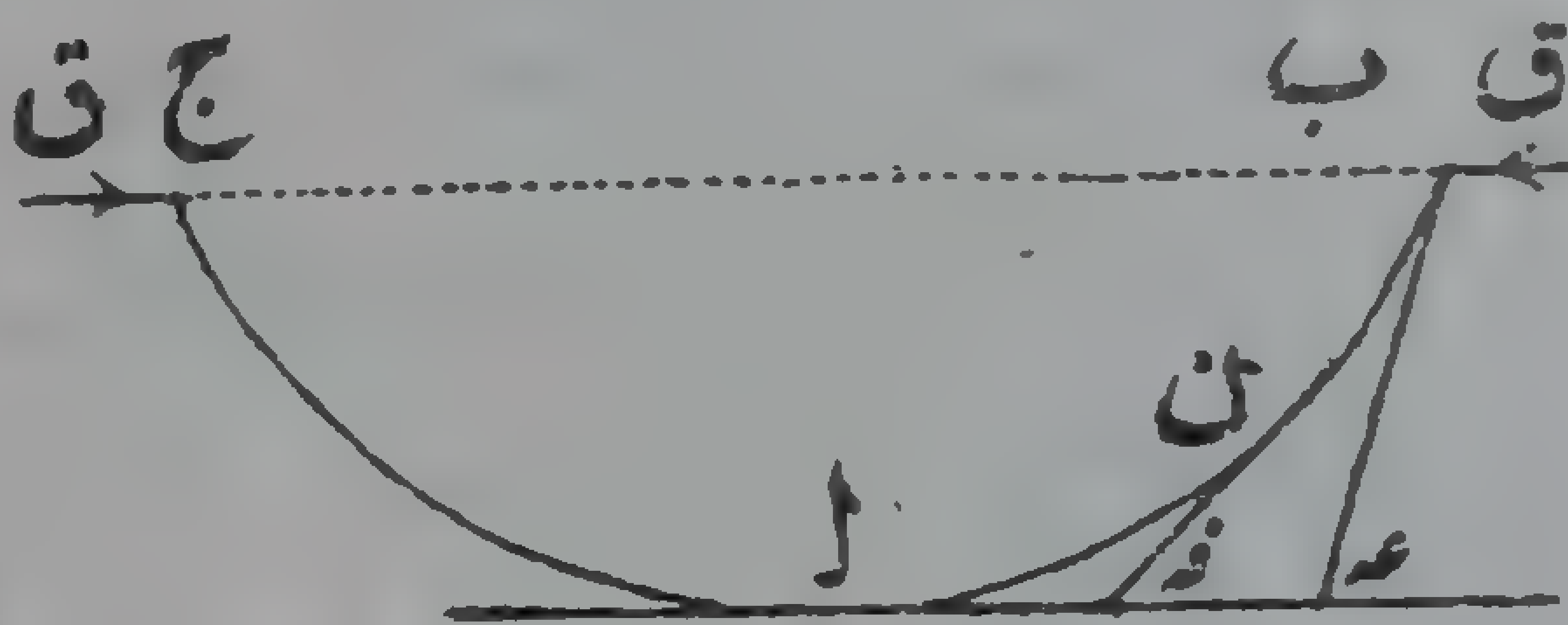
$$\therefore \quad \text{گ} = \tfrac{1}{2}\,\text{د}\left(\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ}} + \text{مستقل}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{د}\,(\text{ج د}^2 + \text{مستقل})$$

$$\text{اس طرح} \quad \text{گَ} - \text{گ} = \tfrac{1}{2}\,\text{د}\,(\text{ج دَ}^2 - \text{ج د}^2)$$

۱۶۰ — توبیہ۔ (۱۶۲

ہم نے دفعہ (۱۳۴) میں یہ بتا دیا ہے کہ توبیہ اور لدنیہ متماثلاً وہی منحنی ہیں۔ اگر ایک پتلی لچکدار تختی کے مقابل کے کناروں کو ایک دوسرے کی طرف کھینچکر ایک جست یا تنی ہوئی چادر کے ذریعہ ملا دیا جائے تو منحنی پیدا شدہ دفعہ (۱۳۳) کا توبیہ ہو گا۔



اس صورت میں د = ۰ اور مشق کے طور پر یہ دیکھ لینا مفید ہوگا کہ دفعہ (۱۵۷) کی مساوات کے تکمل سے توبیہ کی ذاتی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اگر ملانے والی چادر کا تناؤ ق ہو اور ن پر کا تناؤ اور جزی قوت علی الترتیب ت اور ل ہوں تو پترے کے حصہ ن ب کے توازن پر غور کرنے سے یہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\text{ت} = -\,\text{ق جم فہ}\,، \qquad \text{ل} = -\,\text{ق جب فہ}$$

۱۶۱ — ایک پتلا لچکدار پترا دو متوازی ثابت سلاخوں پر رکھا ہوا ہے - اس پر دباؤ ڈالکر اس کو توبیہ کی شکل میں تبدیل کرنا مقصود ہے - دباؤ کا قانون معلوم کرو -

مقادیر ت اور گ دونوں ان خطوں پر صفر ہو جاتے ہیں جو سلاخوں کو مس کرتے ہیں - اور اس لئے ان خطوں پر نصف قطر انحنا لا متناہی ہوگا -

پس مساوات

$$\text{ت} = \text{ک} - \frac{\text{ع}}{۲\,\text{ر}^{۲}}$$

میں ہم دیکھتے ہیں کہ ک = ۰ اور اس لئے

$$\text{ت} = -\,\frac{\text{ع}}{۲\,\text{ر}^{۲}}$$

توبیہ کی ذاتی مساوات ہے

$$\text{ر}^{\frac{۱}{۲}} = \text{م}\,(\text{جم فہ} - \text{جم عہ})^{-\frac{۱}{۲}}$$

اور دباؤ د مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{در} = \frac{\text{ع}}{\text{ر}^{۳}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ر}}{\text{فر فہ}^{۲}} - \frac{۳\,\text{ع}}{\text{ر}^{۴}}\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر فہ}}\right)^{۲} - \frac{\text{ع}}{۲\,\text{ر}^{۲}}$$

عمل اندراج سے یہ معلوم ہوگا کہ (۱۶۲)

$$\text{در} = \frac{\text{ع جم عہ}}{\text{م}^{۲}}$$

اب توبیہ میں، دفعہ (۱۳۲)

$$\text{ر} = \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ن ل}}$$

اس طرح

$$\text{د} = \text{ن ل} \times \frac{\text{ع جم عہ}}{\text{م}^{۴}}$$

اور اس لئے مطلوبہ دباؤ، ث کثافت کے مائع کو ڈالنے سے حاصل ہوسکتا ہے ایسا کہ

ع جم عہ = ج ث م۲

پس توبیہ کی شکل مساوات بالا سے حاصل شدہ کثافت کے مائع کو سلاخوں کی ہموار سطح تک ڈالنے سے برقرار رکھی جاسکتی ہے۔

مزید براں

ل = - ع/ر۲ · فر ر/فر فہ = - ع/م۲ جب فہ

∴ ل = - ج ث م۲ × جب فہ قطعہ

جہاں بائیں طرف کے حصہ کی، دائیں طرف کے حصہ پر جزی قوت ل ہے جو نقطہ ن پر اندر کی طرف عمل کرتی ہے۔ اس طرح -ل بائیں طرف کے حصہ پر کے عمل کو تعبیر کرتا ہے۔

اس لئے ب اور ج پر

- ل = ج ث م۲ مس عہ

اس آخری نتیجہ کی جانچ اس امر کے معائنہ سے ہوسکتی ہے کہ سلاخوں کے تعامل مائع کے وزن کو تھامتے ہیں۔

اس طرح

- ۲ ل جم عہ = ۲ ∫ ج ث ن ل فرلا

= ۲ ∫ ج ث × ن ل × فرلا/فرس · فرس/فر فہ فر فہ

= ۲ ∫ ج ث م۲ جم فہ فر فہ = ۲ ج ث م۲ جب عہ

۱۶۲ — اگر ایک دیئے ہوئے پترے کو موڑنے سے لدنیہ حاصل کیا جائے اور سرے پر کے کونوں کو ایک ہی افقی مستوی میں ثابت کر دیا جائے تو ب

اور ج پر گ = - اور ہر سرے پر کا زور مماسی اور عمادی اجزاء ترکیبی پر مشتمل ہوگا۔ اب اگر ہم اس خاص لدنیہ کے موزوں کثافت کا مائع انڈیلتے جائیں تو اس کی شباہت غیر متغیر رہیگی لیکن ب اور ج پر ت کی قیمت بڑھجائیگی اور ل غیر متغیر رہیگا۔

امثلہ (۱۰۵)

۱ــــ پتلے استوار مادہ سے بنا ہوا ایک ظرف جو مستدیر اسطوانہ کے نصف حصہ کی شکل کا ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے اور انتصابی قوتوں سے جو اس کو محدود کرنے والے افقی کمونوں پر عمل کرتی ہیں تھاما گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زیر ترین نقطہ سے فہ فاصلہ پر کے نقطہ پر زور ہونگے

ایسے کہ ۲ ت = - ج ث ل^{2} (فہ جب فہ + جم فہ)، ۲ ل = - ج ث ل^{2} فہ جم فہ

۲ گ = ج ث ل^{2} ($\frac{\pi}{2}$ - فہ جب فہ - جم فہ)

۲ــــ ایک پترا استوار مکافی اسطوانے کی شکل کا ہے جو کمونوں پر علی القوائم ستونوں سے محدود ہے۔ اس کو ایک ظرف کی طرح استعمال کیا گیا ہے اور مہین کپڑے کی ایک پٹی سے جو وتر خاص کے سروں میں سے گذرنے والے کمونوں کو ملاتی ہے اس کو بند کر کے اس میں ہوا بھر دیگئی ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے۔ اگر پٹی کے عرض کو وتر خاص (۴ ل) کے ساتھ نسبت: ۳ $\sqrt{۲}$: ۴ ہو تو راس پر کے مماس سے فہ ناپ کر ثابت کرو کہ

ت = د ل (قطا فہ - $\sqrt{۲}$ جم فہ)، ل اور گ کی قیمتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ راس پر

۲ گ = د ل^{2} (۳ + ۲ $\sqrt{۲}$)

۳ــــ ایک استوار اسطوانی ظرف کی اندرونی ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ اس کی عمودی تراش دو مندویری خطوط کی قوسوں سے بنی ہے جن کے سرے ایک دوسرے پر ٹھیک بیٹھتے ہیں کسی کمون پر کے زور دریافت کرو۔

۴ــــ ایک استوار مہین پترا اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش زنجیرہ

س = ک مس فہ ہے۔ اس پترے کے مقعر حصہ پر ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے اور پترا زنجیرہ کے محور کے متوازی دو مساوی قوتوں سے تھاما گیا ہے۔ یہ قوتیں راس سے زاویئی فاصلہ ع پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ت}{دک} = \text{جم فہ قطع} - ۱ + \text{جب فہ لوک مس} \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{فہ}{۲} \right)$$

$$\frac{ل}{دک} = \text{جب فہ قطع} - \text{مس فہ} - \text{جم فہ لوک مس} \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{فہ}{۲} \right)$$

$$\frac{گ}{دک^۲} = \text{قط فہ قطع} - \frac{۱}{۲}\,\text{قط}^۲\,\text{فہ} - \frac{۱}{۲}\left\{\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{فہ}{۲}\right)\right\}^۲ + ک$$

جہاں
$$ک = \frac{۱}{۲}\left\{\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{ع}{۲}\right)\right\}^۲ - \frac{۱}{۲}\,\text{قط}^۲\,ع$$

نیز ثابت کرو کہ تھامنے والی ہر قوت

$$= \text{دک لوک مس} \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{ع}{۲} \right)$$

۵۔ ایک مستوی لچکدار پترا دو متوازی افقی ڈنڈوں پر ٹکا ہوا ہے اور اوپر کی ہوا کے مستقل دباؤ سے اس کو ڈنڈوں کے درمیان نیچے کی طرف موڑا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نصف قطر انحناء اور انصراف مساوات

$$\left(\frac{فرر}{فرفہ}\right)^۲ = ک ر - \frac{ر^۲}{۴} - \frac{۲د}{ع}\, ر$$

سے مربوط ہونگے۔

۶۔ دباؤ کا کلیہ معلوم کرو جو اس پترے کو زنجیرہ کی شکل میں جھکا دے۔

۷۔ اگر اسی پترے کو ایک مکانی اسطوانے کی شکل میں جھکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ راس سے زاویئی انصراف فہ پر سیالی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے

$$\text{جم}^۵\text{فہ} \left(۷\,\text{جم}^۲\text{فہ} - ۶ \right)$$

باب دہم

قوت شعری

۱۶۳—— یہ ایک مشہور بات ہے کہ اگر چھوٹے سوراخ کی ایک شیشے کی نلی پانی میں ڈبو دی جائے تو نلی کے اندر پانی کی سطح بیرونی پانی کی سطح سے اونچی ہو جاتی ہے۔

یہ بات بھی اتنی ہی مشہور ہے کہ اگر نلی پارہ میں ڈبو دی جائے تو اندرونی پارہ کی سطح بیرونی پارہ کی سطح سے نیچی ہو گی۔

اگر شیشہ کے آبخورے میں پانی ہو تو اس کو دیکھنے سے معلوم ہو گا کہ خط تماس پر مائع کی سطح کا انحنا اوپر وار ہے اور یہ شیشہ کو ایک خاص زاویہ پر چمٹی ہوئی نظر آتی ہے۔

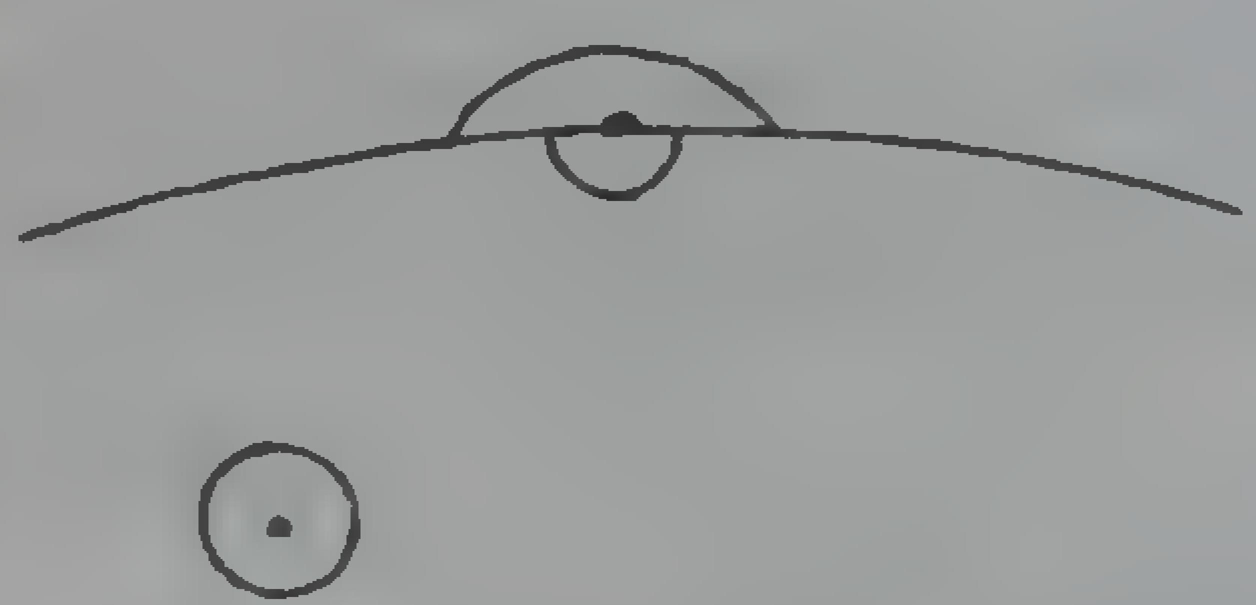
اگر آبخورے کو احتیاط سے پورا بھر دیا جائے تو پانی کی سطح آبخورے کی چوٹی یا سر کے مستوی کے اوپر تک چڑھ جائے گی اور پانی سرے کے گول کنارے کے اوپر ابھرا ہوا دکھائی دیگا۔

اگر میز پر پانی گر جائے تو اس کے حدود معین ہوتے ہیں اور منحنی کنارے میز سے چمٹے ہوئے ہوتے ہیں۔

ان واقعات اور ان کے مثل دوسرے اور بہت سے واقعات کی توجیہ آن قوتوں کے وجود سے ہوتی ہے جو سیالوں کے خود سالمات کے درمیان اور نیز ٹھوس اور سیالوں کے سالمات کے درمیان عمل کرتی ہیں جبکہ ٹھوس اور سیال ایک دوسرے سے تماس رکھتے ہوں۔ کسی خاص

سالمہ کی قوت کے عمل کا میدان لا انتہا بہ چھوٹا ہوتا ہے[۱]۔ اور چونکہ یہ سالمی قوتیں بہت چھوٹے چھوٹے فاصلوں پر عمل کرتی ہیں، اس لئے جہاں تک کہ سالمی قوتوں کا تعلق ہے متجانس جسم کا ہر عنصر بشرطیکہ وہ جسم کو محدود کرنے والی سطح کے نزدیک نہ ہو ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہوگا۔ لیکن خود سطح پر کسی خاص سالمہ کا کرۂ عمل نامکمل ہوگا اور یہ سالمہ محدود کرنے والی سطح کے بیرونی بجانب جس قسم کے مادہ کے سالمات ہوں ان کے میدان عمل میں آ جائیگا۔

نیز اگر ہم یہ مان لیں کہ میدان عمل کے خطی ابعاد بمقابلہ سطح کے نصف قطر انحنا کے لا انتہا چھوٹے ہیں تو جہاں تک سالمی قوتوں کا تعلق ہے دو متجانس اشیاء کی سطح فاصل کے تمام حصے ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہونگے۔ سطحی توانائی بالقوہ (۱۶۳)



جو سالمی قوتوں کے باعث پیدا ہوگی وہ سطح کے رقبہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھیگی یہ مستقل تماس رکھنے والی اشیاء کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

۱۶۴۔ ایک متجانس مائع ایک ظرف میں جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اس صورت پر اصول توانائی کا استعمال[۲]۔

توازن کی صورت میں توانائی بالقوہ کی قیمت ساکن یا اقل ہونی چاہیئے۔

---

[۱] وہ میدان جس میں شعری قوتیں عمل کرتی ہیں لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے (Quincke) نے ایک شیشے کی نلی میں جس پر چاندی کا ۵۴۲ ....۰ ملی میٹر ( ) موٹا لیپ تھا پانی ڈالکر تجربہ کیا اور پھر اسی قطر کی چاندی کی نلی میں پانی ڈالکر تجربہ کیا۔ ہر صورت میں ایک ہی قسم کے مظاہر مشاہدے میں آئے Pogg. Ann. CXXXIX (1870). p. 1.

[۲] قوت شعری کے نظریہ کی یہ بحث Mathieu. *Theorie de la capillarite*, 1883. سے لی گئی ہے۔

یہ توانائی بالقوہ چار حصوں پر مشتمل ہوگی یعنی ثقلی توانائی ج ث $\iiint$ ی فرلا فرما فری جہاں عنصر فرلا فرما فری کا ارتفاع ی ہے، اور فاصل سطحوں کی توانائیاں جو (عہ) مائع اور ہوا، (بہ) مائع اور ظرف، (جہ) ہوا اور ظرف کو جدا کرتی ہیں۔

پس یہ ضروری ہے کہ

$$\text{ج ث} \iiint \text{ی فرلا فرما فری} + \text{ا}\,\text{س}_{۱} + \text{ب}\,\text{س}_{۲} + \text{ج}\,\text{س}_{۳}$$

ساکن ہو جہاں $\text{س}_{۱}$، $\text{س}_{۲}$، $\text{س}_{۳}$ سے بالترتیب سطحیں (عہ)، (بہ)، (جہ) اور ا، ب، ج سے ان کی توانائیاں فی اکائی رقبہ تعبیر ہوتی ہیں، اس شرط کے تابع کہ حجم $\iiint$ فرلا فرما فری مستقل رہتا ہے۔

مائع اور ہوا کی درمیانی سطح فاصل $\text{س}_{۱}$ کے خفیف ہٹاؤ کی صورت میں اگر سطح $\text{س}_{۱}$ کے عماد کے عنصر کو مف ع تعبیر کرے جو $\text{س}_{۱}$ کے قدیم اور جدید محلوں میں اسکے متناظر عناصر کے درمیان واقع ہے تو پہلی رقم کا تغیر صریحاً ج ث $\iint$ ی مف غ فر$\text{س}_{۱}$ ہوگا۔

اولاً فرض کرو کہ مائع جس خط پر ظرف کو مس کرتا ہے وہ نہیں بدلتا اس صورت میں $\text{س}_{۲}$ اور $\text{س}_{۳}$ مستقل رہیں گے اور $\text{س}_{۱}$ بدل کر $\text{س}'_{۱}$ ہو جائے گا۔ $\text{س}_{۱}$ کے ایک ایسے عنصر فر$\text{س}_{۱}$ فر$\text{س}_{۲}$ پر غور کرو جو خطوط انحنا سے محدود ہے۔ اس عنصر کے

۱؎ یہ ممکن ہے کہ مائع کی کثافت سطح کے لاانتہا نزدیک سالمی عمل کی وجہ سے بدلتی ہو لیکن چونکہ متغیر کثافت کی تہ کی موٹائی بمقابلہ مف ع کے لاانتہا چھوٹی ہوگی اس لئے استدلال کو متاثر کئے بغیر اس تغیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

حدود میں سے گذرنے والے عماد سطح سَ کو عنصر فرسَ۱ فرسَ۲ میں قطع کرینگے اور اگر سا۱، سا۲ صدری نصف قطر انحنا ہوں تو

فرسَ۱ = (۱ - مف ع / سا۱) فرس۱، فرسَ۲ = (۱ - مف ع / سا۲) فرس۲

(۱۶۸) ∴ فرسَ - فرس = فرسَ۱ فرسَ۲ - فرس۱ فرس۲ = - (۱/سا۱ + ۱/سا۲) مف ع فرس۱ فرس۲

یا مف فرس = - (۱/سا۱ + ۱/سا۲) مف ع × فرس

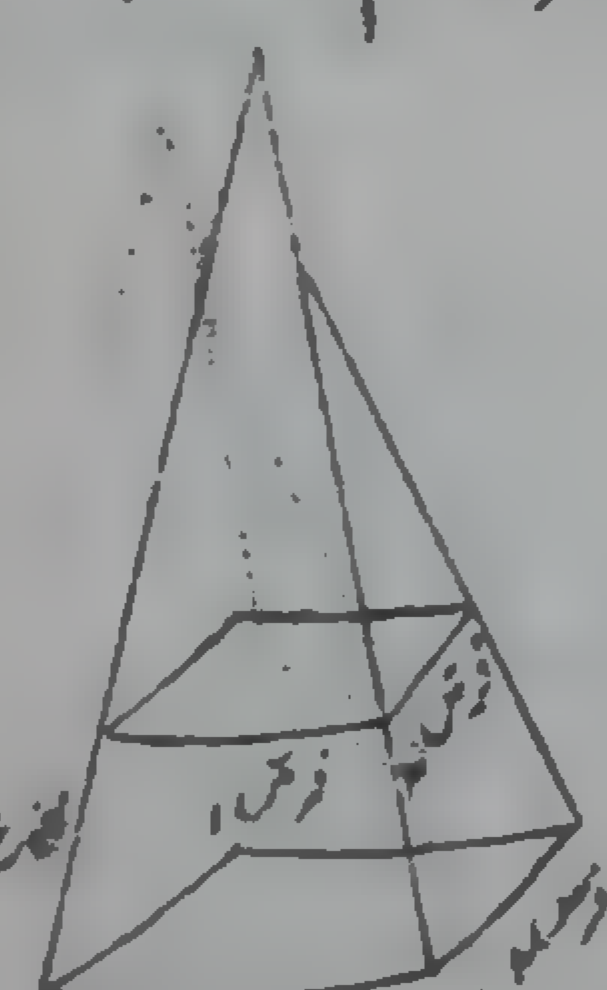
لیکن ہمیں مطلوب ہے

ج ث ∬ ی مف ع فرس + ا مف ∬ فرس = ۰

یا یہ کہ ∬ {ج ث ی - ا (۱/سا۱ + ۱/سا۲)} مف ع فرس = ۰

اس شرط کے تحت کہ حجم مستقل رہتا ہے یعنی ∬ مف ع فرس = ۰۔ پس

∬ {ج ث (ی - ف) - ا (۱/سا۱ + ۱/سا۲)} مف ع فرس = ۰



جہاں ف مستقل اور مف ع اختیاری ہے۔

∴ ا (۱/سا۱ + ۱/سا۲) = ج ث (ی - ف)

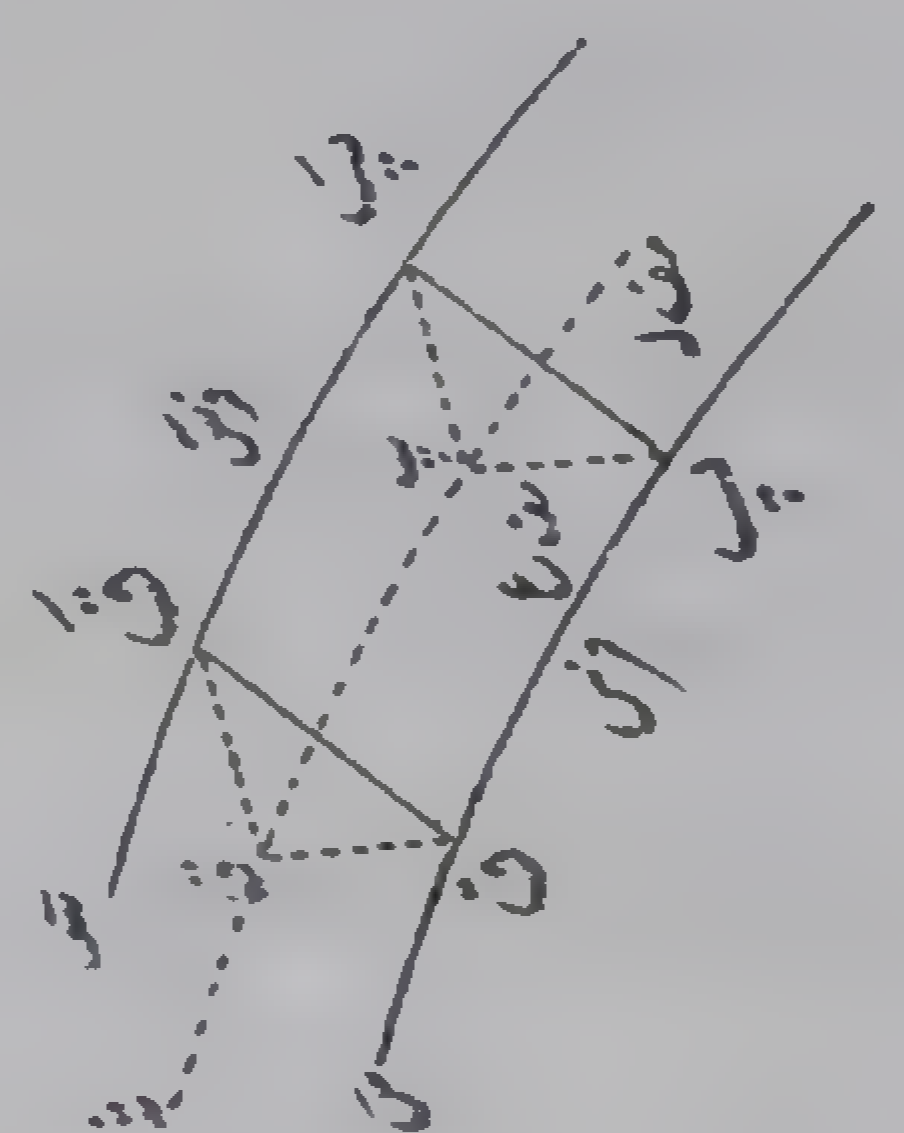
∴ ا (۱/سا۱ + ۱/سا۲) = - د + مستقل[1]

یعنی ا (۱/سا۱ + ۱/سا۲) = ∏ - د ... ... (۱)

[1] مستقل کا ∏ کے مساوی ہونا اس طرح ظاہر ہے کہ اگر سطحی توانائی ا صفر ہوتی تو مائع کے اندر کا دباؤ مائع اور ہوا کی سطح فاصل کے نزدیک کرہ ہوائی کے دباؤ کے مساوی رہتا۔

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ ٹٹ اور مائع کی سطح کے عین اندر کا دباؤ د ہے۔ اس سے معلوم ہوا کہ اثر وہی ہے گویا کہ سطح تناؤ کی حالت میں ہے اس طور پر کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ مستقل اور توانائی فی اکائی رقبہ ا کے مساوی ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ مائع اور ظرف کا خط تماس س سے سَ تک ہٹ جاتا ہے۔ اگر ہم خط س کے تمام نقطوں پر سطح س کے عماد کھینچیں تو یہ عماد سطح سَ۱ کو خط ثہ پر قطع کرینگے اور سطح سَ۱ دو حصوں پر مشتمل خیال کیجا سکے گی:۔ ایک صَ جو خط ثہ سے محدود ہے اور دوسرا صَ جو خط ثہ اور سَ کے درمیان ہے۔



گزشتہ کی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ص} - \text{س}_1 = -\text{ک}\left(\frac{1}{\text{ر}_1}+\frac{1}{\text{ر}_2}\right)\text{مف ع فرس}_1$$

اور اگر مف لہ سے عناصر فرس، فرسَ کا درمیانی فاصلہ تعبیر ہو تو صَ کو سطح سَ۱ (۹
پر ظرف کی سطح کے عناصر مف لہ . فرس کا ظل تصور کیا جا سکتا ہے پس اگر سطح س۱ اور سطح س۲ کے عمادوں کا درمیانی زاویہ آ ہو تو

$$\text{صَ} = \text{ک جم آ مف لہ فرس}$$

نیز

$$\text{مف س}_2 = -\text{مف س}_3 = \text{ک مف لہ فرس}$$

اب چونکہ توانائی بالقوہ ساکن ہے اس لئے

$$\text{مف}\left\{\text{ج ث}\iiint \text{ی فرلا فرما فری} + \text{ا س}_1 + \text{ب س}_2 + \text{ج س}_3\right\} = 0$$

اس شرط کے ماتحت کہ کمیت مستقل ہے۔ یا

ج ∬ ث ∬ ی مف ع فرس۱ + ∬ (ص + صَ − س۱) + ب مف س۲ + ج مف س۳ = ۰

یا ∬ ج ث ی − (۱/ر۱ + ۱/ر۲) } مف ع فرس۱ + ∫ (اجم آ + ب ج) مف ل فرس = ۰

اس شرط کے تحت کہ

∬ مف ع فرس۱ = ۰[۱]

اور چونکہ مف ل اختیاری ہے، اس سے مساوات (۱) حسب سابق حاصل ہوگی اور نیز یہ

اجم آ + ب − ج = ۰ . . . . . . (۲)

حاصل ہوگا جس کا یہ مطلب ہے کہ مائع اور ظرف کی سطحوں کا درمیانی زاویہ ان کے خط تقاطع پر مستقل رہتا ہے۔

۱۶۵ — متذکرہ بالا باتوں پر غور کرنے سے نیز تجربوں کے نتیجوں کی بنا پر ہم دو کلیوں پر پہنچتے ہیں جن کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) اس محدود کرنے والی سطح پر (جو مائع اور ہوا کو جدا کرتی ہے) یا دو مائعات کے درمیان کی سطح فاصل پر سطحی تناؤ ہوتا ہے جو ہر نقطہ پر اور ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

(۲) گیس اور مائع کی سطح فاصل یا دو مائعات کی سطح فاصل ٹھوس جسم کو جس خط پر ملتی ہے اس خط اتصال پر اس سطح اور جسم کی سطح کے درمیان ایک خاص زاویہ بنے گا جو ٹھوس اور مائعات کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

(۱۰) پانی اگر شیشے کے برتن میں ہو تو یہ زاویہ حادہ ہوتا ہے۔ پارہ کی صورت میں یہ زاویہ منفرجہ ہوتا ہے۔

---

[۱] شکل میں جو مائع اور ظرف کا خط تماس ہے اس کا عنصر فرس ن ق ہے اور خطوط س، ث کے متناظر عنصر نَ قَ ن ق ہیں سطح صَ کا عنصر نَ ن ی قَ ہے۔ کیت کا تغیر جو پانی اور ظرف کے خط تماس کے اطراف فانہ نما عناصر ن نَ قَ ق سے تعبیر ہوتا ہے بمقابلہ باقی کیت کے اعلیٰ رتبہ کی صغیر مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

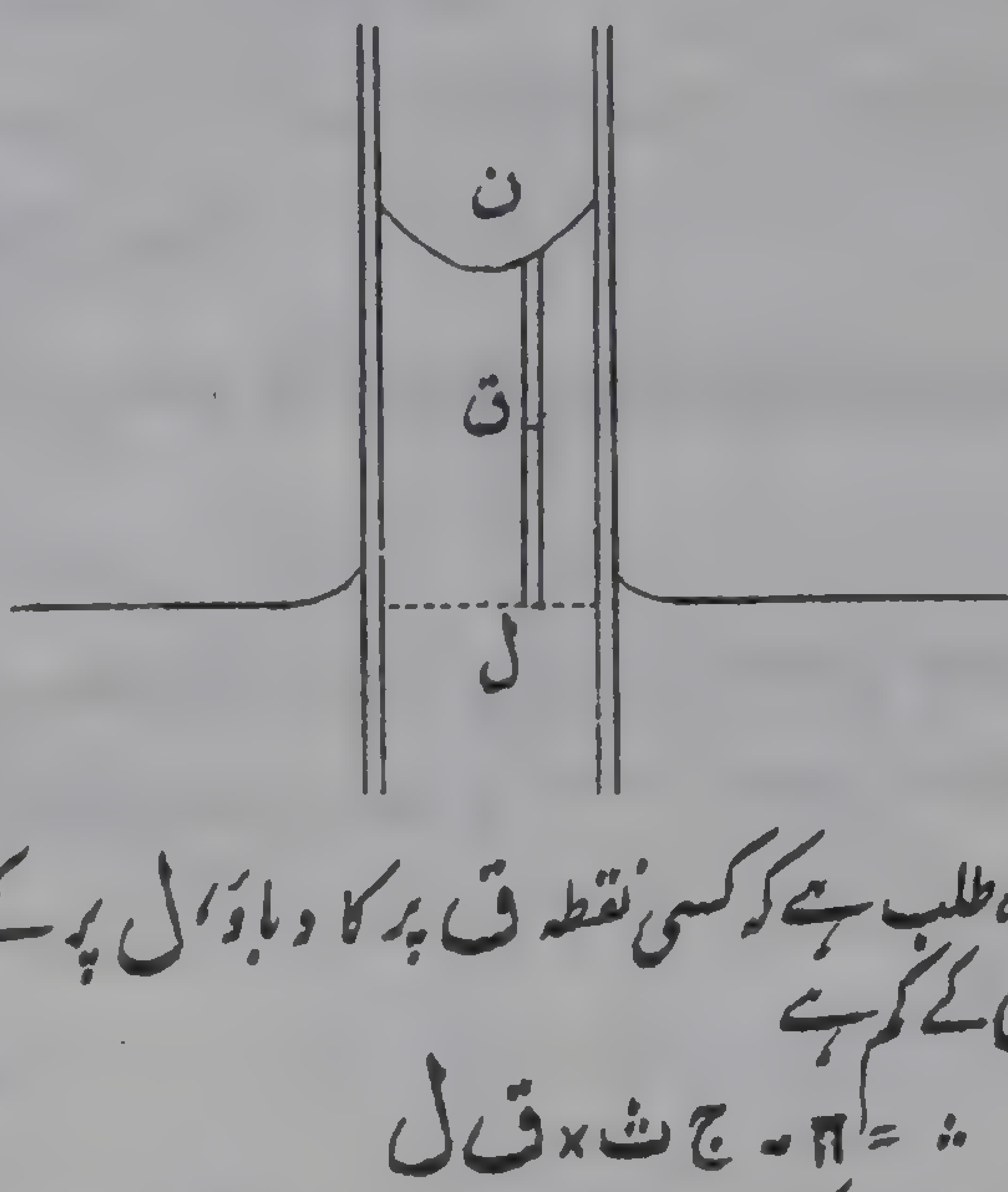
ان کلیوں کو مان کر ہم قوت شعری اور مائع جھیلوں سے متعلق مختلف مظاہر کی توجیہ کر سکتے ہیں۔

۱۶۶ــ دو تختیوں کے درمیان مائع کا چڑھاؤ۔

اگر سطحی تناؤ ت ہو اور مستقل زاویہ عہ ہو جس پر مائع کی سطح ہر تختی سے ملتی ہے اور جس کو ہم قوت شعری کا زاویہ کہیں گے اور اوسط چڑھاؤ ف اور تختیوں کا درمیانی فاصلہ د ہو تو، اکائی عرض کے مائع کے توازن پر غور کرنے سے

۲ ت جم عہ = ج ث ف د

پس تختیوں کے درمیانی فاصلے کو گھٹانے سے مائع کا چڑھاؤ بڑھتا ہے۔



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کسی نقطہ ق پر کا دباؤ، ل پر کے دباؤ سے بقدر ج ث × ق ل کے کم ہے

اور ∴ = ہ ۔ ج ث × ق ل

اب چونکہ ن پر کرہ ہوائی کا دباؤ بیرونی سطح آ ب پر کے دباؤ کے تقریباً مساوی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عنصر ن ل کے وزن کو اس کے اوپر کے حدود کے سطحی تناؤں کا حاصل تھامے ہوئے ہے۔

۱۶۷ــ دائری نلی میں مائع کا چڑھاؤ۔

اس صورت میں مائع کے ستون کو وہ تناؤ تھامیگا جو ستون کے اوپر کے حدود کے گرد ہے اور اس لئے اگر ر اندرونی نصف قطر ہو تو

۲ ۱۱ ر ت جم ع = ج ث ۱۱ ر۲ ف

یا

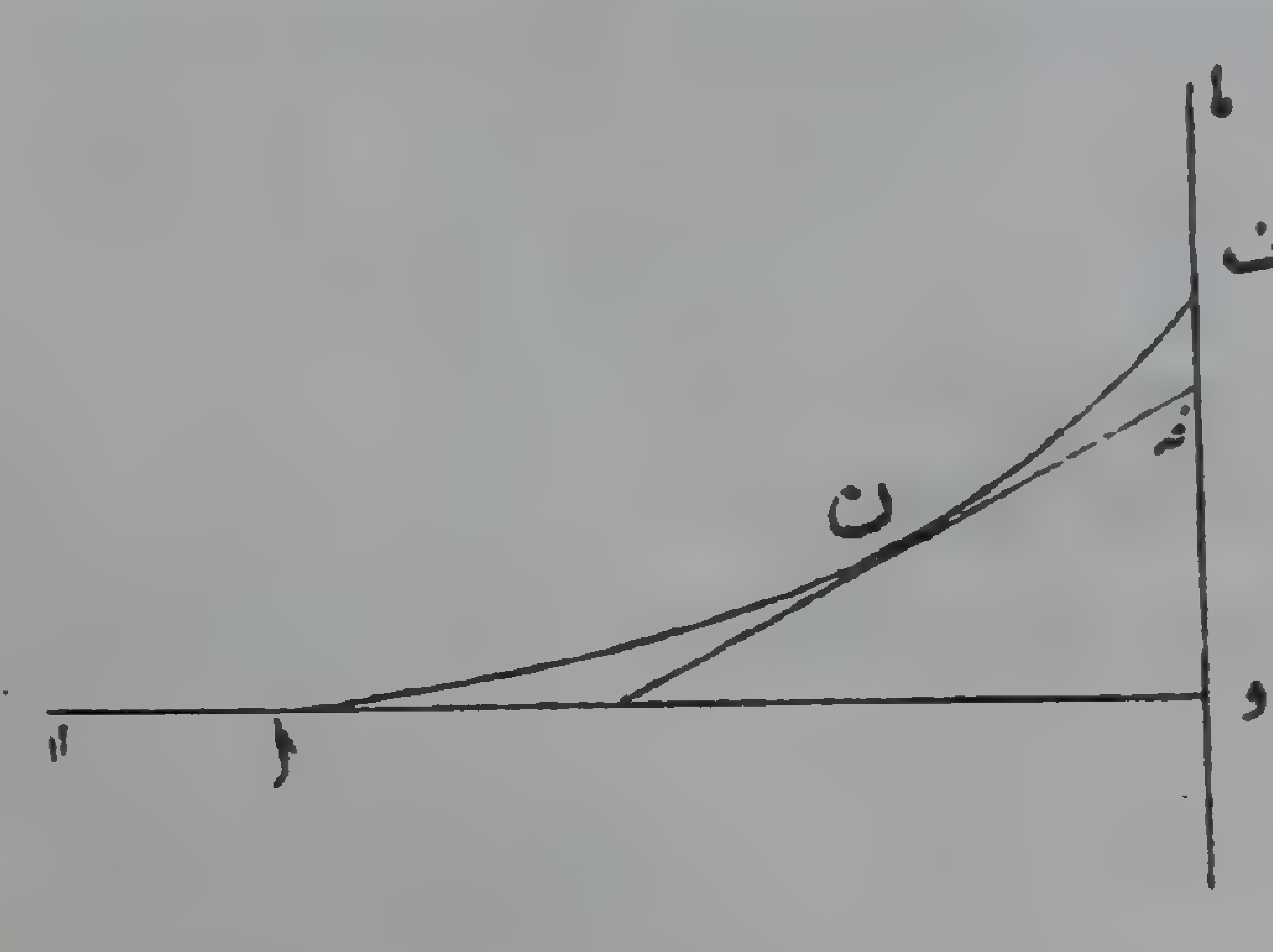
۲ ت جم ع = ج ث ر ف

اس طور پر تھمے ہوئے ستون کے کسی نقطہ پر کا دباؤ چونکہ کرہ ہوائی (۱۶۷
کے دباؤ سے کم ہوگا اس لئے اگر ستون کافی طور پر بلند ہو تو یہ دباؤ تناؤ کی حالت میں ضم ہو جائے گا مگر پھر بھی سیالی دباؤ کے اس کلیہ کی پابندی کریگا کہ ہر سمت میں دباؤ مساوی ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی بالقوہ جو ستون کے صعود کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتی۔

۱۶۸—شعاری منحنی۔ شعاری منحنی وہ شکل ہے جو مائع انتصابی دیوار کے ساتھ تماس میں اختیار کرتا ہے۔

ہم ایسی صورت پر غور کرینگے جس میں مائع اور دیوار کا زاویہ تماس حادہ ہو مثلاً جب پانی شیشے کی ایک انتصابی تختی کے ساتھ تماس رکھتا ہے۔



اگر انتصابی دیوار و ف ہو، مائع کی قدرتی سطح و ا ن میں سے گزرنے والی دیوار کے عمود وار تراشش کا نصف قطر انحنائیہ اور سطحی تناؤ ت ہو تو دفعہ (۱۶۴) کی مساوات (۱) سے

$$\frac{ت}{ر} = \text{ٹ} - د = ج\ ث\ ما$$

پس ۴ ت = ج ث ک۲ رکھنے سے

$$ر\ ما = \frac{ک^2}{۴}$$

اور دفعہ (۱۳۵) کی شکل کو الٹا دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ شعاری منحنی لدنیہ کی ایک خاص صورت ہے۔

یہ خاص صورت اس لئے ہے کہ و ا منحنی کا مماس ہے، پس فرما / فرلا = ۰ جبکہ ما = ۰ اور اس طرح کارٹیزی مساوات حاصل ہو سکتی ہے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $\frac{فرما}{فرلا}$ جو زاویہ (۲

ٹ/۲ + ہ کا مماس ہے منفی ہے اور تعداداً گھٹتا ہے، اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فر۲ما / فرلا۲ مثبت ہے اور مساوات ۴ ر ما = ک۲ ہو جاتی ہے

$$\frac{فر^2ما}{فرلا^2} \Big/ \left[۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right]^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴ ما}{ک^2}$$

$\frac{فر^2ما}{فرلا^2}$ کی بجائے ع $\frac{فرع}{فرلا}$ رکھ کر تکمل کرنے سے $\left[ع = \frac{فرما}{فرلا} \right]$

$$\frac{-۱}{(۱+ع^2)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲ما^2}{ک^2} - ۱، \quad اور \quad \therefore \quad \frac{فرلا}{فرما} = \pm \frac{۲ما^2 - ک^2}{۲ما\sqrt{ک^2 - ما^2}}$$

اب چونکہ مماس انتصابی ہوتا ہے جبکہ ما $\sqrt{۲}$ = ک اور چونکہ منحنی، انتصابی مستوی کو حادہ زاویہ پر ملتا ہے اس لئے تمام نقاط زیر بحث پر ما $\sqrt{۲}$، ک سے کم ہوگا اور

$$\therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{\text{۲ما}^{۲} - \text{ک}^{۲}}{\text{۲ ما}\sqrt{\text{ک}^{۲} - \text{ما}^{۲}}}$$

اس مساوات کے تکمل سے اور مبدا کو ایک نئے مقام پر لینے سے اس طرح پر کہ لا = ۰ جبکہ ما = ک، حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \sqrt{\text{ک}^{۲} - \text{ما}^{۲}} = \frac{\text{ک}}{۲} \text{ لوک } \frac{\text{ک} + \sqrt{\text{ک}^{۲} - \text{ما}^{۲}}}{\text{ما}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{ما}}{\text{ک}} = \text{قطز}\left\{ \frac{۲}{\text{ک}} \left(\text{لا} + \sqrt{\text{ک}^{۲} - \text{ما}^{۲}} \right) \right\} \qquad [\text{قطز} = \text{Sech.}]$$

اگر ما = ۰ تو لا، لامتناہی ہوتا ہے اور دفعہ (۱۴۵) کی شکل لینے سے لدنیہ شعاری منحنی کے مماثل ہو جاتا ہے جبکہ ب ج، ب اور ج پر مماس ہو لیکن یہ اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ طول بہت بڑا ہوا۔

اگر عہ وہ زاویہ ہو جس پر مائع دیوار سے ملتا ہے تو ہم $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے ۔مم عہ رکھنے سے ارتفاع و ف حاصل کر سکتے ہیں اس طرح

$$\frac{\text{ک}^{۲}}{\text{۲ ما}^{۲} - \text{ک}^{۲}} = -\text{قم عہ}$$

$$\text{اور} \quad \therefore \quad \text{وف} = \text{ک جب}\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\text{عہ}}{۲} \right)$$

ایسے مائع کی صورت میں جس کے لئے زاویہ تماس منفرجہ ہو (مثلاً پارہ) یہ بہتر ہوگا کہ ما کو نیچے وارنا پا جائے۔

۱۶۹ــــ ذاتی مساوات حاصل کرنے کے لئے قوس کو ف سے ناپو اور انصراف فہ کو ف و سے۔ تو

$$-\frac{\text{ک}^{۲}}{\text{۴ر}^{۲}} \frac{\text{فرر}}{\text{فرفہ}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرفہ}} = -\text{ر جم فہ}$$

$$\text{ثہ}\quad 1-\frac{\text{ک}^2}{8\,\text{ر}^2}=\text{جب فہ}\,،\ \frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}=\frac{\text{ک}}{4\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\text{فہ}}{2}\right)}$$

اور

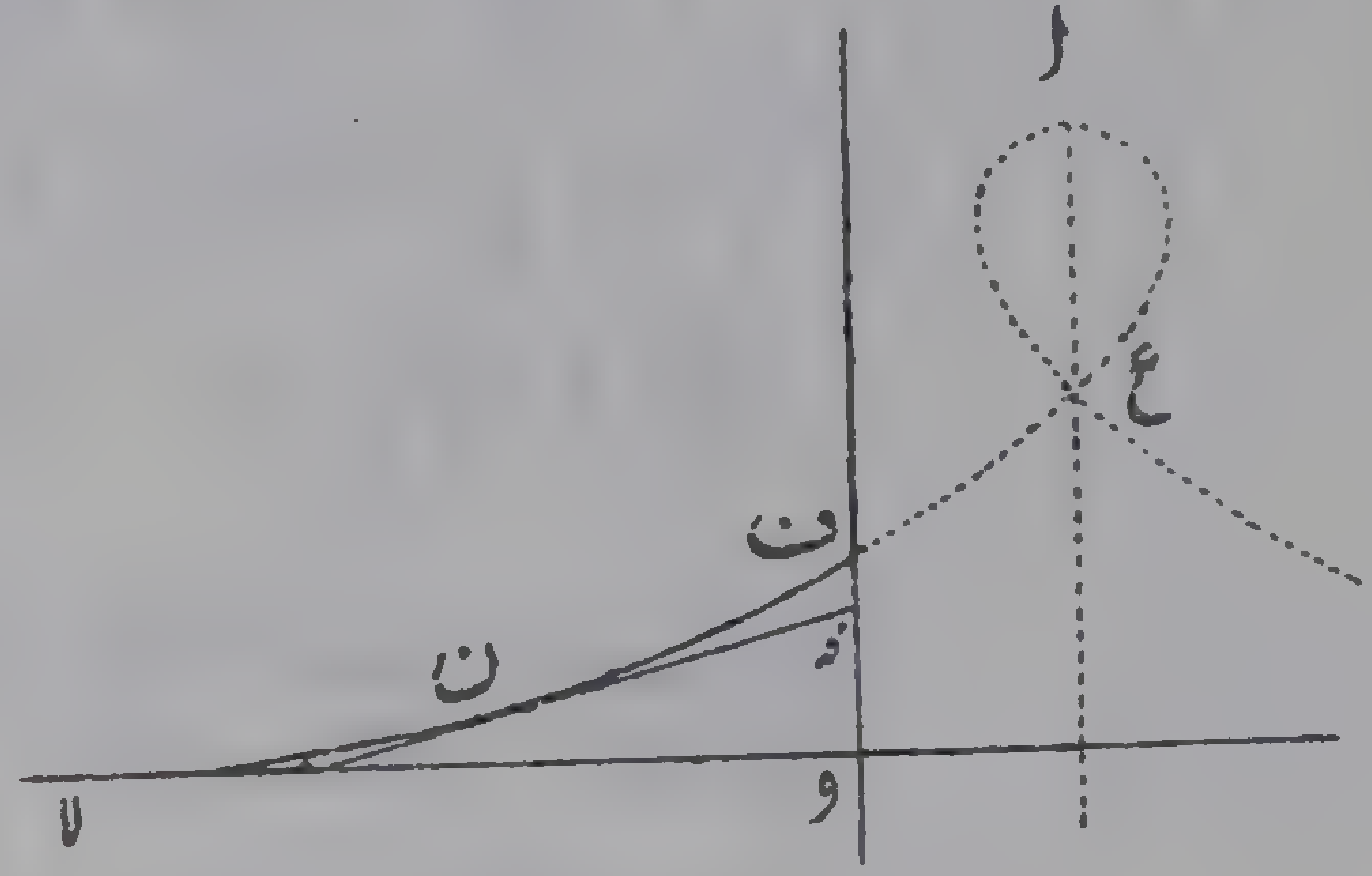
$$\frac{2\,\text{س}}{\text{ک}}=\text{لوک}\,\frac{\text{مس}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\text{ع}}{4}\right)}{\text{مس}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\text{فہ}}{4}\right)}$$

اگر قوس ثہ اور انصراف سا کو بالترتیب ا اور ا پر کے مماس سے ناپیں تو

$$\text{جب ، فہ}=-\frac{\pi}{2}\ ،\ \text{س}=-\text{ف ا}$$

اور

$$\text{جب ، فہ}=\text{سا}-\frac{\pi}{2}\ ،\ \text{س}=-(\text{ف ا}-\text{ثہ})$$



اور حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2\,\text{ثہ}}{\text{ک}}=\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{سا}}{4}\right)$$

جو دفعہ (۱۳۵) میں حاصل کی ہوئی مساوات ہے۔

۱۷۰ — متوازی تختیاں۔ ایک ہی شئے سے بنی ہوئی دو متوازی تختیوں کے درمیان مائع کی سطح کی شکل جب تختیاں مائع میں جزءً غرق ہوں۔

اس صورت میں محور و ما کو تختیوں کے درمیانی فاصلے کے وسط میں اور مبدا ر و کو مائع کی قدرتی سطح میں لینا اور انصراف فہ کو ا پر کے مماس
(۱۶۴) سے ناپنا سہولت پیدا کرے گا۔

گذشتہ صورت کی طرح

$$ر\,ما = \frac{ک^2}{ہ}$$

اور

$$\frac{فر^2 ما}{فر لا^2}\left\{1+\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{ہ\,ما}{ک^2}$$

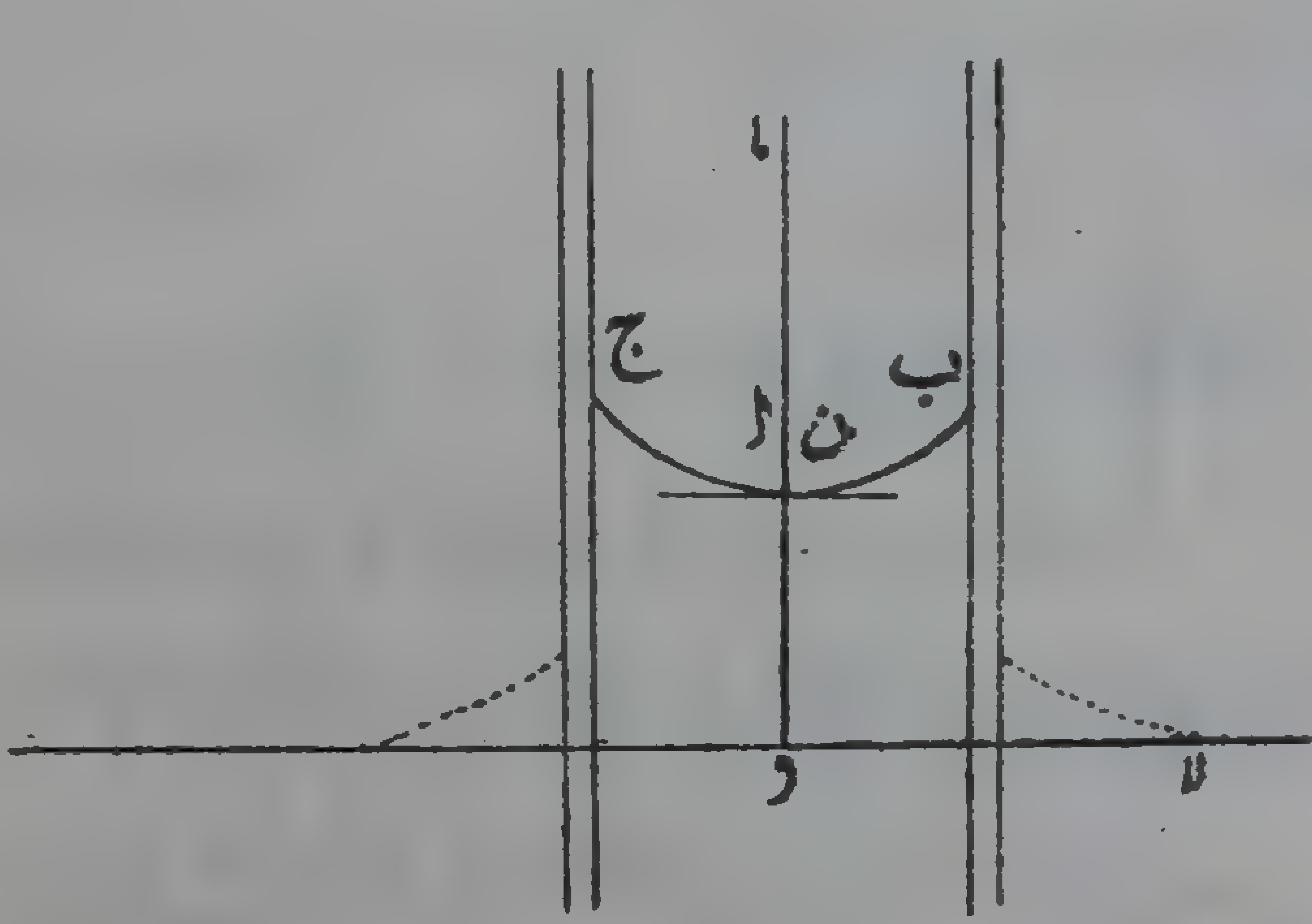
اس لئے حاصل ہوگا

$$\frac{ما^2}{2ک^2} = م - \left\{1+\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = م - جم\,فہ$$ جہاں م مستقل ہے۔

اس طرح م ـ جم فہ مثبت ہونا چاہیئے اور اسلئے $م > 1$

نیز $$ما\,\frac{فرس}{فرفہ} = \frac{ک^2}{ہ}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{ک}\,\frac{فرس}{فرفہ} = \frac{1}{\sqrt{م - جم\,فہ}}$$



رکھو $\text{جم فہ} = \text{ی}$ اور $\text{م}/۲\ \text{س}/\text{ک} = \text{ع}$

$$\therefore\quad ۲\,\text{فرع} = \frac{-\,\text{فری}}{\sqrt{\{(۱-\text{ی}^{۲})(\text{م}-\text{ی})\}}}$$

$\text{ی} = \text{و} + \text{م}/۳$ کے اندراج سے یہ ہو جاتا ہے

$$\text{فرع} = \frac{-\,\text{فرو}}{\sqrt{۴(\text{و}-۲\text{م}/۳)(\text{و}-۱+\text{م}/۳)(\text{و}+۱+\text{م}/۳)}}$$

یا

$$\text{ع} = \int_{\text{و}} \frac{\text{فرو}}{\sqrt{\{۴(\text{و}-\text{ع}_{۱})(\text{و}-\text{ع}_{۲})(\text{و}-\text{ع}_{۳})\}}}$$

جہاں $\text{ع}_{۱} = ۲\text{م}/۳$ ، $\text{ع}_{۲} = ۱-\text{م}/۳$ ، $\text{ع}_{۳} = -۱-\text{م}/۳$

اس طرح $\text{ع}_{۱} > \text{ع}_{۲} > \text{ع}_{۳}$

پس $\text{و} = \text{فھ}(\text{ع} + \text{صہ})$ جہاں صہ مستقل ہے۔

اب ی یا جم فہ، ۱ اور جب عہ کے درمیان واقع ہوتا ہے جہاں عہ قوت شعری کا زاویہ ہے۔

$$\therefore\quad ۱-\text{م}/۳ > \text{و} > \text{جب عہ} - \text{م}/۳$$

یا

$$\text{ع}_{۲} > \text{و} > \text{ع}_{۳}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ $\text{فھ}(\text{ع} + \text{صہ})$، $\text{ع}_{۲}$ اور $\text{ع}_{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اس لئے صہ کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور $\text{سہ}_{۳}$ ہونا چاہیئے۔ نیز $\text{د} = \text{ع}_{۲}$ جبکہ $\text{فہ} = ۰$ یا $\text{ی} = ۱$، اور اگر ہم س کو اسے ناپیں تو $\text{ع} = ۰$ جبکہ $\text{فہ} = ۰$، اور اس لئے لازماً

فہ سہ = ع۲ = فہ سم۲ ، اور اس لئے

صہ = سم۲ = سم۱ + سم۳ [سم۱ = س۱]

اور و = فہ (ع + سم۲)

نیز فرلا / فرس = جم فہ = و + ½ ع۱

∴ ۲ما / ک · فرلا / فرع = فہ (ع + سم۲) + ½ ع۱

∴ ۲ما لا/ک + مستقل = − طا (ع + سم۲) + ½ ع۱ ع

اور لا = ۰ جب کہ ع = ۰ پس

۲ما لا/ک = ½ ع۱ ع − طا (ع + سم۲) + طا سم۲ ...... (۱)

نیز ۲ما²/ک² = ھ − ی = ع۱ − و

یعنی ۲ما²/ک² = ع۱ − فہ (ع + سم۲) .... (۲)

حل کو مکمل کرنے کے لئے اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ا ہو تو لا = ا کے جواب میں ع کی قیمت اس مساوات سے حاصل ہوگی

جب عہ = ی = فہ (ع + سم۲) + ھ/۳

اور چونکہ فہ (ع + سم۲) = ع۲ + (ع۲ − ع۱)(ع۲ − ع۳) / (فہ ع − ع۲)

∴ جب ع = ۱ + ۲(۱ − ھ) / (فہ ع − ۱ + ھ/۳)

طا = ζ (Weierstrass' Zetafunction)

یعنی $\text{فہ}_6 = \dfrac{\text{ہ}(5 + \text{جب عہ})/2 - (1 + \text{جب عہ})}{2(1 - \text{جب عہ})}$

مزید براں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ربط (۳) کی مدد سے ربط (۲) اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$2\,\text{ما}^2/\text{ک}^2 = (\text{ہ} - 1)\,\frac{\text{فہ}_6 - \text{ع}_3}{\text{فہ}_6 - \text{ع}_2}$$

نیز یہ کہ نقاط ا اور ب کے ارتفاع علی الترتیب $2\,\text{ما}^2/\text{ک}^2 = \text{ہ} - 1$

اور ہ جب عہ سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۷۱ — دائری نلی۔ انتصابی دائری نلی کے اندرونی مائع کی سطح کی شکل کے لئے تفرقی مساوات حاصل کرنا جبکہ نلی مائع میں جزءً غرق ہو۔
دفعہ (۱۷۰) کی شکل کو سطح کی نصف النہاری تراش قرار دینے سے دفعہ ۱۶۴ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}'} = \frac{\text{ج ث ما}}{\text{ت}} = \frac{4\,\text{ما}}{\text{ک}^2}$$

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ، مائع کی سطح کے عین نیچے مائع کے دباؤ سے بقدر ج ث ما کے بڑا ہے۔

اب چونکہ ر' = لا قم فہ، ہمیں مساوات

$$\frac{4\,\text{ما}}{\text{ک}^2} = \frac{\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}{\left\{1 + \left(\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\text{لا}} + \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتی ہے جو شکل

$$\frac{4\,\text{لاما}}{\text{ک}^2} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\;\frac{\text{لا}\,\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}{\left\{1 + \left(\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

نیز اگر نلی کا اندرونی نصف قطر ا ہو اور مائع نلی کی سطح کو جس حادہ زاویہ پر ملتا ہے وہ عہ ہو تو

$$\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = \text{مم عہ ، جبکہ لا = د}$$

اگر زاویہ تماس منفرجہ ہو تو مائع نلی میں نیچے دبا ہوا ہوگا اور اگر ہم ما کو نیچے وار ناپیں تو مائع کی سطح کے عین نیچے اس کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ سے بقدر ج ث ما کے بڑا ہوگا۔

زیر بحث صورت چونکہ بارپیما کے اندرونی پارہ کی آزاد سطح پر بھی مشتمل ہے اس لئے اس مضمون پر کافی بحث و تحقیق ہوتی رہی ہے چنانچہ نصف النہاری منحنی کی تفرقی مساوات کا حل (Lohnstein[1]) نے ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جو مستدق رہتا ہے جب تک کہ منحنی کا مماس انتصابی نہیں ہو جاتا۔ (C. Runge[2]) نے تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عددی طریقہ کے ضمن میں مثال کے طور پر اس مساوات پر غور کیا۔ لارڈ کیلون[3] نے رسالہ (Nature) میں شعری منحنیوں کی تقریبی شکل دریافت کرنے کے ایک ہندسی طریقہ کی نشان دہی کی جس پر بالتفصیل (C. V. Boys)[4] نے بحث کی۔ تقرب کا ایک اور طریقہ (F. Neumann)[5] نے بھی معلوم کیا ہے۔

۱۷۲ — مائع کا قطرہ۔ اگر مائع کا ایک قطرہ ایک افقی میز پر رکھدیا جائے تو

---

[1] Dissert. Berlin, 1891

[2] *Math. Annalen*. 46 (1895), p. 167.

[3] *Nature*, July and August, 1886.

[4] *Phil. Mag.* Series 5, Vol. 36, p. 75, 1893.

[5] *Vorlesungen uber die Theorie der Capillaritat.* Leipzig. 1894.

توازن کی مساوات ہوگی

$$\frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}} = \frac{\text{ضد}}{\text{ت}}$$

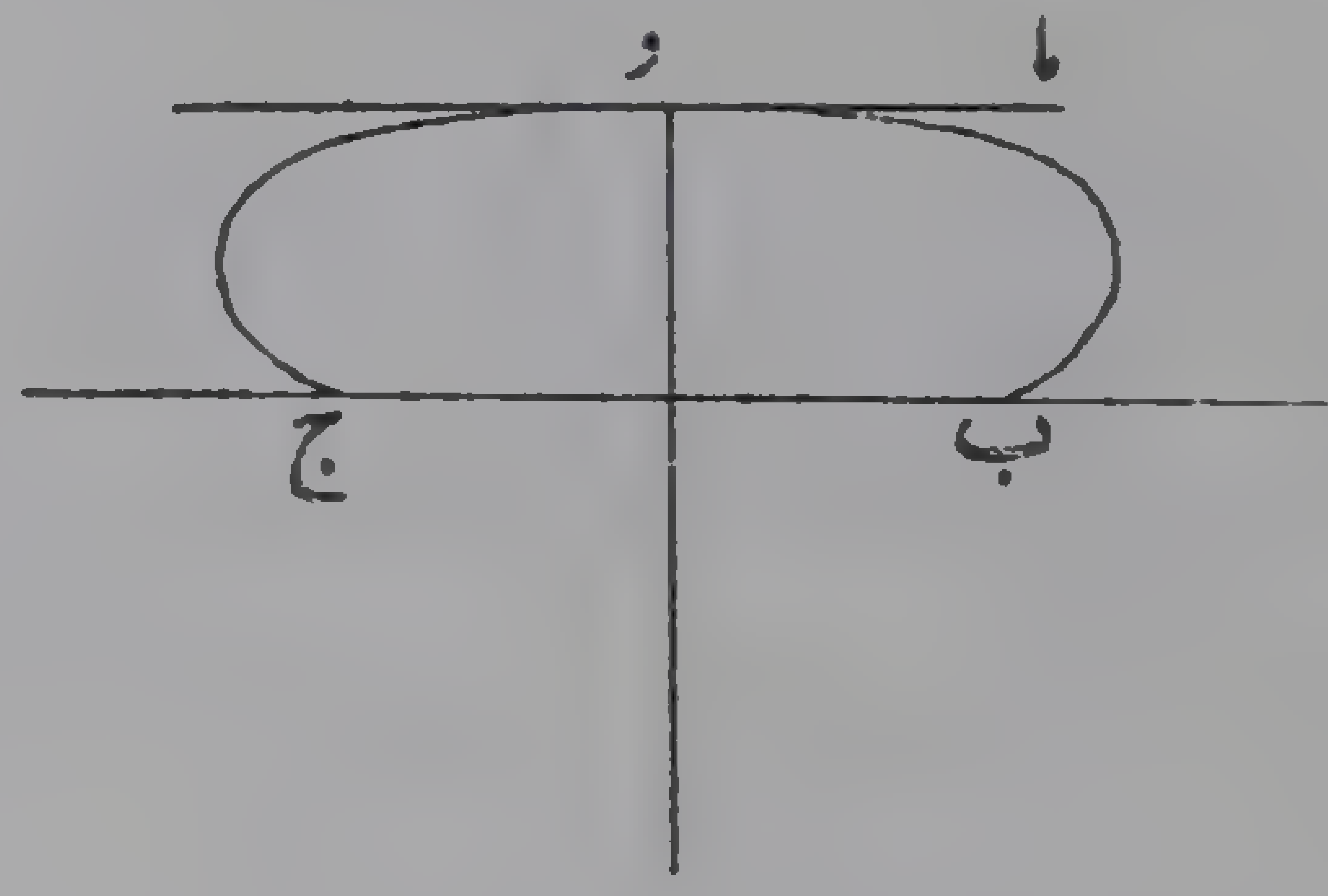
جہاں سطحی تناؤت ہے اور اندرونی دباؤ اور کرہ ہوائی کے دباؤ کے درمیان فرق ضد ہے۔

عام طور پر قطرہ ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کرے گا۔

اس صورت کو لیکر فرض کرو کہ مائع کے اندر بلند ترین نقطہ پر دباؤ ϖ' ہے اور کرہ ہوائی کا دباؤ ϖ ہے۔ تب لا کو بلند ترین نقطہ سے نیچے وار ناپنے سے

$$\text{ضد} = \varpi' + \text{ج ث لا} - \varpi$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}} = \frac{\varpi' - \varpi + \text{ج ث لا}}{\text{ت}}$$



پس اگر بلند ترین نقطہ پر نصف قطر انحنا ا ہو تو

$$\frac{2}{\text{ا}} = \frac{\varpi' - \varpi}{\text{ت}}$$

اور $\therefore \quad \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}} = \frac{2}{\text{ا}} + \frac{\text{ج ث لا}}{\text{ت}} = \frac{2}{\text{ا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}^2} \quad \ldots\ldots (1)$

اگر ہم شیشے پر پارہ کے قطرہ کی یا فولاد پر پانی کے قطرہ کی صورت لیں تو مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ فرما/فرلا راس سے نیچے وار گھٹتا جاتا ہے

(۱۰۸ اور نصف النہاری منحنی کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$-\frac{\frac{فر^2ما}{فرلا^2}}{\left\{1+\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{ما\left\{1+\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{ا}+\frac{لا}{ک^2}$$

یا

$$-\frac{فر}{فرلا}\frac{ع}{(1+ع^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{ما(1+ع^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{ا}+\frac{لا}{ک^2}$$

جہاں $ع=\frac{فرما}{فرلا}$

پس اگر نصف النہاری منحنی کے کسی نقطہ پر مماس کا میلان محور لا کے ساتھ فہ ہو تو $ع=\text{مس}\ فہ$ اور

$$\therefore\quad \text{جم}\ فہ\left(\frac{1}{ما}-\frac{فرفہ}{فرلا}\right)=\frac{2}{ا}+\frac{لا}{ک^2}$$

اگر قطرہ اتنا بڑا ہو کہ ہم اس کی چوٹی کو چپٹا تصور کر سکیں اور اگر افقی تراشوں کے انحنا کو نظر انداز کیا جائے تو مساوات (۱) ہو جائے گی

$$\frac{1}{ر}=\frac{لا}{ک^2}$$

یا

$$-\frac{فر}{فرلا}\frac{ع}{\sqrt{1+ع^2}}=\frac{لا}{ک^2}$$

اس طرح $\frac{ع}{\sqrt{1+ع^2}}=1-\frac{لا^2}{2ک^2}$ کیونکہ $ع=\infty$ جبکہ $لا=0$

یا

$$\frac{فرما}{فرلا}=\frac{2ک^2-لا^2}{\sqrt{\left\{4ک^4-(2ک^2-لا^2)^2\right\}}}$$

اس مساوات کا تکمل کرنے کے لئے رکھو $لا=2ک\ \text{جب}\ ط$،

اس طرح $\quad \text{فرا} = \text{ک} \left(\text{قم طہ} - ۲\ \text{جب طہ} \right) \text{فرطہ}$

$$\therefore \quad \text{ا} + \text{ب} = \text{ک لوک مس} \frac{\text{طہ}}{۲} + ۲\ \text{ک جم طہ}$$

یا
$$\text{ا} + \text{ب} = \text{ک لوک} \frac{۲\text{ک} - \sqrt{۴\text{ک}^۲ - \text{لا}^۲}}{\text{لا}} + \sqrt{۴\text{ک}^۲ - \text{لا}^۲}$$

جہاں ب مستقل ہے۔

اُس نقطہ پر جہاں مماس انتصابی ہے $\text{ع} = ۰$ اور

$$\therefore \quad \text{لا} = \text{ک} \sqrt{۲}$$

اگر نصف النہاری منحنی اور افقی مستوی کے درمیان حادہ زاویہ عہ ہو یعنی پارہ مستوی کو جس زاویہ پر ملتا ہے وہ π - عہ ہو اور اگر قطرہ کا ارتفاع ۷۹
ف ہو تو

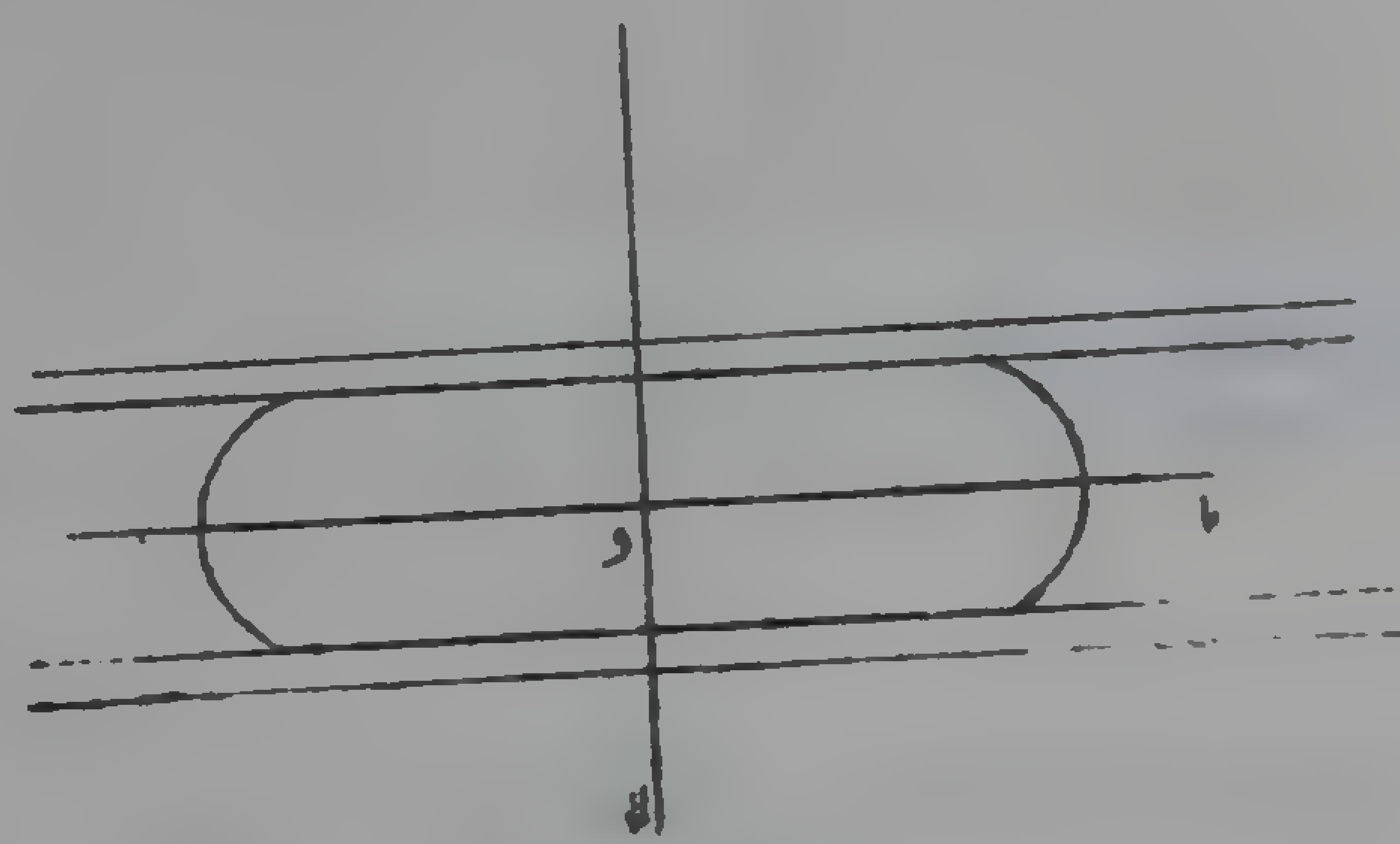
$$\text{ف} = -\left(\frac{\pi}{۲} - \text{عہ} \right) \quad \text{جبکہ} \quad \text{لا} = \text{ف}$$

اور $\quad \therefore \quad \text{ف} = ۲\ \text{ک جم} \frac{\text{عہ}}{۲}$

۱۷۳ــــ **متوازی تختیوں کے درمیان قطرہ** - اگر پارہ کا ایک قطرہ شیشے کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان رکھدیا جائے جو ایک دوسرے سے اس قدر نزدیک ہیں کہ جاذبہ ارض کا عمل نظر انداز کیا جاسکتا ہے تو قطرہ کے اندر دباؤ مستقل ہوگا اور اگر سطح گردشی سطح ہو تو ہمیں مساوات

$$\frac{۱}{\text{ر}} + \frac{۱}{\text{ر}'} = \frac{\text{صنہ}}{\text{ت}}$$

حاصل ہوگی جہاں اندرونی دباؤ کا اضافہ کرہ ہوائی کے دباؤ پر صنہ ہے۔



اس صورت میں لا کو اُس مستوی سے نیچے وار ناپنا مناسب ہوگا جو تختیوں کی دونوں سطحوں کے وسط میں واقع ہے اور تب ہمیں مساوات

$$\frac{-\text{ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}}{(1+\text{ع}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\text{ما}(1+\text{ع}^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{صنہ}}{\text{ت}} = \frac{2}{\text{ب}} \text{، (فرض کرو)}$$

حاصل ہوگی۔

تکمل کرنے سے اور ما = ل، جبکہ لا = ۰ لینے سے

$$\frac{\text{ب ما}}{(1+\text{ع}^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{ما}^2 + \text{ل ب} - \text{ل}^2$$

اس طرح

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = -\frac{\text{ما}^2 + \text{ل ب} - \text{ل}}{\text{ما}\sqrt{\{\text{ب}^2\text{ما}^2 - (\text{ما}^2 + \text{ل ب} - \text{ل}^2)^2\}}}$$

رکھو $\text{ما}^2 = \text{ی}$ تو ۱۸

$$\text{فرلا} = -\frac{(\text{ی} + \text{ل ب} - \text{ل}^2)\,\text{فری}}{\sqrt{\{4\,\text{ی}\,(\text{ی} - \text{ل}^2)(\text{ل} - \text{ب}^2 - \text{ی})\}}}$$

اگر ہم لکھیں $\text{ی} = -\text{و} + \frac{1}{2}\text{ل}^2 + \frac{1}{4}(\text{ل} - \text{ب})^2$ تو حاصل ہوگا

$$\text{فرلا} = \frac{\left\{-\text{و} + \frac{1}{3}(\text{ب}^2 + \text{ل ب} - \text{ل}^2)\right\}\text{فرو}}{\sqrt{\left[4\left\{\text{و} - \frac{1}{3}\text{ل}^2 - \frac{1}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2\right\}\left\{\text{و} - \frac{1}{3}\text{ل}^2 + \frac{2}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2\right\}\left\{\text{و} + \frac{2}{3}\text{ل}^2 - \frac{1}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2\right\}\right]}}$$

اب فرض کرو کہ
$$\text{۶} = \int \frac{\text{فرو}}{\sqrt{\{4(\text{و} - \text{ع}_1)(\text{و} - \text{ع}_2)(\text{و} - \text{ع}_3)\}}}$$

جہاں $\text{ع}_1 = \frac{1}{3}\text{ل}^2 + \frac{1}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2$، $\text{ع}_2 = \frac{1}{3}\text{ل}^2 - \frac{2}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2$، $\text{ع}_3 = -\frac{2}{3}\text{ل}^2 + \frac{1}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2$

پس $\text{ع}_1 > \text{ع}_2 > \text{ع}_3$

تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\text{و} = \text{فہ}(\text{۶} + \text{صہ})$

جہاں صہ مستقل ہے

اب فرما/فرلا =۔ جبکہ ما = ل، اس لئے ہم یہ مان سکتے ہیں کہ ما $\ngtr$ ل اور ی $\ngtr$ ل² اور نیز فرلا/فری کے حقیقی ہونے کے لئے یہ بھی ضروری ہے کہ ی $\ngtr (\text{ل} - \text{ب})^2$۔ پس

$$\text{ل}^2 \ngtr -\text{و} + \frac{1}{3}\text{ل}^2 + \frac{1}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2 \ngtr (\text{ل} - \text{ب})^2$$

$$\text{یا} \quad -\frac{2}{3}\text{ل}^2 + \frac{1}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2 \ngtr \text{و} \ngtr \frac{1}{3}\text{ل}^2 - \frac{2}{3}(\text{ل} - \text{ب})^2$$

یعنی و، ع_2 اور ع_3 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس لئے اگر ہم ۶ کو حقیقی لیں تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ صہ کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سہ_3 ہونا چاہیئے اور اس کا حقیقی حصہ، ۶ کی نچلی حد کے مناسب انتخاب کی رو سے صفر لیا جا سکتا ہے۔

$$\therefore \quad \text{و} = \text{فہ}(\text{۶} + \text{سہ}_3)$$

پس فرلا = {- فہ (ع + سہ۳) + ۱/۲ (ب۲ + ل ب - ل۲)} فرع

اور تکمل سے

لا + مستقل = طا (ع + سہ۳) + ۱/۲ ع (ب۲ + ل ب - ل۲)

لیکن لا = ۰ جبکہ ی = ل۲

یا جبکہ و = - ۲/۳ ل۲ + ۱/۳ (ل - ب)۲ = ع۳ = فہ (سہ۳)

اس طرح لا کی اس قیمت کے لئے ع کو صفر ہونا چاہیئے۔

∴ لا = طا (ع + سہ۳) - طا (سہ۳) + ۱/۲ ع (ب۲ + ل ب - ل۲)

اور ما۲ = - فہ (ع + سہ۳) + ۱/۳ (۲ ل۲ - ۲ ل ب + ب۲)

سے کارٹیزی محددوں کی قیمتیں مبدل ع کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر قطرہ اس قدر بڑا ہو کہ ہم ۱/ر کو نظر انداز کرسکیں تو ر = ت/ضد ، اور

اس طرح نصف النہاری منحنی دائرہ ہوگا۔

اس صورت میں اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ ف ہو تو شکل سے ۱۸۱

ظاہر ہے کہ

ر = ف قطع ہ

جہاں ہ وہ حادہ زاویہ ہے جو پارہ اور ہر تختی کی سطح کے درمیان باہر کی طرف بنتا ہے۔

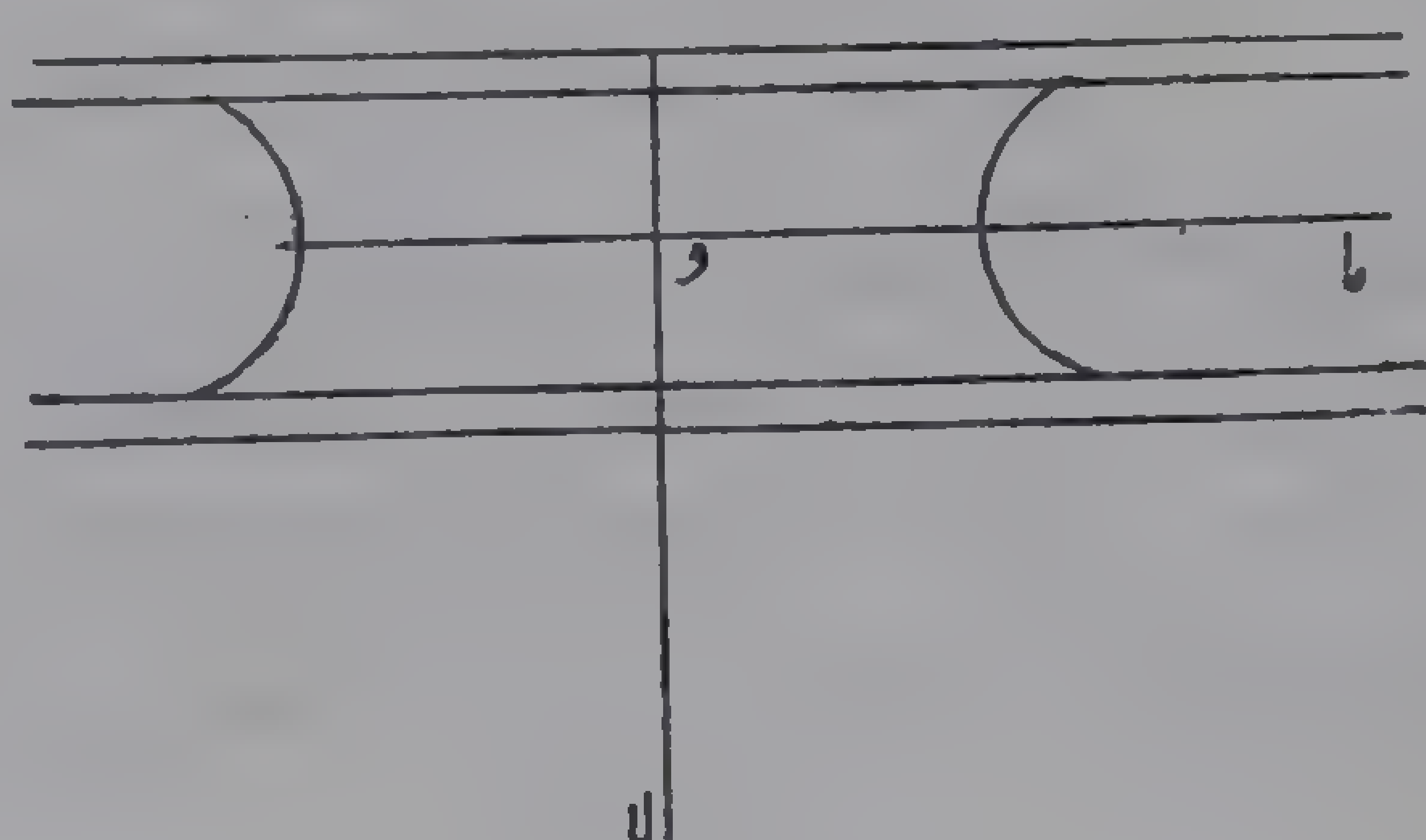
۴ ۱۷ — اگر شیشے کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان پانی کا ایک قطرہ گردشی سطح کی شکل اختیار کرے تو سطح ضد انحنائی (Anticlastic) ہوگی کیونکہ پانی اور شیشے کا زاویہ تماس حادہ ہے۔

اس صورت میں اگر کرہ ہوائی کا دباؤ ٹ اور قطرہ کے اندر پانی کا دباؤ

اَ ہو اور اگر نصف النہاری منحنی کا نصف قطر انحنار ہو اور علی القوائم عمادی تراش کا نصف قطر انحنا رَ یعنی عماد کا وہ طول جو سطح کے محور سے قطع ہوتا ہے تو توازن کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ضد}}{\text{ت}} = \frac{\text{ا} - \text{اَ}}{\text{ت}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}}$$

کیونکہ اگر ہم عماد کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کریں تو تناؤں کا حاصل سمت میں باہر کی طرف ہوگا اور دوسرے دو تناوں کا حاصل اندر کی طرف۔



حسب سابق لاکو تختیوں کے درمیان وسطی سطح سے نیچے وار ناپنے سے مساوات بالا ہو جائے گی

$$\text{فرض کرو}\quad \frac{۲}{\text{ب}} = \frac{\text{ضد}}{\text{ت}} = \frac{\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}}{(۱+\text{ع}^۲)^{\frac{۳}{۲}}} - \frac{۱}{\text{ما}(۱+\text{ع}^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

جس سے مساوات

$$\frac{\text{ب ما}}{(۱+\text{ع}^۲)^{\frac{۱}{۲}}} = \text{ل ب} + \text{ل}^۲ - \text{ما}^۲$$

حاصل ہوگی اور اس سے گذشتہ دفعہ کی طرح ہم اخذ کر سکتے ہیں (۱۸۲)

لا = طا (سہ۲) ـ طا (۶ + سہ۲) + ۱/۳ (۶ ـ سہ۱) (ل۲ + ل ب ـ ب۲)

اور ما۲ = ـ فہ (۶ + سہ۲) + ۱/۳ (۲ ل۲ + ۲ ل ب + ب۲)

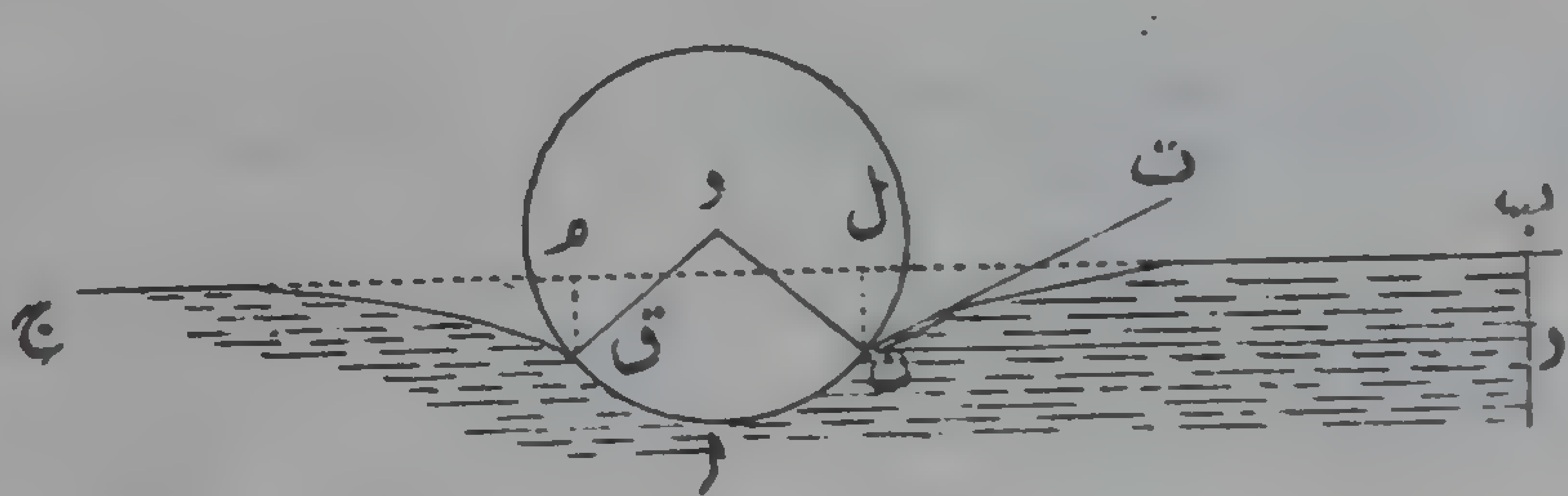
بڑے قطرے کے لئے حسب سابق

ر = ف قطا ع

جہاں پانی کی سطح اور ہر تختی کی سطح کے درمیان حادہ زاویہ عہ ہے۔

۱۷۵ـ تیرنے والی سوئی ـ پانی کی سطح پر سوئی کے تیرانے کے مشہور تجربہ کی توجیہ سطح کے قوانین کے ذریعہ ہوسکتی ہے۔

شکل سوئی کی تراش کو اور اس کے محور کے علی القوائم پانی کی سطح کی تراش کو تعبیر کرتی ہے سوئی پر عمل کرنے والی قوتیں ہیں ن اور ق پر کے تناؤ اور حصہ ن ا ق پر پانی کا دباؤ جو پانی کے حجم ل ن ا ق م کے وزن کے مساوی ہے۔ یہ سب قوتیں سوئی کے وزن کو تھامتی ہیں۔



مزید براں ن پر کے تناؤ کا افقی جزو تحلیلی اور ب د پر کا افقی آبی دباؤ مل کر ب پر کے تناؤ کے مساوی ہیں جہاں ن د افقی اور ب د انتصابی ہے۔

ان شرائط سے توازن کی تعیین ہوتی ہے اور حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۲ ت جب (ط ـ عہ) + ج ث ک (ک ط + ک جب ط جم ط ـ ۲ ف جب ط) = و

۴ ت جب² ½ (ط - عہ) = ج ث (ک جم ط - ف)²

جہاں قوت شعری کا زاویہ عہ، سوئی کے اکائی طول کا وزن و، پانی کی قدرتی سطح کے اوپر سوئی کے محور کا ارتفاع ف اور زاویہ ل و ق، ۲ ط ہے۔

۱۷۶- مائع کی جھلیاں۔ مائع کی جھلیاں مختلف طریقوں سے پیدا کی جاتی ہیں۔ صابونی بلبلہ ایک عام مثال ہے۔ صاف شیشے کی بوتل کو جس میں کچھ لزج مائع ہو ہلانے سے یا صابون اور پانی یا صابون اور گلیسرین کے محلول میں تار کا ایک فریم ڈبو کر اس کو بتدریج باہر نکال لینے سے مائع کی جھلیاں پیدا کی جاسکتی ہیں اور ان کی خصوصیات کا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے۔

جھلیوں کا ظاہرا مستوی کی شکل میں حاصل ہونا اس بات کی دلیل ہے کہ جاذبہ ارض کا عمل بمقابلہ جھلی کے تناؤ کے نظرانداز کیا جاسکتا ہے۔

یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ بہت چھوٹے ماسی عمل سے بھی جھلی پھٹ جاتی ہے جس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اس کے کسی خط پر کا زور کلاً اس خط کے عمودی سمت میں ہوتا ہے اس سے دفعہ (۱۴۹) کی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

۱۷۷- مستوی جھلی کی توانائی۔ لزج مائع کے اندر سے اگر ایک مستوی جھلی نکال لی جائے تو کچھ کام کیا جاتا ہے۔ یہ کام جھلی کی توانائی بالقوہ کو تعبیر کرتا ہے۔

ایک مستطیلی جھلی اب ج د کا تصور کرو جو سیدھے تاروں ا د، ب ج سے محدود ہے۔ اب مائع کی سطح میں ہے اور ج د حرکت پذیر تار ہے۔

جھلی کو باہر نکال لینے میں جو کام ہوگا وہ تہ × اب × ا د کے مساوی ہوگا اور اس لئے اگر سطحی توانائی فی اکائی رقبہ س ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

س = تہ

یہ یاد رہے کہ جس چیز کو ہم نے یہاں جھلی کا تناؤ کہا ہے وہ جھلی کے

کسی رخ کے سطحی تناؤ کا دو چند ہے۔

۱۷۸— انتصابی مستوی میں کسی شکل کا ایک تار ہے جس کے دو نقطوں پر وسائے ہوئے وزن اور طول کا تاگا باندہ دیا گیا ہے۔ مائع کی ایک مستوی جہلی کے حدود یہ تار اور تاگا ہیں۔

تاگے کی اختیار کردہ شکل کو معلوم کرنے کے لئے ہم یہ شرط بیان کرینگے کہ اس نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہے۔

اگر رقبہ و اب ج، ا ہو تو جہلی کی توانائی

$$= \text{س} \, \text{ا} - \int \text{س} \, \text{ما} \, \text{فرلا}$$

اور اگر تاگے کے اکائی طول کا وزن و ہو تو نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہوگی جبکہ

$$\int \text{س} \, \text{ما} \, \text{فرلا} + \text{و} \int \text{ما} \, \text{فرس}$$

اعظم ہو بشرطیکہ

$$\int \text{فرس} = \text{ل}$$

پس ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ کس شرط کے تحت جملہ (۱۸۲)

$$\int \left\{ \text{س} \, \text{ما} + (\text{و} \, \text{ما} + \text{له}) \sqrt{1 + \text{ع}^2} \right\} \text{فرلا}$$

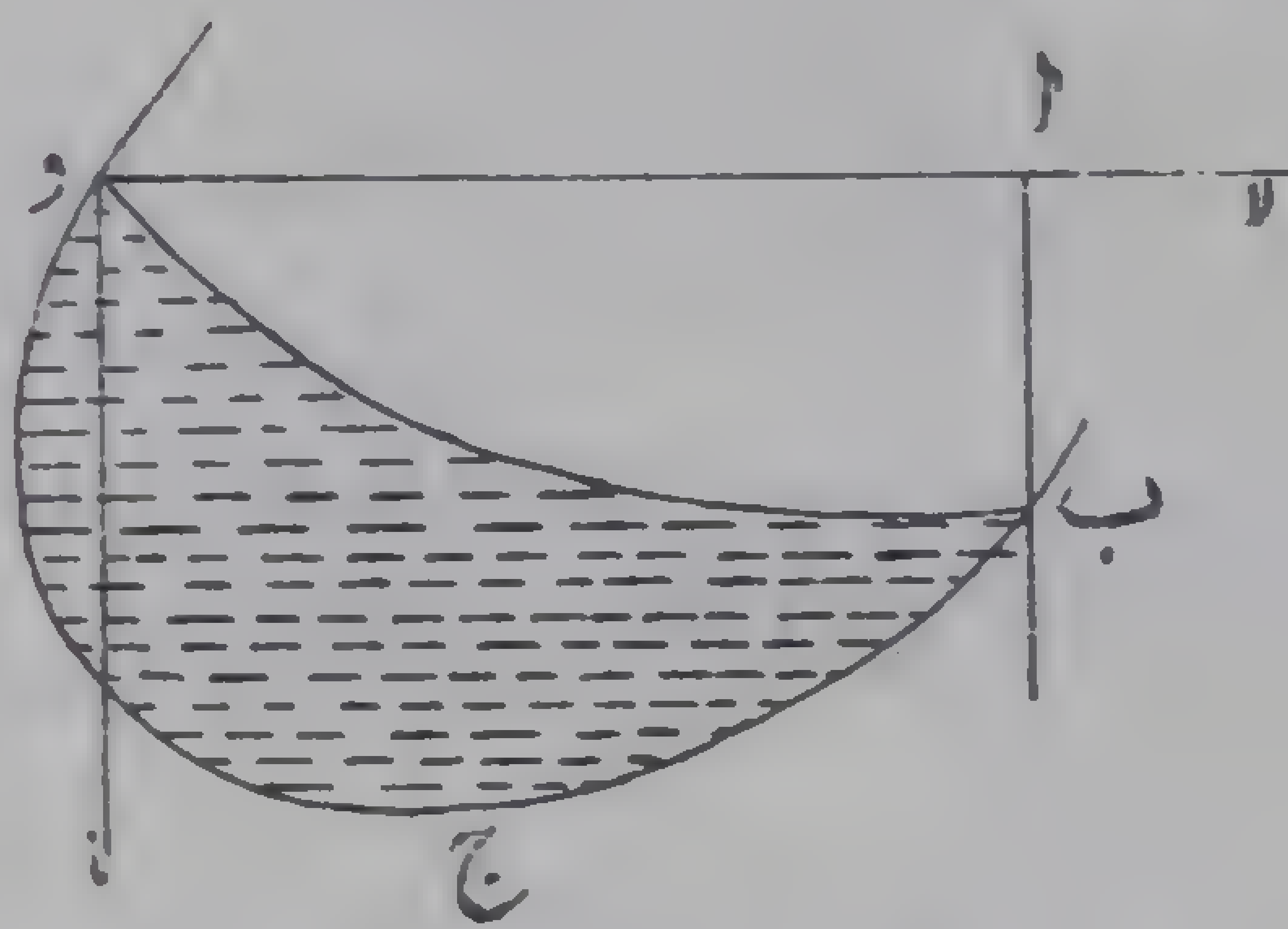
کا تغیر صفر ہو جاتا ہے۔

احصاء تغیرات کی مدد سے اس شرط سے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\sqrt{1 + \text{ع}^2} = \frac{\text{و} \, \text{ما} + \text{له}}{\text{هر} - \text{س} \, \text{ما}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \ \text{کی شکل} \ \frac{\text{ا} + \text{ب} \, \text{ما}}{\sqrt{\text{عہ} + \text{بہ} \, \text{ما} + \text{جہ} \, \text{ما}^2}} \ \text{ہوگی}$$

اس کو بہ آسانی تکمل کر سکتے ہیں۔



یہ مساوات مستقلوں کی خاص قیمتوں کے لئے دائرہ یا زنجیرہ کو تعبیر کرسکتی ہے۔

۱۷۹ — تاگے کے ایک عنصر کے توازن پر غور کرنے سے بھی اس سوال کو حل کیا جاسکتا ہے۔

و سے قوس کوناپ کر فرض کرو کہ ن پر کے ماس کا میلان و ا کے ساتھ ف ہے۔

تب اگر ن پر تاگے کا تناؤ ت اور جھلی کا تناؤ ة ہو تو مساواتیں

$$\text{مف ت} + \text{و مف س} \times \text{جب ف} = ۰،$$

$$\frac{\text{ت مف ن}}{\text{ر}} = \text{ة مف س} + \text{و مف س} \times \text{جم ف}$$

حاصل ہوتی ہیں جہاں نقطہ ن پر تاگے کا نصف قطر انحنا ر ہے۔

پس $\frac{\text{فرت}}{\text{فرما}} = -\text{و}، \quad \text{ت} = \text{و}(\text{ل} - \text{ما})$

اور ∴ $\frac{-\text{ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}}{(۱+\text{ع}^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{\text{و}(\text{ل}-\text{ما})}\left(\text{ة} + \frac{\text{و}}{(۱+\text{ع}^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\right)$ ۸۵

اس لئے $(\text{ل}-\text{ما})\frac{\text{فر}}{\text{فرما}}(۱+\text{ع}^۲)^{-\frac{۱}{۲}} - (۱+\text{ع}^۲)^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{\text{ة}}{\text{و}}$

پس $\frac{\text{ا}-\text{ما}}{\text{ما}\,\text{ا}+\text{۲ع}} = \frac{\text{ت ما}}{\text{و}} + \text{م}$

یہی شکل دفعہ ماسبق میں حاصل کی گئی ہے۔
اگر ہم یہ مان لیں کہ فہ = عہ جبکہ ما = ۰ اور فہ = بہ جبکہ ما = ا ب = م تو ہر مساوات کے دونا معلوم مستقلوں کی تعیین ہو جاتی ہے اور چونکہ ت = س اس لئے ہر مساوات سے ع کی قیمت ا کی رقوم میں وہی حاصل ہوتی ہے۔

۱۸۰۔ **صابون کے کروی بلبلے کی توانائی۔** صابون کے بلبلے کی توانائی وہ کام ہے جو اس کو پیدا کرنے میں ہوا۔ یہ کام دو حصوں پر مشتمل ہوگا ایک تو وہ کام جو جھلی کو ملکعے سے کھینچ لینے میں ہوا اور دوسرے وہ کام جو بلبلے کے اندر کی ہوا کو پچکانے میں ہوا۔

اگر سطحی تناؤ ت ہو تو اول الذکر حصہ ت س ہوگا (جہاں سطح کو س تعبیر کرتا ہے) کیونکہ ایک چھوٹے مستوی عنصر کی توانائی ت نف س ہے۔ دوسرے حصے کے لئے فرض کرو کہ اندرونی ہوا کا دباؤ د ہے جب نصف قطر ر اور کرہ ہوائی کا دباؤ Π ہے تو $\text{د} - \Pi = \frac{\text{۲ت}}{\text{ر}}$ اور اگر ہوا کی کمیت اتنی ہو کہ اس کا حجم دباؤ Π پر ح ہوتا ہے تو

$$\Pi\,\text{ح} = \tfrac{4}{3}\pi\,\text{ر}^3\,\text{د} = \text{د}\,\text{ح}' \qquad \text{(فرض کرو)}$$

اور دفعہ (۱۴۱) سے ہوا کو حجم ح سے حجم ح' میں پچکانے میں جو کام ہوتا ہے

$$\text{وہ} = \Pi\,\text{ح لوک}\,\frac{\text{ح}}{\text{ح}'} - \Pi\,(\text{ح} - \text{ح}')$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\,\text{ر}^3 \left\{ \left(\Pi + \frac{\text{۲ت}}{\text{ر}}\right) \text{لوک} \left(1 + \frac{\text{۲ت}}{\text{ر}\,\Pi}\right) - \frac{\text{۲ت}}{\text{ر}} \right\}$$

اگر ہم یہ مان لیں کہ بلبلے کے اندرونی و بیرونی دباؤں کا فرق بمقابلہ کرہ ہوائی کے دباؤ کے چھوٹا ہے تو $\frac{\text{ت}^2}{\text{ر}\,\Pi}$ کو ہم چھوٹا فرض کرسکتے ہیں اور اسلئے آخری جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{4}{3}\pi\,\text{ر}^3\left\{\left(\Pi+\frac{2\,\text{ت}}{\text{ر}}\right)\left(\frac{2\,\text{ت}}{\Pi\,\text{ر}}-\frac{2\,\text{ت}^2}{\Pi^2\,\text{ر}^2}\right)-\frac{2\,\text{ت}}{\text{ر}}\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\pi\,\text{ر}^3\times\frac{2\,\text{ت}^2}{\Pi\,\text{ر}^2}=\frac{2}{3}\,\frac{\text{ت}^2\,\text{س}}{\text{ر}\,\Pi}$$

پس ہوا کو پچکانے میں جو کام ہوا وہ اُس کام کے ساتھ ۲ ت : ۳ ر Π ۱۸٦
کی نسبت رکھیگا جو جھلی کو باہر کھینچ لینے میں ہوا۔

۱۸۱ — **مائع کی جھلیوں کی تشکلیں** – اگر جھلی کے دونوں رخوں پر ہوا کا دباؤ وہی ہو تو توازن کی شرط یہ ہو گی کہ

$$\frac{1}{\text{ر}_1}+\frac{1}{\text{ر}_2}=0$$

یا یہ کہ اوسط انحنا صفر ہے۔

یہ شرط زنجیرہ نما (Catenoid) اور مرغولہ نما (Helicoid) کی صورتوں میں پوری ہوتی ہے جو اس لئے مائع کی جھلیوں کی ممکنہ اشکال ہیں۔
کارٹیزی محددوں میں یہ مساوات دفعہ (۱۴۵) کے بموجب ہو جائیگی

$$\left\{1+\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^2\right\}\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}-2\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}+\left\{1+\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^2\right\}\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2}=0$$

بڑے بڑے علمائے ریاضی نے متعدد مقالوں میں اس مساوات پر بحث کی ہے چنانچہ اس مساوات کے چند مشہور خاص حل حاصل ہو چکے ہیں۔ مثلاً

$$\text{نو}^{\text{ی}}=\frac{\text{جم ما}}{\text{جم لا}}\quad\text{اور}\quad\text{جب ی}=\text{جبز لا جبز ما}$$

جن میں سے ہر ایک ایسی سطح ہے جس کا اوسط انحنا صفر ہے۔[1]

پلاٹیو (plateau) کی تصنیف

Sur les liquides Soumis aux seules forces moleculaires, 1873

میں علمار ریاضی نے اس مضمون پر جو تحقیقیں کی ہیں اُن کا شاندار تذکرہ کیا گیا ہے اور اس نے خود اپنے تجربات بھی اس کتاب میں درج کئے ہیں۔ ڈاربو Darbou کی کتاب *Theorie Generale des surfaces* کے حصہ اول باب سوم میں اقل سطحوں minima Surfaces کی پوری تفصیل موجود ہے یعنی ایسے سطحوں کی جو متذکرہ بالا شرط کو پوری کرتی ہیں۔

۱۸۲ — اگر جہلی کی شکل گردشی سطح کی ہو تو سطح کے محور کو محوری قرار دینے سے

$$\text{ر}^{2} = \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ف}(\text{ی})$$

اس صورت میں اوسط انحنا کے صفر ہونیکی شرط سے حاصل ہوگا

$$0 = \frac{1}{\text{نا}} + \frac{1}{\text{نا}} = \frac{-\dfrac{\text{فز}^{2}\text{ر}}{\text{فزی}^{2}}}{\left\{1 + \left(\dfrac{\text{فزر}}{\text{فزی}}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\text{ر}\left\{1 + \left(\dfrac{\text{فزر}}{\text{فزی}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

یا $\text{ر}\,\dfrac{\text{فز}^{2}\text{ر}}{\text{فزی}^{2}} = 1 + \left(\dfrac{\text{فزر}}{\text{فزی}}\right)^{2}$ ۱۸

تکمل سے

$$\frac{\text{فزی}}{\text{فزر}} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{ا}^{2}}} \quad \text{اور} \quad \therefore\ \text{ی} + \text{ب} = \text{ا}\ \text{لوک}\left(\text{ر} + \sqrt{\text{ر}^{2} - \text{ا}^{2}}\right)$$

یا $2\text{ر} = \text{و}^{\frac{\text{ی}+\text{ب}}{\text{ا}}} + \text{ا}^{2}\ \text{و}^{-\frac{\text{ی}+\text{ب}}{\text{ا}}}$

۱؎ Catalan, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1856.

فرض کرو کہ $و^{\frac{ب}{ا}} = ا\, و^{\frac{ف}{ا}}$ تو

$$۲\, ر = ا \left(و^{\frac{ی+ف}{ا}} + و^{-\frac{ی+ف}{ا}} \right)$$

جس سے ظاہر ہے کہ گردشی سطح کی شکل کی جھلی کی ممکنہ شکل صرف زنجیرہ نما ہے جبکہ دونوں رخوں پر دباؤ وہی ہو۔

۱۸۴ — اصول توانائی کی مدد سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے کیونکہ سطح

$$\int ۲\pi\, ا\, ف\, ر\, س$$

اس صورت میں اعظم یا اقل ہوگی اور احصائے تغیرات کی مدد سے اس سے جو تکوینی منحنی حاصل ہوگا وہ ایک زنجیرہ ہوگا جس کا مرتب گردش کا محور ہوگا۔ ٹاڈ ہنٹر کی کتاب (Researches in the Calculus of Variations) میں یہ بتایا گیا ہے کہ جب ایک خط مستقیم اور دو نقطے ایک ہی مستوی میں دئے جائیں تو ہمیشہ ایسے زنجیرہ کا کھینچنا ممکن نہیں جو ان نقاط میں سے گذرے اور جس کا مرتب یہ خط مستقیم ہو۔

یہ بھی دکھایا گیا ہے کہ چند شرائط کے تحت ایسے دو زنجیرے کھینچے جا سکتے ہیں اور یہ کہ ایک خاص صورت میں صرف ایک زنجیرہ ایسا کھینچا جا سکتا ہے۔ یہ دونوں زنجیرے جب موجود ہوں تو ایسی شکل کا جواب ہوتے ہیں جو ایک بند (بے سرا) ڈوری کو دو چکنی کھونٹیوں پر لٹکانے سے پیدا ہوتی ہے۔

جب اس قسم کے دو زنجیرے ہوں تو اوپر کے زنجیرہ کو مرتب کے گرد گھمانے سے جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ اقل ہوتی ہے لیکن نچلے زنجیرے کو گھمانے سے جس سطح کی تکوین ہوتی ہے وہ اقل نہیں ہوتی۔ جب صرف ایک زنجیرہ ہو تو سطح اقل نہیں ہوتی۔

پس اگر دو دائری تاروں سے ایک ایسا فریم بنایا جائے کہ ان تاروں کے مستوی ایک دوسرے کے متوازی اور انکے مرکزوں کو ملانے والے

خط پر عمود وار ہوں تو تاروں کو مائع کی جھلی سے ملانا ہمیشہ ممکن نہیں۔ بعض صورتوں میں دو میں سے ایک زنجیرہ نما سے تاروں کو ملانا ممکن ہے لیکن اوپر کے زنجیرہ کو گھمانے سے جو زنجیرہ نما پیدا ہوتا ہے اُس کی صورت میں توازن قائم ہوگا اور دوسرے زنجیرہ نما کی صورت میں غیر قائم۔ (۱۸۸)

جب صرف ایک زنجیرہ نما ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔

اس مسئلہ کا ایک غیر مسلسل حل بھی ہے جس میں دو دائروں کو ان نقطوں کے معینوں کو گھمانے سے حاصل کیا جاتا ہے اور ان کے مرکز ایک لا انتہا سبک اسطوانے سے ملائے جاتے ہیں۔

انسائیکلو پیڈیا برٹانیکا[1] (Encyclopaedia Britanica میں کلرک میاکسویل Clerk Maxwell; نے قوت شعری پر ایک مضمون میں اس مسئلہ پر اس طرح روشنی ڈالی ہے۔

جب دو زنجیرے جن کا مرتب وہی ہو دو دئے ہوئے نقطوں میں سے کھینچے جا سکیں اور مرتب کے گرد ان کو گھمانے سے دو زنجیرہ نما حاصل کئے جائیں تو ہر زنجیرہ نما کا اوسط انحنا صفر ہوتا ہے۔

اگر ان دو زنجیروں کے درمیان ایک دوسرا زنجیرہ انہی نقطوں میں سے گذرتا ہوا کھینچا جائے تو اس کا مرتب اُن دونوں کے مرتب کے اوپر ہوگا اور اسلئے کسی نقطہ پر اس کا نصف قطر انحنا اُس فاصلے سے کم ہوگا جو عاد کی سمت میں اس نقطہ اور پہلے مرتب کے درمیان ہے۔

اس لئے گردشی سطح کا اوسط انحنا محور کیطرف محدب ہوگا اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان میں سے کسی زنجیرہ نما کو دونوں زنجیرہ نماؤں کے درمیان کے کسی زنجیرہ نما پر ہٹا دیا جائے تو جھلی محور سے ہٹ جائیگی۔

پھر اگر ایک زنجیرہ نما دونوں زنجیرہ نماؤں کے باہر لیا جائے تو اس کا اوسط انحنا محور کی طرف مقعر ہوگا اور اس لئے اگر اوپر کا زنجیرہ نما اوپر وار ہٹایا

[1] انسائیکلو پیڈیا کی گیارہویں اشاعت میں لارڈ ریلے نے اس مضمون کی نظر ثانی کی ہے۔

جائے اور نچلا نیچے وار تو ہر صورت میں جھلی محور کیطرف حرکت کریگی۔

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بیرونی جانب کا زنجیرہ نما قائم ہے اور اندرونی جانب کا غیر قائم ۔

یہ استدلال کسی دوسری طرح کے ہٹاؤ پر صادق نہیں آتا اور اسلئے قائمیت کے مکمل ثبوت کے لئے احصائے تغیرات کے طریقوں سے مدد لینا ضروری ہے ۔

۴ ۱۸ ـ اگر جھلی کے دونوں جانب دباؤ مختلف ہوں اور ان کا فرق د ہو تو توازن کی شرط ہوگی

$$\frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{د}}{\text{ت}}$$

یا یہ کہ اوسط انحنا مستقل ہوگا۔

گردشی سطحوں کی صورت میں اس ربط کو ثابت کرنے کے لئے ہم اصول توانائی کا استعمال کرینگے ۔

د کا مستقل ہونا اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ سرے بند کر دیے گئے ہیں اور اندرونی ہوا کا حجم مستقل ہے ۔

اس طرح جملہ

$$\int \left(2\pi\, \text{ما}\, \text{فرس} + \text{لہ}\, \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا} \right)$$

کا تغیر صفر ہوگا۔

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{م}}{\text{ما}} - \frac{\text{لہ}\,\text{ما}}{2} \quad \text{اور} \quad \therefore \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2} = \left(-\frac{\text{م}}{\text{ما}^2} - \frac{\text{لہ}}{2} \right) \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$

پس اگر ن گ عماد ہو تو

$$\frac{1}{\text{ن گ}} \pm \frac{1}{\text{ر}} = -\text{لہ}، \text{کیونکہ} \quad \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2} = \mp \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$

بوجب اس کے کہ منحنی محور لا کی طرف محدب یا مقعر ہے، یعنی اوسط انحنا مستقل ہے۔ عام صورت میں ہمیں یہ شرط بیان کرنی پڑیگی کہ دئے ہوئے حجم کے لئے سطح اعظم ہے یا اقل؛ اس سے وہی عام نتیجہ مستنبط ہوگا۔[1]

۱۸۵ — اگر جہلی گردشی سطح کی شکل کی ہو تو ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نصف النہاری منحنی ایک ایسی مخروطی کے ماسکہ کا طریق ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر لڑک رہی ہو۔

اگر مخروطی کا نصف قطر انحنا اور ماسکہ س کے طریق کا نصف قطر انحنا ر ہو تو

$$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{1}{\text{س ن}} - \frac{\text{۲ جم س ن گ}}{\text{س ن}^{2}}$$ [2] (شکل دیکھو اگلے صفحہ پر)

$$= \frac{1}{\text{س ن}} - \frac{\text{ن گ}^{2}}{\text{ن ل} \times \text{س ن}^{2}}$$ ، کیونکہ گ ل، س ن پر عمود وار ہے

$$= \frac{1}{\text{س ن}} - \frac{\text{ن ل}}{\text{س ما}^{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{س ن}} = \frac{2}{\text{س ن}} - \frac{\text{ن ل}}{\text{س ما}^{2}}$$

مکافی کی صورت میں یہ صفر ہو جاتا ہے اور اسلئے $\text{ر} = -\,\text{س ن}$۔

ناقص کے لئے $\dfrac{\text{س ما}^{2}}{\text{س ن}^{2}} = \dfrac{\text{ب ج}^{2}}{\text{س ن} \times \text{ھ ن}}$

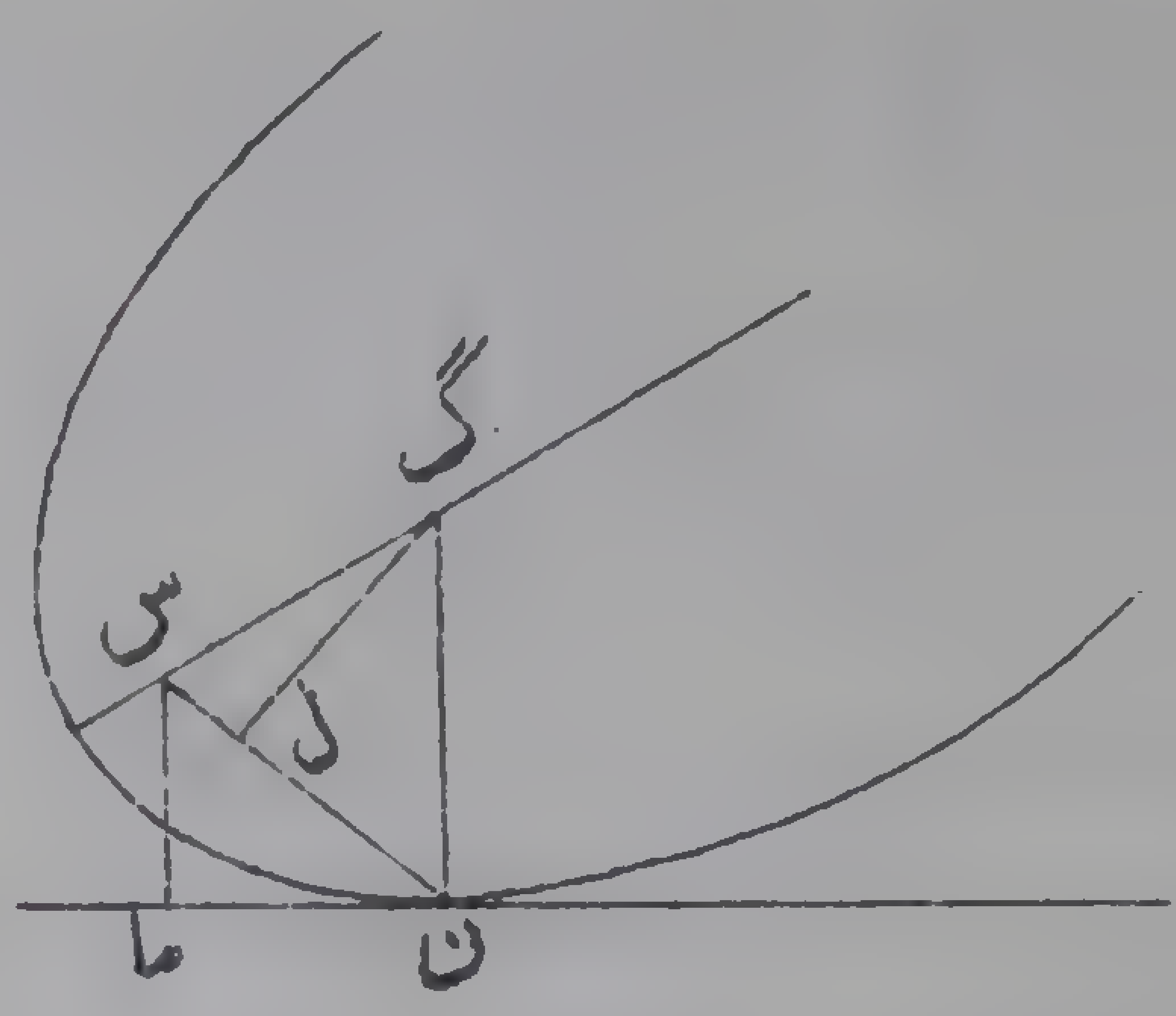
جہاں ھ دوسرا ماسکہ ہے اور اس لئے $\dfrac{1}{\text{ر}} + \dfrac{1}{\text{س ن}} = \dfrac{1}{\text{ا ج}}$

اور زائد کے لئے $\dfrac{1}{\text{ر}} + \dfrac{1}{\text{س ن}} = -\dfrac{1}{\text{ا ج}}$

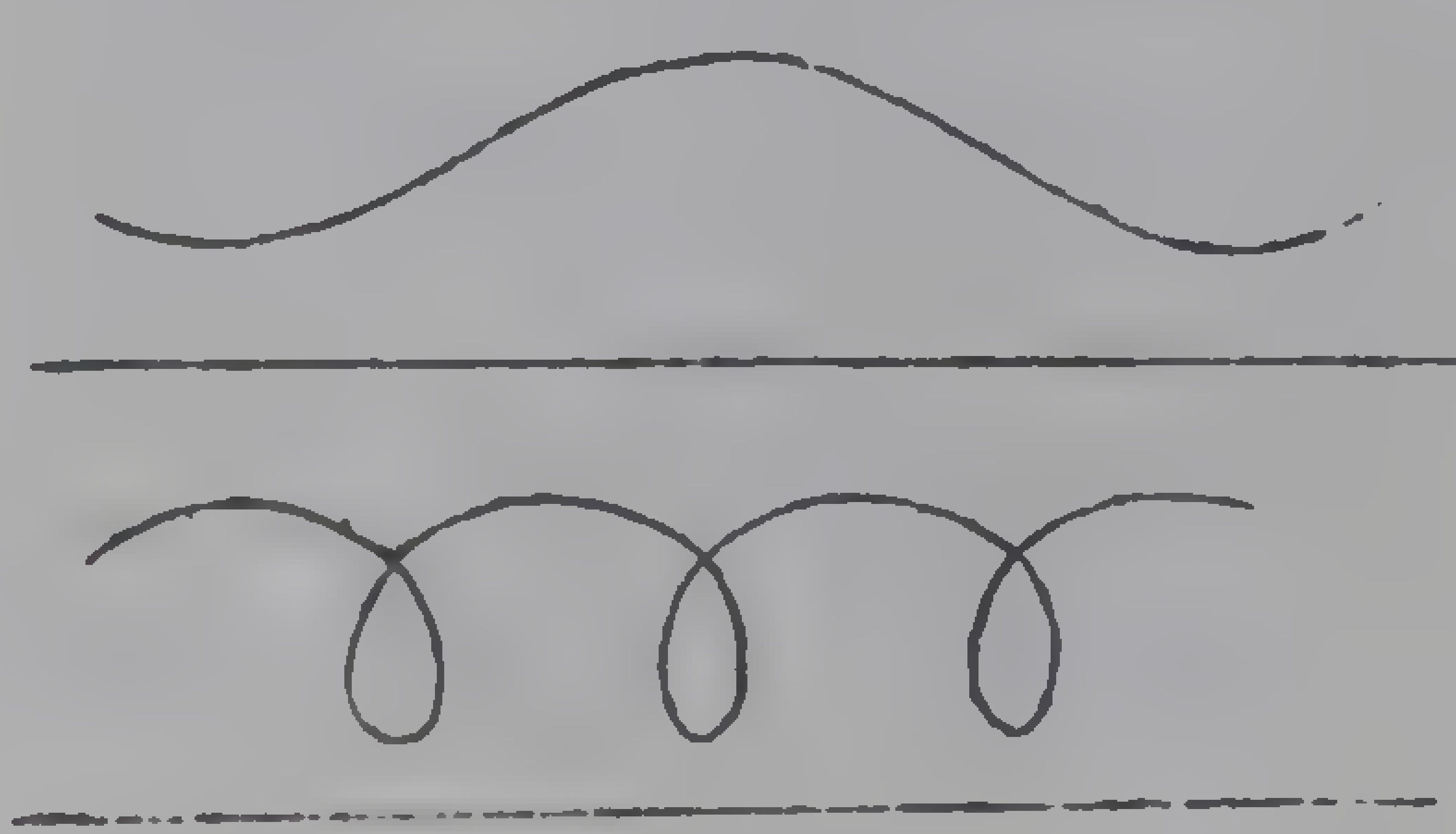
---

[1] دیکھو جیلیٹ کا (Calculus of Variations,) یا ٹاڈ ہنٹر کا تکملی احصا۔

[2] دیکھو Roulettes and Glissettes



پہلا زنجیرہ نما (Catenoid) ہے۔ دوسرے اور تیسرے کو پلاٹیو (Plateau.) نے موج نما (Unduloid) اور عقدہ نما (Nodoid) کہا ہے کیونکہ اول الذکر سے ایک لہریلا منحنی اور موخرالذکر سے عقدوں کا ایک تواتر تعبیر ہوتا ہے۔



عقدہ نما (Nodoid) کی تکوین کا اچھا اندازہ کرنے کیلئے یہ تصور کرنا ہوگا کہ جیسے زائد کی ایک شاخ لڑکتی جاتی ہے نقطہ تماس لامتناہی فاصلے پر چلا جاتا ہے تب خط مستقیم دونوں شاخوں کا متقارب بن جاتا ہے اور دوسری شاخ لڑکنا شروع کرتی ہے اسطرح شکل میں مکمل تسلسل پیدا ہوتا ہے[۵]

[۵] دیکھو Plateau, نیز Delaunay کا مضمون Liouville's Journal میں۔ Vol. I. p. 136. - میں Bulletins de l'Academie Belgique, 1857. کا مضمون Lamarle.

مائع کی جھلیوں کے مضمون پر مختلف تصانیف و مقالوں کا مکمل تذکرہ پلاٹیو (Plateau) کی تصنیف اور (Encyclopaedia Britanica) میں پروفیسر کلرک میاکسویل کے مضمون میں ملے گا۔ اور قوت شعری کے مضمون پر عموماً حسب ذیل کتابیں مفید ثابت ہونگی (191

Mathieu, *Theorie de la Capillarite*, 1883.

F. Neumann, *Vorlesungen uber der Theorie der Capillaritat*, 1894.

Poincaré, *Capillarite*, 1895.

The articles *Kapillaritat* by H. Minkowski in *Encyklop der Math. Wissensch.* Bd. v. 1907, and by F. Pockels in Winkelmann's *Handbuch der Physik*, Bd. I. 1908, both of which contain a full bibliography of the subject.

مثال — ایک صابونی بلبلہ اپنے ثابت حدود سے بڑھتا ہے اس طرح کہ ان حدود کے ساتھ اس سے ایک بند فضا پیدا ہوتی ہے جس کا حجم ح ہے اس میں گیس دباؤ د پر ہے جس کی تپش مطلق ط ہے۔ گیس کی تپش میں بتدریج اضافہ کیا گیا ہے۔ اگر جھلی کا رقبہ ا ہو جبکہ تپش ط اور دباؤ د ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ت}\,\text{ط}\,\frac{\text{فر}\,\text{ا}}{\text{فر}\,\text{ط}} = \text{د}\,\text{ح}\left(1 - \frac{\text{ط}}{\text{د}}\,\frac{\text{فر}\,\text{د}}{\text{فر}\,\text{ط}}\right)$$

جہاں سطحی تناؤ ت کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے اور بیرونی دباؤ نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

د اور ط میں ربط حاصل کرو جبکہ بلبلہ کروی شکل کا ہو۔

$$\text{توانائی کا تغیر} = \text{ت}\ \text{مف}\ \text{ا}$$

$$= \text{د}\ \text{مف}\ \text{ح}$$

لیکن د ح = کہ ط ، جہاں کہ مستقل ہے

∴ د مف ح = کہ مف ط − ح مف د

∴ ت (فرا / فرط) = کہ − ح (فرد / فرط)

= کہ (۱ − (ط / د) (فرد / فرط))

= (د ح / ط) (۱ − (ط / د) (فرد / فرط))

کرہ کے لئے ا = ۴ π ر² اور د = ۲ت / ر

∴ ا = ۱۶ π ت² / د²

پس مساوات بالا سے

− ۳۲ π (ت³ / د³) (فرد / فرط) = کہ (۱ − (ط / د) (فرد / فرط))

∴ − ۲ (ات / د) (فرد / فرط) = کہ (۱ − (ط / د) (فرد / فرط))

لیکن د ح = کہ ط

∴ ۱/۳ در ا = کہ ط یا ۲/۳ ت ا = کہ ط

∴ − (۳کہ ط / د) (فرد / فرط) = کہ − (کہ ط / د) (فرد / فرط)

∴ (۲ط / د) (فرد / فرط) + ۱ = ۰

∴ د² ط = مستقل

امثلہ

(92

۱ —— دو کروی صابونی بلبلے ایک پانی سے اور دوسرا پانی اور الکحل کے آمیزے سے

اُٹھائے گئے ہیں۔ اگر تناؤ فی خطی انچ علی الترتیب ایک گرین اور $\frac{۵}{۱۲}$ گرین کے اوزان کے مساوی ہوں اور نصف قطر $\frac{۵}{۹}$ انچ اور $\frac{۱}{۴}$ ۱ انچ ہوں تو دونوں صورتوں میں کل اندرونی دباؤ کا کل بیرونی دباؤ پر جو اضافہ ہوا ان کا مقابلہ کرو۔

۲ــــ اگر ر اور رَ نصف قطر کے دو صابونی بلبلے ایک ہی مائع سے اُٹھائے جائیں اور دونوں مکر س نصف قطر کا ایک بلبلہ بن جائیں تو ثابت کرو کہ تناؤ

$$\frac{\text{آآ}}{۲} \times \frac{\text{س}^۳ - \text{ر}^۳ - \text{رَ}^۳}{\text{ر}^۲ + \text{رَ}^۲ - \text{س}^۲}$$

کے مساوی ہے جہاں آآ کرۂ ہوائی کا دباؤ ہے۔

۳ــــ پانی اور ہوا کی سطح فاصل کا سطحی تناؤ ۲۵ و ۸ ، پانی اور پارہ کی سطح فاصل کا ۲۴ و ۲ ، اور پارہ اور ہوا کی سطح فاصل کا ۵۵ ہے۔ پارہ کی سطح پر پانی کا قطرہ رکھنے سے کیا اثر ظہور پذیر ہوگا۔

۴ــــ تیل کے ایک قطرہ کو پانی کی سطح پر رکھتے ہی وہ فوراً انتہائی رقیق پرت میں پھیل جاتا ہے تیل کے اس پھیلاؤ کے سبب کی تشریح کرو۔ اور مظہر کے مشاہدے سے ثابت کرو کہ پرت کی موٹائی ۱ ۰۰۰۰ و انچ سے کم ہو سکتی ہے۔

تیل کا دوسرا قطرہ سطح پر ڈال دینے سے کیا بات واقع ہوگی۔

۵ــــ اگر ایک ہلکا تاگا جسکے سرے ایک دوسرے سے باندھ دئے گئے ہیں مائع کی جھلی کے اندرونی حدود کا ایک جزو ہو تو ثابت کرو کہ تاگے کے ہر نقطہ پر انحنا مستقل ہوگا۔

اگر تاگا وزنی ہو اور جھلی ایک انتصابی محور کے گرد گردشی سطح ہو تو ثابت کرو کہ حل توازن میں تاگے کا تناؤ ہوگا

$$\frac{\text{ل}}{۲\pi}\sqrt{\text{ت}^۲ - \text{و}^۲}$$

جہاں اس کا طول ل ، اس کا وزن فی اکائی طول و اور جھلی کا تناؤ ت ہے۔

۶ــــ صابون آمیز پانی جیسے ذخیرے سے مائع کی ایک مستوی جھلی اُٹھائی گئی ہے ثابت کرو کہ توانائی (ع) فی اکائی رقبہ کی عددی قیمت ، تناؤ (ت) فی اکائی

طول کی عددی قیمت کے مساوی ہے۔

اگر جھلی ذخیرہ سے علیحدہ کردی جائے اور اگر ٹ سے کمیت فی اکائی رقبہ تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ت = ع - ٹ \frac{فر ع}{فر ٹ} \quad \text{،} \quad \text{(کلرک میاکسویل)}$$

۷۔۔۔ متعدد صابونی بلبلے ایک ہی مائع سے اُٹھائے گئے ہیں اور پھر ان کو ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے ایسی مساوات معلوم کرو جس سے حاصل شدہ بلبلے کا نصف قطر معلوم ہو سکے۔ اور ثابت کرو کہ سطح کا گھٹاؤ حجم کے اضافے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔

۸۔۔۔ پانی کا سطحی تناؤ جبکہ اس کے اوپر ہوا ہو ایسا ہے کہ ایک انچ پر کا زور تقریباً ۴ء۴۳ گرین وزن کے مساوی ہے۔ اگر .... ۱ کروی قطروں کے ملنے سے بارش کا ایک قطرہ $\frac{1}{10}$ انچ قطر کا بنے تو ثابت کرو کہ سطحی تناؤں کا کام تقریباً ۰۰۰۱۲۷ء۰ فٹ پونڈ کے مساوی ہے۔

۹۔۔۔ اگر ایک جھلی اندرونی وبیرونی غیر مساوی دباؤں کے زیر اثر ایک گردشی سطح بنائے تو ثابت کرو کہ نقطہ ن پر کے مماسی مستوی کا محور کے ساتھ میلان فہ اس مساوات

$$جم\, فہ = \frac{لا}{ا} + \frac{ب}{لا}$$

سے حاصل ہوگا جہاں نقطہ ن سے محور پر کا عمود لا ہے اور ا، ب مستقل ہیں۔

۱۰۔۔۔ مائع کے ایک قطرہ کا سطحی تناؤ یکساں ہے اسے ایک محور کے گرد گھمایا گیا ہے ثابت کرو کہ سطح کا نصف النہاری منحنی، منحنی

$$\frac{ع^2}{م^2} = \frac{ا^2}{ر} - 1$$

کے قطب کا گردونیہ (Roulette) ہوگا۔

۱۱۔۔۔ دو صابونی بلبلے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر بیرونی سطحوں کے نصف قطر $ر_1$، $ر_2$ ہوں اور اس دائرہ کا نصف قطر ر ہو جس میں تینوں سطحیں قطع کرتی ہیں تو

$$\frac{3}{4ر^2} = \frac{1}{ر_1^2} + \frac{1}{ر_2^2} - \frac{1}{ر_1 ر_2}$$

۱۲ـــ باریک سیدھے تار کا ایک فریم ذوار بعۃ السطوح یا چار سطحی کی شکل کا ہے اس کو صابون اور پانی کے محلول میں داخل کر کے اوپر کھینچ لیا گیا ہے جس سے بعض صورتوں میں مستوی جھلیاں پیدا ہوتی ہیں جن کی ابتدا کناروں سے ہوتی ہے اور جو ایک نقطہ پر آکر ملتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ہر چار سطحی کے لئے توازن کی یہ شکل ممکن نہیں ہے اور یہ کہ یہ اس وقت ممکن ہے جبکہ ایک رخ متساوی الاضلاع مثلث اور دوسرے رخ متساوی الساقین مثلثات ہوں جن کے زوایا راس میں سے ہر ایک قط$^{-1}$ (- ۳) سے کم ہو۔

۱۳ـــ شیشے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان بہت ہی کم فاصلہ د ہے۔ انکے درمیان پانی داخل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کی طرف ایسی قوت سے کھینچ آئیں گی جو

$$\frac{۲\ ا\ ت\ جم\ ع}{د} + ب\ ت\ جب\ ع$$

کے مساوی ہے۔ جہاں جھلی کا رقبہ ا اور اس کا گھیرا ب ہے۔

۱۴ـــ شیشے کا ایک کھوکھلا قائم مستدیر مخروط متجانس مائع میں رکھا گیا ہے اسطور پر کہ ایک محور انتصابی اور راس اوپر وار ہے۔ مخروط میں کس بلندی تک مائع چڑھیگا۔ اندرونی مائع کی سطح کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔ اسطوانہ کی صورت میں نتائج اخذ کرو۔

۱۵ـــ ایک سوئی پانی پر تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کا محور پانی کی قدرتی ہموار سطح میں واقع ہے اگر فولاد کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے ۃ ہو اور قوت شعری کا زاویہ بہ ہو اور وہ زاویہ ۲ عہ ہو جو پانی کو مس کرنیوالی عمودی تراشش کی قوس محور کے محاذی بناتی ہے تو ثابت کرو کہ

$$(\pi\ ۃ - عہ)\ جب \frac{۱}{۲}\ (عہ - بہ) = جم\ عہ\ جم\ \frac{۱}{۲}\ (عہ + بہ)$$

۱۶ـــ ایک شعاری نلی گردشی سطح کی شکل کی ہے اس کو انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جزءً غرق کر دیا گیا ہے تکوینی منحنی کی مساوات معلوم کرو اگر مائع توازن میں رہے خواہ اس کا ارتفاع نلی میں کچھ ہی ہو۔

۱۷ — ایک صابونی بلبلہ کو ایک گیس کی کمیت ک سے بھر دیا گیا ہے جس کا دباؤ بحیثیت تپش پر م × (اس کی کثافت) ہے۔ بلبلہ کا نصف قطر ل ہوتا ہے جبکہ اس کو ہوا میں رکھدیا جائے اس کے بعد بار پیما کا ارتفاع بڑھتا ہے اور تپش غیر متغیر رہتی ہے ۔ ثابت کرو کہ بلبلہ کا نصف قطر بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے بموجب اس کے کہ جھلی کا تناؤ

$$\frac{۹}{۸}\ \frac{\text{م ک}}{\pi\ \text{ل}^{۲}}$$ سے زیادہ یا کم ہو ۔

۱۸ — ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{ما} = \text{لامس}\ (\text{ای} + \text{ب})$$

مائع کی جھلی کی ایک ممکن شکل کو تعبیر کرتی ہے جبکہ دونوں طرف دباؤ دہی ہو ۔

۱۹ — اگر دو سوئیاں جو پانی پر تیر رہی ہیں متشاکلاً ایک دوسرے کے متوازی رکھدی جائیں تو ثابت کرو کہ وہ بظاہر ایک دوسرے کی طرف کھنچ آئینگی اور یہ کہ یہ عملِ کشش سطحی تناؤ کی وجہ سے ہوگا۔

۲۰ — ایک چھوٹا مکعب مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ مکعب کی سطح کے ساتھ مائع کا زاویہ تماس منفرجہ ہے اور π − عہ کے مساوی ہے اور مکعب کا اوپر کا رخ افقی ہے ۔ اگر مائع کی کثافت ث اور مکعب کی ثہ ہو اور اگر سطحی تناؤ ج ث $\text{م}^{۲}$ ہو تو ثابت کرو کہ مکعب تیرے گا اگر

$$\frac{\text{ثہ}}{\text{ث}} < ۱ + ۴\ \frac{\text{م}^{۲}}{\text{۲ہ}}\ \text{جم عہ} + ۲\ \frac{\text{م}}{\text{ا}}\ \text{جب}\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\text{عہ}}{۲}\right)$$

۲۱ — ل نصف قطر کے دو دائری قرص اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مستوی ان کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر عمود ہیں۔ ان قرصوں کے محیطوں کو صابون کی ایک جھلی سے ملایا گیا ہے جس کے اندر اتنی کمیت کی ہوا ہے جتنی کہ اسی کرۂ ہوائی میں ج نصف قطر کے ایک کروی بلبلہ کو عین بھر سکتی ہے۔ اگر جھلی اسطوانہ کی شکل کی ہو جبکہ قرصوں کے درمیان فاصلہ ب ہو تو ثابت کرو کہ قرصوں کے درمیانی فاصلے کو ۲ ی تک گھٹانا ہوگا تاکہ جھلی کروی شکل اختیار کرے جہاں

$$\text{ی}\left(\text{۳ا}^{۲}+\text{۴ی}^{۲}\right)\Big|\,\text{۸ج}^{۲}-\text{۳اب}+\text{۴}\sqrt{\left\{\frac{\text{۶ا}^{۲}\text{ب}-\text{۸ج}^{۳}}{\text{ا}^{۲}+\text{ی}^{۲}}\right\}}$$

$$=\text{۶ا ب ج}^{۲}\left(\text{۲ا}-\text{ج}\right)$$

۲۲—تاروں کا ایک فریم ب ارتفاع کے منشور کی شکل کا ہے جس کے قاعدے ضلع ا کے متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔ اگر اس فریم کو صابون آمیز پانی میں ڈبو دیا جائے تو توازن کی حالت میں مستوی جھلیوں کی ترتیب کی تشریح کرو۔ مستوی جھلیوں کی صورت میں توازن کے امکان کے لئے ثابت کرو کہ ب، ا/ $\sqrt{\text{۶}}$ سے بڑا ہونا چاہیئے۔

۲۳—سیال کی ایک جھلی دو ایسے تاروں کو چپکی ہوئی ہے جن میں سے ہر ایک مرغولہ (Helix) کا ایک پھیر (Turn) ہے دونوں مرغولوں کے محور ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے گام (Steps) مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ جھلی کے توازن کی شرط پوری ہوگی اگر محور میں سے گذرنیوالی جھلی کی کسی تراش کی تفرقی مساوات

$$\text{فر}_{\text{ا}}=\frac{\text{ا فر}_{\text{ا}}}{\text{ا}}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۲}+\text{ا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}$$

کی شکل کی ہو جبکہ ۲ π عہ = ہر مرغولہ کا گام یعنی دو متصل چوڑیوں (Threads) کا درمیانی فاصلہ۔

۲۴—تار کے ایک مرغولہ کی گھائی ب ہے اور اس کا طول بمقابلہ اس کے قطر کے بہت بڑا ہے۔ اس کے محور کے سروں سے ایک لچکدار ڈوری (لچک کی قدر ع) باندھ دی گئی ہے تار کے ہر سرے کو نصف قطر کی سمت میں موڑ دیا گیا ہے تاکہ وہ محور سے جا ملے۔ ڈوری جب سیدھی ہوتی ہے تو چست لیکن بے تنی ہوئی ہوتی ہے اگر مرغولہ اور ڈوری کو صابون کے محلول میں ڈبو کر نکال لیا جائے تو ایک جھلی تار اور ڈوری سے چپکی ہوئی نکلتی ہے ثابت کرو کہ سروں کے نزدیک کے حصوں کے سوا ڈوری نصف قطر ر کے ایک مرغولہ میں کھنچ جاتی ہے جہاں ر مساوات

$$\left(\text{۱۶}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۲}\,\text{ت}^{۲}-\text{۴ب}^{۶}\,\pi^{۶}\,\text{ع}^{۲}\right)\text{ر}^{۲}+\text{۳۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۲}\,\text{ت ع ر}^{۳}$$

$$+\,۸\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}\,\text{ت}^{۲}\,\text{ر}^{۲} + ۸\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}\,\text{ت}\,\text{ع}\,\text{ر} + \text{ف}^{۶}\,\text{ت}^{۲} =$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں صابون کی جھلی (کے دونوں سطحوں) کا کل تناؤ فی اکائی طول ت سے تعبیر ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک مستوی تختی مائع میں جزءً غرق کر دی گئی ہے۔ مائع کی کثافت ث اور سطحی تناؤ ت ہے۔ مائع اور تختی کے مادے کے لئے قوت شعری کا زاویہ ب ہے اور تختی افق کے ساتھ زاویہ ع کا میلان رکھتی ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی ساکن سطح کے اوپر تختی کے دونوں رخوں پر مائع کے ارتفاعوں کا فرق ہے

$$۴\left\{\frac{\text{ت}}{\text{ج}\,\text{ث}}\right\}^{\frac{۱}{۲}} \text{جم}\,\frac{\pi - ۲\,\text{ب}}{۴}\ \text{جب}\,\frac{\pi - ۲\,\text{ع}}{۴}$$

۲۶ — ایک فریم ا ب ج د تین سیدھے تاروں ا ب، ب ج، ج د سے بنایا گیا ہے اور ان کو ایک مرغولہ د ا کی قوس سے ملا دیا گیا ہے مرغولہ کا زاویہ $\frac{\pi}{۴}$ ہے۔ مرغولہ کا محور ب ج ہے اور ا ب، ج د، طول ل کے نصف قطر ہیں۔ اگر فریم کو صابون کے محلول میں ڈبو دیا جائے تو ثابت کرو کہ ایک جھلی پیدا ہوگی جس کی سطحی توانائی ہوگی

$$\frac{\text{ت}\,\text{ل}^{۲}\,\text{ع}}{۲}\left\{\sqrt{۲} + \text{لوک}\,(\sqrt{۲} + ۱)\right\}$$

جہاں سطحی تناؤ ت ہے اور ا ب، ج د کے درمیان چھوٹا زاویہ ع ہے۔

۲۷ — کثافت ث اور سطحی تناؤ ت کا ایک سیال ل نصف قطر کی ایک شعاری نلی میں اوپر کھینچا گیا ہے جس کے ساتھ زاویہ تماس ع ہے۔ اگر ت = ج ث م² تو ثابت کرو کہ نلی کے محیط پر سیال جس ارتفاع تک چڑھ جاتا ہے وہ ہے

$$\frac{۲\,\text{م}^{۲}}{\text{ل}}\,\text{جم}\,\text{ع} + \frac{\text{ل}}{۳}\left(۲\,\text{قط}^{۳}\,\text{ع} - ۲\,\text{مس}^{۳}\,\text{ع} - ۳\,\text{مس}\,\text{ع}\right)$$

جہاں $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۲۸ — ہیئتی کثافت ث کے تجاذبی مائع کا حجم $\frac{۴}{۳}\,\pi\,\text{نق}^{۳}$، $\pi\pi$ دباؤ پر سکے

کرۂ ہوائی سے گھرا ہوا ہے ۔ اس کے اندر ایک ہم مرکز جوف ہے جو ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا حجم اس کرہ ہوائی کے دباؤ پر ۴/۳ π ل^۳ ہوتا ہے ۔ مائع کا سطحی تناؤ ت ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن کی صورت میں جوف کا نصف قطر لا مساوات

π (ل^۳/لا^۳ − ۱) = ۲ ت {۱/لا + ۱/(۳√(ک^۳ + لا^۳))} + ۴/۳ π ث^۲ {(ک^۳ + ۳ لا^۳)/(۳√(ک^۳ + لا^۳)) − ۳ لا^۲}

سے حاصل ہوگا ۔

۲۹ — اگر کثافت ث کے مائع کی کچھ کمیت قوتوں کے ایک بقائی نظام کے زیر عمل توازن میں ہو جن کا قوہ کسی نقطہ پر مر ہے جہاں ر ایک ثابت نقطہ و سے فاصلہ ہے اور اگر شیشہ کی دو متوازی تختیاں جن کے نزدیک ترین رخوں کے درمیان بہت چھوٹا فاصلہ ۱/۲ ج ہے مائع میں و کے متقابل جانبوں میں رکھدی جائیں اور اگر ان تختیوں میں و کے مقابل چھوٹے سوراخ ہوں جن میں سے مائع بہہ کر جا سکتا ہے تو ثابت کرو کہ ا، ب جو ہر دو تختیوں کے بھیگے ہوئے دائری رقبوں کے اندرونی و بیرونی نصف قطر ہیں مساوات

م ج ث (۱/ا − ۱/ب) = س جم ع

سے مربوط ہونگے ۔ جہاں ع وہ زاویہ ہے جو ماہوائی سطح شیشے کے ساتھ بناتی ہے اور س شعاری مستقل ہے ۔

۳۰ — شیشے کی ایک بڑی تختی ایک مائع کی سطح سے اٹھائی گئی ہے اس طرح مائع ف ارتفاع تک اوپر کھینچ آتا ہے اور تختی کی نچلی سطح کے ساتھ زاویہ تماس کا متمم بہ ہے ثابت کرو کہ مائع سے بھیگے ہوئے دائری حصہ کا نصف قطر تقریباً

۱/۲ ب^۲ (۱ − جم^۲ ۱/۲ بہ) / (ف^۲ − ب^۲ جب^۲ ۱/۲ بہ)

ہے ۔ جہاں ب^۲ = ۴ ت / ج ث ، سطحی تناؤ ت اور مائع کی کثافت ث ہے ۔

۳۱ — مائع کی ایک جھلی ایک گردشی سطح کی شکل میں لٹک رہی ہے اس کا محور انتصابی ہے ۔ اس کی اوپر کی حد یا احاطہ ایک دائری تار ہے جو افقاً تھاما گیا ہے

اور نچلی حد ایک وزنی لچکدار تاگا ہے جو ر نصف قطر کے ایک افقی دائرہ کی شکل میں آزادانہ لٹک رہا ہے۔ تاگے کا قدرتی طول ۲ π ل اس کے لچک کی قدر لہ، اس کا وزن ۲ π ا و اور جھلی کا تناؤ ت ہے۔ ثابت کرو کہ ر مساوات

$$(\text{لہ}^2 - \text{ا}^2\,\text{ت}^2)\,\text{ر}^2 - 2\,\text{لہ}^2\,\text{ا}\,\text{ر} + (\text{ل}^2 + \text{و}^2\,\text{ل}^2)\,\text{ا}^2 = 0$$

کو پورا کرتا ہے۔

۳۲ — مائع کی ایک جھلی بیرونی طرف سے ایک ایسے بند استوار تار سے محدود ہے جس کے (تار کے) منحنی کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں، جھلی کی اندرونی حد ایک بند ملائم تاگا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر تاگے کا نصف قطر انحنا مستقل ہے اور یہ کہ مروڑ (Torsion) کا نصف قطر جھلی کے اس نقطہ پر کے کسی ایک صدری نصف قطر انحنا کے عدداً مساوی ہے۔

۳۳ — تار کے ایک دائرہ کو (نصف قطر ا) صابون آمیز پانی کی سطح میں رکھ کر آہستہ آہستہ اُٹھایا گیا ہے تاکہ اس کے ساتھ ایک جھلی اُٹھ آئے۔ اس کے وزن کو نظرانداز کرکے ثابت کرو کہ جھلی کی نصف النہاری تراش ایک زنجیرہ ہے۔ جھلی پانی کی ہموار سطح کو جس زاویہ پر ملتی ہے اس کو معلوم کرو۔ نیز ثابت کرو کہ نصف النہاری منحنی کا مبدل جبکہ جھلی کا رقبہ π ۴ ا² کے مساوی ہو ا/ی ہے جہاں ی

$$\text{جمز}^{-1}\,\text{ی} + \text{ی}\,(\text{ی}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \text{ی}^2$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۴ — شعاری نلی کا سرا جب پانی میں ڈبو دیا جاتا ہے تو پانی ف ارتفاع تک (۹۶
اس میں چڑھ جاتا ہے۔ نلی کو پانی سے ہٹا لیا جاتا ہے اور ر نصف قطر کا ایک قطرہ اس کے سرے پر نمودار ہوتا ہے اگر نلی میں ٹھہرے ہوئے پانی کا طول قطرہ کی تہ سے نلی کے اندرونی آبی ستون کی چوٹی تک فَ ہو تو ثابت کرو کہ سطحی تناؤ ضابطہ

$$2\,\text{ت}/\text{ج}\,\text{ث} = \text{ر}\,(\text{فَ} - \text{ف}) - \frac{1}{3}\,\text{ر}^2$$

سے حاصل ہوگا جہاں کثافت کو ث تعبیر کرتا ہے اور یہ مان لیا گیا ہے کہ قطرہ کروی ہے۔

۳۵ — دو دائری چھلے جن کا مشترک محور ان کے مستویوں پر علی القوائم ہے مائع کی ایک بند جھلی کو تھامی ہوئی ہیں۔ جھلی کی اندرونی ہوا بیرونی ہوا سے زیادہ دباؤ پر ہے۔ ثابت کرو کہ جھلی کے سرے نصف قطر ا = ۲ت/د کے کرے ہیں اور جھلیوں کی درمیانی سطح ایک گردشی سطح ہے جس کے نصف النہاری منحنی کی ذاتی مساوات

جب ق = لا/ا ± ب/لا ہے جہاں محور کے ساتھ عماد کا میلان ق ہے اور فاصلہ محور سے لا ہے۔

۳۶ — اگر مائع دو متوازی انتصابی تختیوں کے درمیان شعاری عمل سے اوپر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ساکن سطح کے اوپر آزاد سطح کے کسی نقطہ پر چڑھاؤ ف/طن ۲س/م ک ہے جہاں راس کا ارتفاع ف اور آزاد سطح کی قوس س ہے جو راس سے ناپی گئی ہے، سطحی تناؤ ت، ½ ج ث م۲ کے مساوی ہے اور مقیاس ک = م/(ف۲ + م۲)^½

۳۷ — ر نصف قطر کا ایک طویل مستدیر اسطوانہ مائع میں کلاً غرق ہے مائع کے ساتھ اس کا حادہ زاویہ تماس عہ ہے۔ اس کے محور کو افقاً رکھ کر اس کو بتدریج مائع سے نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ مائع کی ابتدائی اور انتہائی ہموار سطح کے اوپر ف ارتفاع تک جب اسطوانہ کا محور پہنچ جاتا ہے تو مائع کے ساتھ تماس ٹوٹ جاتا ہے جہاں ف مساواتوں

ف = ر جم (ق − عہ) + م جم ق/۲

ر/م جب (ق − عہ) + ۲ جب ق/۲ − مسز۱ جب ق/۲

= ۲ جب عہ/۴ − مسز۱ جب عہ/۴

سے حاصل ہوتا ہے اور سطحی تناؤ کو مائع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ½ ج م۲ ہے

۳۸ —— پانی کا ایک قطرہ شیشے کی ایک افقی تختی کی نچلی سطح سے لٹک رہا ہے اگر سطحی تناؤ کو پانی کے نوعی وزن کے ساتھ نسبت مہ ہو اور ع = ½ مہ (فرفہ/فرس)²
جہاں قطرہ کے نصف النہاری منحنی کی قوس س ہے اور فہ زاویہ ہے جو نصف النہاری منحنی کا مماس افق سے بناتا ہے تو ثابت کرو کہ

(جیب فہ + عَ)(۲ جیب فہ + ۳ عَ)² = ۲ ع مس فہ (قطفہ + مس فہ × عَ + عً)

(۲ + قط² فہ / قطفہ) + (۲ + قط² فہ / مس فہ) ع عَ + عً)

جہاں عَ = فرع/فرفہ ، عً = فر²ع/فرفہ² ، اگر مہ کا مربع نظرانداز کردیا جائے

تو ثابت کرو کہ نصف النہاری منحنی کے انحنا کا مربع ہے

مہ/۴ ولا لا^(۳/۱۶) ∫ ^(لاا) _(لا) (تولا فرلا) / ((۱ + ۱۶ لا)^(۳/۲) لا^(۳/۱۶))

جہاں لا = ۱/۱۶ مس⁴ فہ اور نقطہ انعطاف پر لا کی قیمت لا ہے۔

۳۹ —— زاویہ راس ۲ عہ کا ایک طویل خانہ پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا قاعدہ افقی اور اس کا اوپر کا کنارہ پانی کی قدرتی ہموار سطح میں ہے۔ اگر سروں پہ شعاری عمل نظرانداز کردیا جائے تو ثابت کرو کہ

و - وَ = ۲ ت قطعہ (جیب عہ + جم جہ)

جہاں خانہ کا وزن فی اکائی طول و، اس کے مساوی حجم کے پانی کا وزن وَ سطحی تناؤ ت اور قوت شعری کے زاویہ کا تکملہ جہ ہے۔

۴۰ —— ح حجم کے پارہ کا ایک قطرہ بغیر بیرونی قوتوں کے عمل کے شیشے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان دبایا گیا ہے۔ تختیوں کا درمیانی فاصلہ ف سطحی تناؤ (۱۹۲ ...)
ت، شیشے اور پارہ کے لئے زاویہ تماس نہ ہے۔ ثابت کرو کہ مطلوبہ دباؤ کی مقدار

۲ ح ت عہ مَ / (۱ - مَ)

ہے جہاں

ف = ۲ ع ر (طن^۲ مہ − م) فرع ، ح = ۴۲ ع ۲ ر (طن^۲ ع − م) طن^۲ ع فرع

اور م = △ (۴/۲) = حم مہ مم (نہ + حط مہ)[1]

جب تختیاں ایک دوسرے سے بہت نزدیک ہوں تو ثابت کرو کہ دباؤ پہلے تقرب تک

$$\frac{\text{۲ ح ت جم نہ}}{\text{ف}^{۲}}$$

ہے۔

۱۴ — سیال کا ایک قطرہ جو کسی قوتوں کے زیر عمل نہیں سوائے یکساں بیرونی دباؤ اور سطحی تناؤ کے، ایک استوار جسم کی طرح ایک محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ سطح پر ر^۳/ر۱ر۲ − ۱/ر۱ مستقل ہے جہاں ر۱، ر۲ سطح کے صدری قطر انحنا ہیں۔

۲۴ — جب محوری نیچے دار انتصابی ہو اور مبدا مناسب منتخب کیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ مہ۱، مہ۲ کثافتوں کے دو سیالوں کی سطح فاصل اس ربط

۲ ی = ا^۲ (۱/ر۱ + ۱/ر۲)

کو پورا کرتی ہے۔ جہاں انحنا کے صدری نصف قطر ر۱، ر۲ ہیں جن کو مثبت قرار دیا گیا ہے جبکہ تقعر نیچے دار ہو، ا^۲ = ۲ ت / {ج (مہ۱ − مہ۲)} اور درمیانی رخ کا شعاری مستقل ت ہے۔

اگر سطح محوری کے گرد گردشی سطح ہو تو ثابت کرو کہ محور کے نزدیک کے حصہ کی تقریبی مساوات (اسطوانی محددوں میں)

۲ (ی − یب) = یب ا^{−۲} ر^۲ + ۱/۸ (یب ا^۲ + ۲ یب^۳) ا^{−۶} ر^۴

کی شکل کی ہوگی اور بتاؤ کہ جب نلی میں مائع ہو تو ایسی صورت میں یب زاویہ تماس کی رقوم میں کس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

---

[1] (Amplitude.) Am. = حط ، Cotam. = حم

باب یازدہم

گھومنے والے مائع کا توازن جس کے ذرات ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں

۱۸۶ ـــــ اگر مائع کی کچھ کمیت جس کے ذرات ایک معین قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں یکساں رفتار سے ایک ثابت محور کے گرد گھومے تو آزاد سطح کی کسی خاص شکل کے لئے یہ قرین قیاس ہے کہ مائع کے ذرات اضافی توازن کی حالت اختیار کر سکتے ہیں۔ بہرکیف چونکہ کسی ذرہ پر کل کمیت کی حاصل کشش عام طور پر اس کی شکل پر منحصر ہوگی جو غیر معلوم ہے اس لئے اس مسئلہ کا مکمل حل حاصل نہیں کیا جاسکتا۔

کشش کے لئے کسی اختیاری طور پر مقرر کردہ قانون کی صورت میں یہ مسئلہ محض نظری دلچسپی کا باعث ہو سکتا ہے۔ لیکن جب یہ قانون تجاذب کا قانون ہو تو اس کی اہمیت بڑھ جاتی ہے کیونکہ طبیعی ہیئت کے ایک مسئلہ سے اس کا تعلق ہے۔

ہم سیال کو متجانس خیال کرینگے اور اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھیں گے۔ پہلی صورت میں تجاذبی قوتوں کا فاصلے کے متناسب ہونا اور دوسری صورت میں نیوٹن کے کلیہ کی پابندی کرنا فرض کرلیا جاتا ہے۔

۱۸۷ ـــــ متجانس مائع کی کچھ کمیت اپنی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ اس کے ذرات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ۔ آزاد سطح کی شکل متعین کرنا مطلوب ہے۔

کسی ذرہ پر کی حاصل کشش اس فاصلے کی سمت میں اور اس کے متناسب ہے

جو ذرہ اور کمیت کے مرکز کے درمیان ہے، اور اگر سیال کی کل کمیت کا ناپ مہ ہو تو نقطہ لا، ما، ی پر کے سیالی ذرہ پر حاصل کشش کے اجزاے ترکیبی محوروں کے متوازی، مہ لا، مہ ما، مہ ی سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔

مبدا کو مرکز ثقل پر لینے سے اور گردش کے محور کو محور ی قرار دینے سے توازن کی مساوات ہے

فر د = ث {(سہ^۲ لا - مہ لا) فر لا + (سہ^۲ ما - مہ ما) فر ما - مہ ی فر ی}

اور اس لئے

د = م + ½ ث {(سہ^۲ - مہ) (لا^۲ + ما^۲) - مہ ی^۲}

آزاد سطح پر د صفر یا مستقل ہے اور آزاد سطح کی مساوات ہے (۱۹۹)

(۱ - سہ^۲/مہ) (لا^۲ + ما^۲) + ی^۲ = ل

مستقل ل سیال کی کمیت پر اور سہ پر منحصر ہوگا۔

سہ جب بہت چھوٹا ہوتا ہے تو آزاد سطح تقریباً کروی ہوتی ہے اور جیسے سہ، صفر سے مہ تک بڑھتا ہے تو کروی سطح قطبین پر زیادہ تر چپٹی ہوتی جاتی ہے۔

جب سہ^۲ = مہ تو آزاد سطح دو مستویوں پر مشتمل ہوتی ہے اس کو ممکن بنانے کے لئے ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ سیال ایک اسطوانی سطح کے اندر ٹھیرا ہوا ہے جس کا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔

جب، سہ^۲ > مہ تو آزاد سطح زائد نما دو چادری ہوتی ہے جو سہ کی ایک خاص قیمت (سہ) کے لئے مخروط بن جاتی ہے اور سیال اس فضا کو پُر کرتا ہے جو مخروط اور اسطوانے کے درمیان ہے۔ سیال کے حجم کو محسوب کر کے ل = ۰ رکھنے سے سہ کی تعین ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں مبدا پر دباؤ معدوم ہو جاتا ہے۔

اگر سہ > سہ تو آزاد سطح زائد نما ایک چادری ہوتی ہے جو جیسے سہ بڑھتا ہے اسطوانہ کی شکل کے قریب آتی ہے اور اس لئے سہ کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ قیاس کرنا ضروری ہے کہ اسطوانہ جس کے اندر سیال ہے اپنے سروں پر بند ہے۔

اس دفعہ کے نتائج غیر متجانس سیال پر بھی صادق آتے ہیں خواہ متواتر طبقات میں کثافت کے تغیر کا قانون کچھ ہی ہو۔

۱۸۸ — متجانس مائع کی کچھ کمیت جس کے ذرات کلیہ نیوٹن کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں اضافی توازن کی حالت میں اپنی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ سطح کی ممکن شکل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

اس مسئلہ کا ٹھیک حل دریافت کرنا ممکن نہیں جس کی وجہ اوپر بتلا دی گئی ہے لیکن یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ چپٹا (Oblate) کرہ نما توازن کی ممکن شکل ہے۔

فرض کرو کہ کرہ نما کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} + \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{ج}^2(1+\text{ل}^2)} = 1$$

جہاں گروش کا محور محور ی ہے۔

تب نقطہ لا، ما، ی پر کے ذرہ پر مبدا کی سمت میں محاور کے متوازی حاصل کششیں بالترتیب

$$\text{لا} = \frac{2\pi\,\text{ث}\,\text{لا}}{\text{ل}^3}\left\{(1+\text{ل}^2)\,\text{مس}^{-1}\text{ل} - \text{ل}\right\}$$

$$\text{ما} = \frac{2\pi\,\text{ث}\,\text{ما}}{\text{ل}^3}\left\{(1+\text{ل}^2)\,\text{مس}^{-1}\text{ل} - \text{ل}\right\} \qquad (۱)$$

$$\text{ے} = \frac{4\pi\,\text{ث}\,\text{ی}}{\text{ل}^3}\left\{\text{ل} - \text{مس}^{-1}\text{ل}\right\}(1+\text{ل}^2)$$

سے تعبیر ہونگی۔[1]

[1] — لاپلاس کی (Mecanique Celeste)، پائسن کی (Mecanique)، ڈوہیل کی (mecanique) اور ٹاڈہنٹر کی سکونیات میں یہ جملے ملینگے۔ موخرالذکر کتاب میں کرہ نما کی مساوات $(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\,\text{د}^2 + \text{ی}^2/\text{د}^2(1-\text{ز}^2) = 1$ لیگئی ہے لیکن $1-\text{ز}^2 = 1/(1+\text{ل}^2)$ رکھنے سے مذکرہ بالا جملے حاصل ہوجاتے ہیں۔

توازن کی مساوات ہے

فرد = ث {(سہ۲ لا - لا) فرلا + (سہ۲ ا - ما) فرما - سے فری}

لیکن کرہ نما کی مساوات سے

لا فرلا + ما فرما + (۱ + لہ۲) ی فری = ۰

اور چونکہ اسکو مساوی دباؤ کی سطح ہونا چاہیئے اس لئے

سہ۲ - لا/لا = سہ۲ - ما/ما = - سے/(۱ + لہ۲) ی

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

سہ۲ / ۲ π ث = (۱ + لہ۲) مس‌تا-۱ لہ - لہ / لہ۲ - ۲ (لہ - مس‌تا-۱ لہ) / لہ۳

یا سہ۲ / ۲ π ث = (۳ + لہ۲) مس‌تا-۱ لہ - ۳ لہ / لہ۳ .... (عہ)

اگر سہ اور ث دئے جائیں تو اس مساوات سے لہ متعین ہو جاتا ہے اور پھر کرہ نما کے نیم محوروں کی باہمی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔

اصلی حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ما = (۳ + لا۲) مس‌تا-۱ لا - ۳ لا / لا۳ .... (بہ)

مس‌تا-۱ لا کی بجائے اس کے سلسلے کو مندرج کرنے سے جسے ہم جانتے ہیں کہ متدرق ہے جبکہ لا > ۱ حاصل ہوتا ہے

بقیہ نوٹ صفحہ (۳۰۷) لہ کے استمال سے غیر منطق مقداریں شامل نہیں ہوتیں۔ مماثل اشکال کیلون اور ٹیٹ (Natural Philosophy) کے دفعہ ۵۲۷ میں اور راؤتھ کی تحلیلی سکونیات حصہ دوم صفحہ ۲۱۹ میں مندرج ہیں۔

$$\text{ا} = \sum_{\text{ن}=۱}^{\infty} (-)^{\text{ن}-۱} \frac{۴\,\text{ن}}{(۲\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۳)}\, \text{لا}^{۲\text{ن}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{جہ})$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{(۷\text{لا}^۲+۹)}{\text{لا}^۳(\text{لا}^۲+۱)} - \frac{(\text{لا}^۲+۹)}{\text{لا}^۴}\,\text{مس}^{-۱}\text{لا}$$

$$= \frac{\text{لا}^۲+۹}{\text{لا}^۴}\left\{\frac{۷\text{لا}^۳+۹\text{لا}}{(\text{لا}^۲+۱)(\text{لا}^۲+۹)} - \text{مس}^{-۱}\text{لا}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{گہ})$$

$$= \frac{\text{لا}^۲+۹}{\text{لا}^۴}\,\text{ف}(\text{لا})$$

جہاں

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{۷\text{لا}^۳+۹\text{لا}}{(\text{لا}^۲+۱)(\text{لا}^۲+۹)} - \text{مس}^{-۱}\text{لا} \quad (۲۰۱)$$

اشکال (جہ) اور (بہ) سے ظاہر ہے کہ بالترتیب لا = ۰ اور لا = ∞ کے لئے ا معدوم ہو جاتا ہے۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ جیسے لا صفر سے بڑھتا ہے تو ما ایک اور صرف ایک قیمتِ اعظم اختیار کرتا ہے۔

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی علامت صرف ف (لا) کی علامت پر منحصر ہے،

نیز جب لا = ۰ تو ف (لا) = ۰

اور جب لا = ∞ تو ف (لا) = $-\frac{\pi}{۲}$

نیز ہمیں حاصل ہوتا ہے

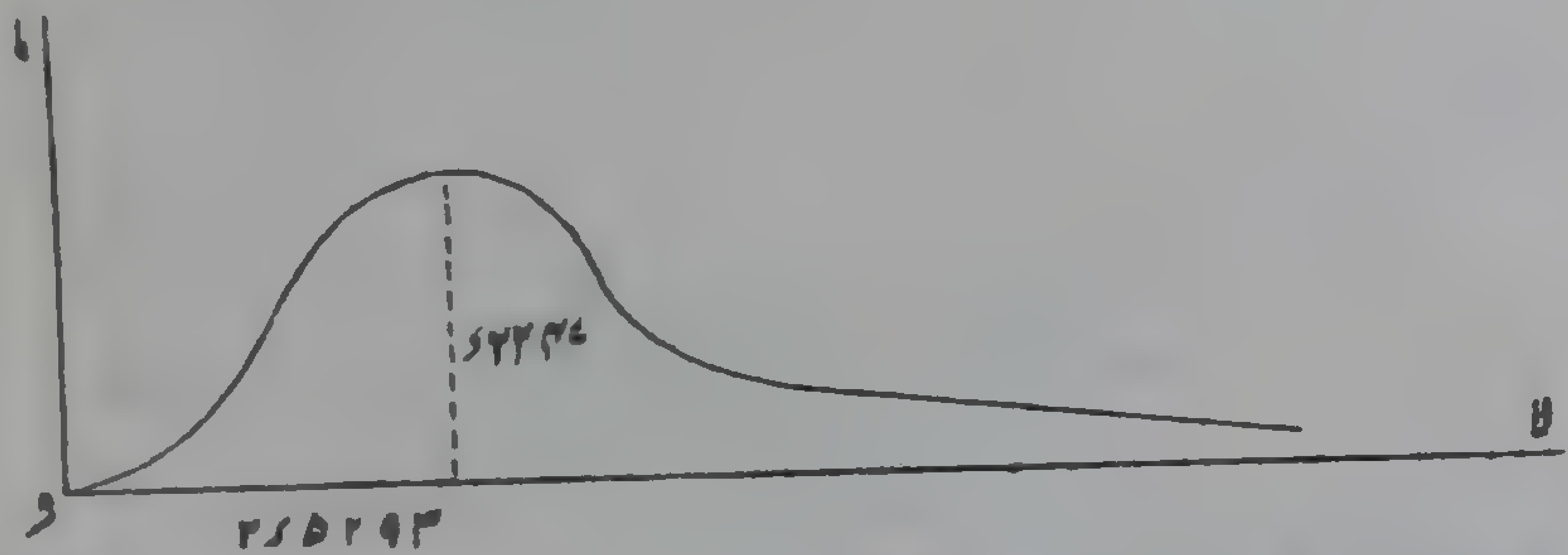
$$\text{ف}'(\text{لا}) = \frac{۸\,\text{لا}^۴(۳-\text{لا}^۲)}{(\text{لا}^۲+۱)^۲(\text{لا}^۲+۹)^۲}$$

اور یہ لا = ۰ سے لا = $\sqrt{۳}$ تک مثبت ہے اور اس سے بڑی لا کی تمام قیمتوں کے لئے منفی، پس ف (لا) مثبت ہونے سے ابتدا کرتا ہے اور اس وقت تک بڑھتا ہے جب تک لا، $\sqrt{۳}$ تک بڑھ جاتا ہے لیکن لا کی اس سے بڑی قیمتوں کیلئے ف (لا) مسلسل گھٹتا ہے۔ اس لئے ف (لا)، لا کی ایک ایسی قیمت کے

لئے معدوم ہوتا ہے جو ما ۳ سے بڑی ہے۔ جدولوں کی مدد سے ہم باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ ف (۲) مثبت ہے اور ف (۳) منفی، اس لئے مطلوبہ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔ نیز ف (۲٫۵) = ۰٫۰۲۵ تقریباً اور

نیوٹن کے طریقہ تقرب سے ۲٫۵ − ف (۲٫۵) / فَ (۲٫۵) = ۲٫۵ + ۰٫۰۲۹۳

= ۲٫۵۲۹۳……



پس فرما / فرلا صرف اس وقت معدوم ہوتا ہے جبکہ لا = ……۲٫۵۲۹۳ اور اس وقت ما اعظم ہے اور اس کی قیمت ٫۲۲۴۷ ہے۔

اس لئے مساوات (۲) کی ترسیم اس شکل کی ہوگی جو تصویر میں دکھائی گئی ہے لیکن اس میں معین کا پیمانہ فصلہ کے پیمانہ سے بڑا لیا گیا ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر سہ²/۲ π ث > ٫۲۲۴۷ تو جیبٹا کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔ لیکن اگر سہ²/۲ π ث < ٫۲۲۴۷ تو دو کرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ ٫۲۲۴۷ سے کم، معین کی ہر قیمت کے جواب میں فصلہ کی دو حقیقی قیمتیں $ل_۱$، $ل_۲$ حاصل ہوتی ہیں۔

۱۸۹ — کرہ نمائی اشکال کی ہلیلیجیت۔ جب ل کی دو حقیقی قیمتیں $ل_۱$، $ل_۲$ ہوں تو ایک ۲٫۵۲۹۳ سے بڑی اور دوسری اس سے کم ہوگی۔ فرض کرو کہ $ل_۲$ > $ل_۱$ تو جیسے سہ²/۲ π ث گھٹتا ہے $ل_۱$ گھٹتا ہے اور $ل_۲$ بڑھتا ہے (دیکھو شکل) (۲۰۲

اور چونکہ له > ۲٬۵۲۹۳، اس لئے $\sqrt{}$ ۱ + له۲ > ۲٬۷۲، لیکن نیم محوروں میں نسبت $\sqrt{}$ ۱ + له۲ : ۱ ہے اس لئے له کی بڑی قیمت ہمیشہ بہت زیادہ چپٹے کرہ نما کو تعبیر کرتی ہے اور سه۲/ ۲ π ث کو ہم جتنا زیادہ چھوٹا لیں وہ کرہ نما زیادہ تر چپٹا ہو جاتا ہے جو اصل له کے متناظر ہے۔

نیز سه۲/ ۲ π ث کی چھوٹی قیمتوں کے لئے اصل له چھوٹی ہوگی اور اگر صه کرہ نما کی بیضویت کو تعبیر کرے تو

م (۱ + صه) = م $\sqrt{}$ ۱ + له۲ اسطرح صه = ½ له۲ تقریباً اور اس لئے مساوات (جـ) سے

سه۲/ ۲ π ث = $\sum_{۱}^{\infty}$ (−)ن−۱ ۴ن / ((۲ن + ۱)(۲ن + ۳)) له۲ن = ۸ صه / ۱۵

صه کی پہلی قوت تک — یا

صه = ۱۵ سه۲/ ۱۶ π ث تقریباً[ل]

میکارن پہلا شخص تھا جس نے یہ ثابت کیا کہ متجانس سیال کی کمیت جبکہ وہ گھوم رہی ہو تو توازن کی ممکن شکل چپٹا کرہ نما ہوتی ہے اور اس لئے ان کرہ نماؤں کو عام طور پر میکلارن کے کرہ نما کہتے ہیں۔

۱۵۰ — ایسے سیال کی صورت میں اس مسئلہ کا استعمال جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے۔

اگر ہم فی الحال زمین کو ر نصف قطر کا ایک کرہ مانیں اور اس کی اوسط کثافت کو ث سے تعبیر کریں تو اس کی سطح پر کی کشش ۴/۳ π ث ر سے تعبیر ہوگی — اس سے قطب پر جاذبہ ارض کی قوت (ج) کی بھی پیمائش ہو جاتی ہے۔

[ل] ڈارون کی کتاب Scientific Papers جلد سوم کے صفحہ ۲۳۴ میں سه۲/ ۲ π ث کی قیمت بیضویت کی تیسری قوت تک حاصل کی گئی ہے۔

س۔گ۔س نظام کی اکائیوں میں ج = ۹۸۰ تقریباً اور ۲ π ر = ۴ × ۱۰^۹ سنتی میٹر۔
اس لئے ہیئتی اکائیوں میں

$$ث = ۳ج / ۴πر = ۳۶۷،۶۵ × ۱۰^{-۹}$$

اگر ہم کرہ نمائی شکل کے لئے سہ^۲/۲ π ث کو اس کی انتہائی قیمت ۲۲۴۷، کے مساوی لیں اور ث کی متذکرہ بالا قیمت کو استعمال کریں تو محوری گردش کا وقت ۲ π/سہ = ۲ گھنٹے ۲۵ منٹ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ قلیل ترین وقت ہے جس میں کچھ متجانس کمیت جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے یکساں رفتار سے ایک چپٹے کرہ نما کی شکل میں گھوم سکتی ہے۔

پھر اگر ہم سہ کی بجائے زمین کی زاوئی رفتار ۲π/(۳۶۰۰×۲۴) استعمال کریں تو (۲۰۰

$$\frac{سہ^۲}{۲πث} = \frac{۲π × ۱۰^۹}{۳۶۷،۶۵ × ۶۰^۴ × ۲۴^۲} = ۰۰۲۳، \text{ تقریباً}$$

جو انتہائی قیمت ۲۲۴۷، سے کم ہے اس کثافت اور اس زاوئی رفتار کے لئے دو کرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ لہ کی دو حقیقی قیمتیں ملتی ہیں جیسا کہ دفعہ (۱۸۸) میں واضح کر دیا گیا ہے۔ بڑی قیمت ایک بہت چپٹے کرہ نما کے متناظر ہے اور چھوٹی قیمت سے ایک ایسا کرہ نما حاصل ہوتا ہے جس کی ہلیلیجیت دفعہ (۱۸۹) کی رو سے ہے

$$\frac{۱۵سہ^۲}{۱۶πث} = \frac{۱۵}{۸} × ۰۰۲۳، = ۰۰۴۳، \text{ یا تقریباً } \frac{۱}{۲۳۲}$$

علم مساحت الارض سے ہم جانتے ہیں کہ زمین اپنی شکل میں ایک کرہ سے بہت ہی کم فرق رکھتی ہے کیونکہ اس کی ہلیلیجیت $\frac{۱}{۲۹۹،۱۵}$ ہے[1] یعنی کرہ نما

[1] دیکھو انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا میں (A. R. Clarke) اور (F. R. Helmert) کا مضمون (Figure of the Earth)۔

کے محوروں میں نسبت ۳۰۰٫۱۵ : ۲۹۹٫۱۵ ہے۔

اب یہ واقعہ کہ متجانس سیال کے ایک کرہ نما کے محور جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی اور جس کی گردش کا وقت زمین کی گردش کے وقت کے مساوی ہو ۲۳۳ : ۲۳۲ کی نسبت رکھتے ہیں یہ بتاتا ہے کہ یہ بالکل خارج از امکان ہے کہ زمین اپنے دور حیات میں کسی وقت ایک متجانس سیال کی کمیت تھی۔

۱۹۱ — لمبوترا کرہ نما ممکن شکل نہیں۔ یہ معلوم رہے کہ ہم نے اضافی توازن کی حالت میں گھومنے والے سیال کی شکل کے عام مسئلہ کو حل نہیں کیا ہے بلکہ صرف یہ دکھایا ہے کہ اگر سہ²/۲ π ث < ۲۲۴۷ء، تو چپٹے کرہ نما ممکن شکل ہے۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ نتیجہ سیال کی مقدار کمیت پر منحصر نہیں بلکہ صرف کثافت اور زاوئی رفتار پر منحصر ہے۔ اگر سہ²/۲ π ث > ۲۲۴۷ء، تو اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ توازن ناممکن ہے بلکہ صرف یہ کہ اس صورت میں چپٹے کرہ نما کی شکل ممکن نہیں ہے۔

اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ آیا لمبوترا کرہ نما ممکن شکل ہے یا نہیں ہم دفعہ (۱۸۸) میں ل² کی بجائے ـ ل'² لکھتے ہیں جہاں ل' ہونا چاہیئے < ۱۔ تب اُس دفعہ کی (عہ) اور (جہ) مساواتوں سے

$$\frac{\text{سہ}^{۲}}{۲\pi\,\text{ث}} = -\sum_{۱}^{\infty} \text{ل'}^{۲\text{ن}} \frac{۴\text{ن}}{(۲\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۳)}$$

جو ناممکن ہے کیونکہ مساوات کے طرفین مختلف العلامت ہیں۔ پس لمبوترا کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہوسکتا۔

۱۹۲ — پائنٹ نے (Tome II p. 547) یہ بتایا ہے کہ بیرونی قوتوں کے زیر عمل ساکن (۲۰۴
سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں اور ایسے سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں کے درمیان ضروری فرق ہوتا ہے جو اپنے ذرات کی ایک دوسرے کو جذب کرنے والی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے یا ان کے زیر عمل ثابت محور کے گرد یکساں رفتار سے

گھوم رہا ہے۔

فرض کرو کہ ا ب ج آزاد سطح اور د ع ف مساوی دباؤ کی کوئی سطح ہے تب پہلی صورت میں د ع ف کے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے اور ا ب ج اور د ع ف کے درمیانی سیال کے وجود سے غیر متاثر رہتی ہے۔ اس لئے اگر اس سیال کو نکال دیا جائے تو اُس سیال کے توازن پر کسی قسم کا اثر نہیں پڑیگا جو د ع ف سے محدود ہے۔ دوسری صورت میں د ع ف کے کسی نقطہ پر کی قوت اگرچہ کہ اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے لیکن د ع ف کے اندرونی سیال کی کمیت کی اور د ع ف اور ا ب ج کے درمیانی سیال کی کمیت کی کششوں کا حاصل ہے، حاصل قوت کے ان دو اجزا ترکیبی کا سطح کے عمود وار ہونا ضروری نہیں اور عام طور پر د ع ف کے بیرونی سیال کو بقیہ سیال کے توازن پر اثر ڈالے بغیر علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔

لیکن اگر سیال متجانس ہو اور ذرات کلیہ نیوٹن کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوں اس طرح کہ آزاد سطح کرہ نما ہو تو مساوی دباؤ کی سطحیں متشابہ کرہ نما ہونگی اور ایسی صورت میں چونکہ دو ہم مرکز متشابہ اور متشابہاً واقع ناقص نماؤں سے گھرے ہوئے ناقص نمائی خول کی حاصل کشش اس کے اندرونی نقطہ پر صفر ہوتی ہے اس لیئے ا ب ج اور د ع ف کے درمیانی سیال کو علیحدہ کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ گردش کی رفتار غیر متغیر رہے۔

مزید براں ہم نے دفعہ (۱۸۸) میں یہ دیکھا ہے کہ ω کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے جو ایک معینہ حد سے تجاوز نہیں کرتی دو کرہ نما اشکال ممکن ہیں۔ فرض کرو کہ آزاد سطح ا ب ج ان میں سے ایک شکل اختیار کرتی ہے۔ سیالی کمیت کے اندر ایک ہم مرکز کرہ نما گ ھ ک کھینچو جو دوسرے کرہ نما کے متشابہ ہو۔ تب ا ب ج اور گ ھ ک کے درمیانی سیال کو سیالی کمیت گ ھ ک پر کسی قسم کا اثر ڈالے بغیر علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔

سطح گ ھ ک کے نقطہ ن پر کے ذرہ پر خول کا عمل نقطہ ن پر سطح کے عمود وار نہیں ہے لیکن یہ عمل، کمیت گ ھ ک کی کشش اور مفروضہ قوت

سہ۲ ر کے ساتھ ملکر نقطہ ن پر اس کرہ نما کے عمود وار ہے جو نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور سطح ا ب ج کے ہم مرکز اور متشابہ ہے۔

دوسرے الفاظ میں سطح پر کے ایک ذرہ کا وزن اُس مساوی دباؤ کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اور کسی اندرونی ذرہ کی صورت میں اُس مساوی دباؤ کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے جو ذرہ میں سے گزرتی ہے۔

اسی طرح اگر آزاد سطح ا ب ج کی شکل ممکن اشکال میں سے ایک ہو تو ہم یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ مائع کا ایک ہم مرکز خول کمیت کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے جس کی بیرونی سطح اسی شکل کی ہے جیسے ا ب ج یا دوسری ممکن شکل کی سطح ہے۔

پہلی صورت میں ا ب ج مساوی دباؤ کی سطح بھی ہو گی لیکن دوسری صورت میں ا ب ج مساوی دباؤ کی سطح نہیں ہو گی۔ کیونکہ مساوی دباؤ کی نئی سطحیں بیرونی سطح کے متشابہ اور متشابہا واقع ہونگی۔

۱۹۳ــــ اگر سیال کی کچھ کمیت اپنے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد ایک ایسی زاویائی رفتار سے گھما دی جائے کہ سہ۲/۲ π ث کی قیمت دفعہ (۱۸۸) میں حاصل شدہ حد سے متجاوز کر جائے تو اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ سیال کرہ نما کی شکل میں متوازن نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ قیاس کیا جا سکتا ہے کہ کمیت اطراف میں بلحاظ محور کے پھیل جائیگی اور زیادہ چپٹی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ اس کی زاویائی رفتار اس قدر گھٹ جائے کہ کرہ نما شکل کا امکان ہو جائے۔

اگر کمیت سیال کامل پر مشتمل ہو تو اس کی شکل توازن کے کرہ نما شکل میں سے اہتزاز کریگی لیکن اگر جیسا کہ تمام معلومہ سیالوں کی صورت میں ہوتا ہے، ذرات کے اضافی ہٹاؤ سے رگڑ پیدا ہو تو اہتزازات بتدریج گھٹتے جائیں گے اور بالآخر توازن کا ایک محل رونما ہوگا۔ اب یہ اصول استعمال کر کے کہ کل نظام کا زاویائی معیار الحرکت بلحاظ محور کے مستقل رہیگا ہم انتہائی زاویائی رفتار اور اختیار کردہ انتہائی شکل معلوم کر سکتے ہیں۔

عام سوال پر بحث کرنے کے لئے فرض کرو کہ سیال کی کمیت کو کسی طرح حرکت دیدی گئی ہے اور پھر اسکو اپنی حالت پر چھوڑ دیا گیا ہے تو کمیت کا مرکز یا تو ساکن ہوگا یا یکساں

رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کریگا بس اُس حرکت جنف غور کرنا ہوگا جو کمیت کے مرکز کے لحاظ سے ہے۔

کمیت کے مرکز میں سے ایک ایسا مستوی کھینچو جس کی سمت میں زاوئی معیار حرکت اعظم ہے۔ تب یہ مستوی جسکو معیاری مستوی کہا جاسکتا ہے ثابت رہے گا خواہ حرکت مابعد میں سیال کے ذرات ایک دوسرے پر کسی طرح کا عمل کریں اور جب ذرات کی اضافی حرکت اُن کی باہمی رگڑ سے فنا ہو جائیگی تو اضافی توازن کی حالت میں اس مستوی پر کا عمود وار محور، سیال کی کمیت کا گردش کا محور رہو گا۔

(۲۰۶) فرض کرو کہ نظام کا دیا ہوا زاوئی معیار حرکت ھ ہے اور بالآخر اسکی زاوئی رفتار سہ ہے۔

توازن کے کرہ نما کے محوروں کو ج اور ج $\sqrt{\text{۱} + \text{ل}^2}$ سے اور کمیت کو ک سے تعبیر کریں تو زاوئی معیار حرکت کے لیے جملہ $\frac{\text{۲}}{\text{۵}}\,\text{ک ج}^2\,(\text{۱} + \text{ل}^2)\,\text{سہ}$ حاصل ہوگا۔

$$\therefore \quad \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\,\text{ک ج}^2\,(\text{۱} + \text{ل}^2)\,\text{سہ} = \text{ھ}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{۴}}{\text{۳}}\,\pi\,\text{ث ج}^3\,(\text{۱} + \text{ل}^2) = \text{ک}$$

ان دو مساواتوں اور مساوات

$$\frac{\text{سہ}^2}{\text{۲}\,\pi\,\text{ث}} = \frac{(\text{۳} + \text{ل}^2)\,\text{مس}^{-1}\,\text{ل} - \text{۳ل}}{\text{ل}^3} \quad \text{...... دفعہ (۱۸۸)}$$

سے ج، سہ، اور ل کی قیمتیں دریافت کیجا سکتی ہیں۔

پہلی دو مساواتوں سے

$$\frac{\text{سہ}^2}{\text{۲}\,\pi\,\text{ث}} = \frac{\text{۲۵ ھ}^2\left(\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\,\pi\,\text{ث}\right)^{\frac{1}{3}}}{\text{۶ ک}^{\frac{10}{3}}}\,(\text{۱} + \text{ل}^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \left\{\frac{(\text{۳} + \text{ل}^2)\,\text{مس}^{-1}\,\text{ل} - \text{۳ ل}}{\text{ل}^3}\right\}(\text{۱} + \text{ل}^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{\text{۲۵ ھ}^2}{\text{۶ ک}^3}\left(\frac{\text{۴}\,\pi\,\text{ث}}{\text{۳ ک}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

جس سے ل کی تعیین ہو جاتی ہے۔

اس مساوات کی ہمیشہ ایک اصل وجود رکھتی ہے کیونکہ داہنی طرف کا جملہ

لہ کے ساتھ صفر اور لا تناہی ہوتا ہے۔ اس لئے اس کو ایک ایسی قیمت اختیار کرنی چاہیئے جو، صفر اور ∞ کے درمیان لہ کی کسی خاص قیمت کے لئے، بائیں طرف کے مثبت مستقل کے مساوی ہو۔ مزید برآں یہ بتایا جا سکتا ہے کہ اس مساوات کی صرف ایک اصل مثبت ہے کیونکہ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ داہنی طرف کے جملہ کا مشتق ہمیشہ مثبت ہے۔ اس لئے ھ اور ک کو دی ہوئی مقداریں سمجھ کر ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک اور صرف ایک کرہ نما شکل ہوگی جس کی طرف اہتزاز کرنے والا سیال مسلسل مائل ہوتا جائیگا

یہ بحث لاپلاس کی کتاب Mecanique Celeste, Tome, II کے صفحہ ۱۶۱ میں پانٹی کولان کی Systeme du Monde, Tome II کے صفحہ ۴۰۹ میں اور ٹسرانڈ کی Mecanique Celeste Tome, II کے صفحہ ۹۶ میں مل سکیگی۔

۱۹۴ —— جیکوبی کا ناقص نما ــ جیکوبی نے یہ دریافت کیا کہ "تین غیر مساوی محوروں والا ناقص نما گھومنے والے مائع کی کمیت کے لئے اضافی توازن کی ممکن شکل ہے۔

جیکوبی کے مسئلہ کا حسب ذیل ثبوت (Liouville) کے ایک مضمون سے لیا گیا ہے جو Journal de l'Ecole Polytechnique, Tom, XIV میں شائع ہوا۔

گردش کے محور کو محور ی لیکر فرض کرو (اگر ممکن ہو) کہ مائع کی سطح اس شکل کی ہے جو مساوات

$$\frac{لا^2}{1+لہ^2} + \frac{ما^2}{1+لہ^2} + ی^2 = ج^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

تب اگر مائع کی کمیت ک ہو تو سطح کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کے فی وحدہ کمیت کی حاصل کششیں علی الترتیب { لا، ب ما، اور ج ی ہیں۔ جہاں ...(۲)

$$\text{ا} = \frac{\text{۳}\,\text{ک}}{\text{ج}^{\text{۳}}} \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{ع}^{\text{۲}}\,\text{فرع}}{(\text{۱} + \text{لہ}^{\text{۲}}\,\text{ع}^{\text{۲}})\,\text{ھ}}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{۳}\,\text{ک}}{\text{ج}^{\text{۳}}} \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{ع}^{\text{۲}}\,\text{فرع}}{(\text{۱} + \text{لَ}^{\text{۲}}\,\text{ع}^{\text{۲}})\,\text{ھ}}$$

$$\text{ج} = \frac{\text{۳}\,\text{ک}}{\text{ج}^{\text{۳}}} \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{ع}^{\text{۲}}\,\text{فرع}}{\text{ھ}}$$

جن میں ھ جملہ

$$\sqrt{(\text{۱} + \text{لہ}^{\text{۲}}\,\text{ع}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{لَ}^{\text{۲}}\,\text{ع}^{\text{۲}})}$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

$$(\text{ا لا} - \text{سہ}^{\text{۲}}\,\text{لا})\,\text{فرلا} + (\text{ب ما} - \text{سہ}^{\text{۲}}\,\text{ما})\,\text{فرما} + \text{ج ی فری} = \text{۰}$$

اور اسلئے اگر آزاد سطح ناقص نما (۱) ہو تو

$$(\text{ا} - \text{سہ}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{لہ}^{\text{۲}}) = (\text{ب} - \text{سہ}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{لَ}^{\text{۲}}) = \text{ج} \quad \ldots\ldots \quad (\text{۲})$$

سہ² کو ساقط کرنے سے

$$(\text{۱} + \text{لہ}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{لَ}^{\text{۲}})(\text{ا} - \text{ب}) = \text{ج}\,(\text{لَ}^{\text{۲}} - \text{لہ}^{\text{۲}})$$

اور ا، ب، ج کی قیمتیں اس میں مندرج کرنے سے یہ

$$(\text{۱} + \text{لہ}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{لَ}^{\text{۲}}) \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{(\text{لَ}^{\text{۲}} - \text{لہ}^{\text{۲}})\,\text{ع}^{\text{۴}}\,\text{فرع}}{\text{ھ}^{\text{۳}}} = (\text{لَ}^{\text{۲}} - \text{لہ}^{\text{۲}}) \int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{ع}^{\text{۲}}\,\text{فرع}}{\text{ھ}}$$

نوٹ متعلقہ صفحہ (۳۱۰) دیکھو *Mécanique Céleste*, Tome, II. ;

ڈُہمل (Duhamel) کی *Cours de Mecanique*

یا منچن (Minchin) کی *Statics*, Vol. II, p. 306.

میں تحویل ہو جاتا ہے۔

حل لہَ = لہ کو جس سے چپٹا کرہ نما حاصل ہوتا ہے مسترد کر کے ارقام کو داہنی طرف منتقل کرنے سے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{ع}^2(1-\text{ع}^2)(1-\text{لہ}^2\,\text{لہَ}^2\,\text{ع}^2)\,\text{فرع}}{\text{ھ}^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس مساوات سے لہَ کی تعیُّن ہوتی ہے جبکہ لہ معلوم ہو۔

لہَ۲ کو مثبت قیمت دینے سے مساوات کی داہنی طرف کا جملہ مثبت ہوگا اگر لہَ = ۰ اور منفی اگر لہَ = ∞ ، پس لہَ۲ کی ایک قیمت مثبت ہوگی جو مساوات کو پورا کریگی۔

مزید براں مساواتوں (۲) کی رو سے

$$\text{سہ}^2 = \text{ا} - \frac{\text{ج}}{1+\text{لہ}^2}$$

$$= \frac{3\,\text{ک}}{\text{ج}^3}\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \frac{\text{لہ}^2(1-\text{ع}^2)\,\text{ع}^2\,\text{فرع}}{(1+\text{لہ}^2)(1+\text{لہ}^2\,\text{ع}^2)\,\text{ھ}} \quad \ldots\ldots (4)$$

اور اسلئے سہ۲ ایک مثبت مقدار ہے۔

پس اس کی پوری طرح تحقیق ہوگئی کہ تین غیر مساوی محوروں والا ناقص نما آزاد سطح کی ممکن شکل ہے جس کے تینوں محور غیر مساوی ہیں اور سب سے چھوٹا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ (۲۰۸)

مساوات (۳) سے یہ ظاہر ہے کہ لہ۲ لہَ۲ لازماً > ۱ ورنہ متکمل تکمل کی پوری وسعت میں مثبت ہوگا اور اس لئے معدوم نہ ہو سکے گا۔ اس لئے لہ۲ یا لہَ۲ لازماً > ۱،

اور اس لئے ا/ج یا ب/ج، √۲ سے بڑا ہونا چاہیئے۔ اس لئے جیکوبی ناقص نما کی دونوں اہلیلجیتیں چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔

۱۹۵ — سطح پر جاذبہ کا حاصلِ عمل قوتوں (ا — سہ^2) لا، (ب — سہ^2) ما، اور ج ی کا حاصل ہے اور اس لئے اُس عمود کے بالعکس متناسب ہے جو مرکز سے مماسی مستوی پر کھینچا جائے۔

نیز اندرونی ذرہ پر مائع کی کششوں ا لا، ب ما، اور ج ی کو ذہن میں رکھ کر اور لیبب نیز کے مسئلہ سے استفادہ کر کے یہ بہ آسانی ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی مرکزی مستوی تراش پر کا حاصل زور اس مستوی کے عمود وار اور اس کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۱۹۶ — مسٹر ہاؤ ہنٹر نے اس طرف توجہ دلائی ہے اور حسب ذیل طریقہ پر اس کی تشریح کی ہے کہ گھومنے والے ناقص نما کا اضافی توازن برقرار نہیں رہ سکتا جبکہ گردش کا محور صدری محور پر منطبق نہ ہو۔

صدری محاور کے لحاظ سے فرض کرو کہ گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں کمیت کا کوئی نقطہ ھ (لا، ما، ی) ہے اور ل اس عمود کا پایہ ہے جو ھ سے محور پر کھینچا گیا ہے۔

تب و ل = ل لا + م ما + ن ی

اور اگر و ل = ع تو ل کے محدد ہیں ل ع، م ع، ن ع

اسراع سہ^2 ھ ل کو محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے تو اجزائے تحلیلی حاصل ہوتے ہیں

سہ^2 (لا - ل ع)، سہ^2 (ما - م ع)، سہ^2 (ی - ن ع)

اس لئے آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

{سہ^2 (لا - ل ع) - ا لا} فرلا + {سہ^2 (ما - م ع) - ب ما} فرما + {سہ^2 (ی - ن ع) - ج ی} فری = ۰

پس آزاد سطح کی شکل، مساوات

سہ^2 (لا^2 + ما^2 + ی^2) - سہ^2 (ل لا + م ما + ن ی)^2 - ا لا^2 - ب ما^2 - ج ی^2 = مستقل، سے

حاصل ہوتی ہے اور یہ مساوات صدری محوروں کے لحاظ سے ایک ناقص نما کو

تعبیر نہیں کر سکتی جب تک کہ ل، م، ن میں سے دو مقداریں معدوم نہ ہو جائیں۔

مسٹر گرین ہل نے یہ بیان کیا ہے کہ گردش کے محور کے سرے پر مائع کا ذرہ صرف مائع کی کشش کے زیر عمل ساکن رہے گا کیونکہ اس نقطہ پر جملہ سہ^2 ر معدوم ہو جاتا ہے۔ (۹۰

پس ذرہ پر کی کشش سطح کے عماد کی سمت میں ہونی چاہیئے جو صرف محور کے سرے کی صورت میں درست ہے۔

۱۹۷ — جیکوبی کے مسئلہ کا حسب ذیل ثبوت اے۔ اسمتھ نے ۱۸۳۸ء میں (The Cambridge Mathematical Journal) کی پہلی جلد صفحہ ۹۰ میں دیا ہے۔

اگر مائع کی کچھ کمیت استوار جسم کے مانند زاوئی رفتار سہ سے محور ی کے گرد گھومے اور اگر نقطہ (لا، ما، ی) پر کشش کے اجزاء ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو آزاد سطح کی مساوات ہوگی

$$(\text{لا} - \text{سہ}^2\,\text{لا})\,\text{فرلا} + (\text{ما} - \text{سہ}^2\,\text{ما})\,\text{فرما} + \text{ے}\,\text{فری} = 0$$

اب اگر آزاد سطح ناقص نما ہو تو

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{لا}،\ \text{ما} = \text{ب}\,\text{ما}،\ \text{ے} = \text{ج}\,\text{ی}$$

جہاں ا، ب، ج منحصر نہیں ہیں لا، ما، ی پر۔

پس اگر ا، ب، ج ناقص نما کے نصف محور ہوں تو مساواتوں

$$(\text{ا} - \text{سہ}^2)\,\text{لا}\,\text{فرلا} + (\text{ب} - \text{سہ}^2)\,\text{ما}\,\text{فرما} + \text{ج}\,\text{ی}\,\text{فری} = 0$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2}\,\text{فرلا} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}^2}\,\text{فرما} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}^2}\,\text{فری} = 0$$

کو بشرط امکان منطابق کرتا ہے۔ اس لئے مساواتیں

$$\text{ا} - \text{سہ}^2 = \frac{\text{ل}}{\text{ا}^2}،\ \text{ب} - \text{سہ}^2 = \frac{\text{ل}}{\text{ب}^2}،\ \text{ج} = \frac{\text{ل}}{\text{ج}^2}$$

پوری ہونی چاہئیں جن سے ل اور سہ^2 کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}^2\text{ب}^2(\text{ب}-\text{ا}) - (\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{ج}^2\,\text{ج} = 0 \;\ldots\ldots\; (\text{عہ})$$

اب اگر $\text{د} = \left\{(\text{ا}^2+\text{ع})(\text{ب}^2+\text{ع})(\text{ج}^2+\text{ع})\right\}^{\frac{1}{2}}$

اور اگر مائع کی کمیت ک ہو تو

$$\text{ا} = \tfrac{3}{2}\,\text{ک}\int_0^\infty \frac{\text{فرع}}{(\text{ا}^2+\text{ع})\,\text{د}}\,،\quad \text{ب} = \tfrac{3}{2}\,\text{ک}\int_0^\infty \frac{\text{فرع}}{(\text{ب}^2+\text{ع})\,\text{د}}$$

$$\text{ج} = \tfrac{3}{2}\,\text{ک}\int_0^\infty \frac{\text{فرع}}{(\text{ج}^2+\text{ع})\,\text{د}}\;[1]$$

تب مساوات (عہ) ہو جاتی ہے

$$(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\int_0^\infty \frac{\text{فرع}}{\text{د}}\left\{\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{(\text{ا}^2+\text{ع})(\text{ب}^2+\text{ع})} - \frac{\text{ج}^2}{\text{ج}^2+\text{ع}}\right\} = 0$$ (۲۱۰)

اگر ا، ب سے مختلف ہو تو محوروں کے درمیان جو ربط ہے اُس سے مساوات

$$\int_0^\infty \frac{\text{ع}\,\text{فرع}}{\text{د}^3}\left(\frac{1}{\text{ا}^2}+\frac{1}{\text{ب}^2}-\frac{1}{\text{ج}^2}+\frac{\text{ع}}{\text{ا}^2\text{ب}^2}\right) = 0 \;\ldots\ldots\; (\text{یہ})$$

پوری ہونی چاہیئے۔

اگر ا اور ب معلوم ہوں تو اس مساوات سے ج کا تعین ہو جاتا ہے اور چونکہ داہنی طرف کا جملہ منفی ہے جبکہ $\text{ج} = 0$ اور مثبت ہے جبکہ $\text{ج} = \infty$ اس لئے ج کی ایک قیمت حقیقی ہونی چاہیئے جو مساوات بالا کو پورا کرے۔

چونکہ $\text{ع}/\text{د}^3$ مثبت ہے اور چونکہ

$$\frac{1}{\text{ا}^2}+\frac{1}{\text{ب}^2}-\frac{1}{\text{ج}^2}+\frac{1}{\text{ا}^2\text{ب}^2}$$

مثبت ہے اگر ع کافی بڑا ہو اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب ع چھوٹا ہو تو یہ آخری

[1] دیکھو کیلوین اور ٹیٹ کی (Natural Philosophy, Art. 494 n. یا
Minchin's Statics, Vol. II. P. 808

جملہ منفی ہونا چاہیئے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{ج^2} > \frac{1}{ا^2} + \frac{1}{ب^2}$$

اور اس لئے مقادیر ا اور ب میں سے جو مقدار چھوٹی ہے اُس سے ج چھوٹا ہے۔

زاویٔ رفتار معلوم کرنے کے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$سہ^2(ا^2 - ب^2) = \mathbf{ا}\,ا^2 - \mathbf{ب}\,ب^2$$

$$= \frac{۳}{۲}ک(ا^2 - ب^2)\int_{ب}^{\infty}\frac{ع\,فرع}{(ا^2+ع)(ب^2+ع)\,د}$$

اور اس لئے اگر ا ، ب سے مختلف ہے تو

$$سہ^2 = \frac{۳}{۲}ک\int_{ب}^{\infty}\frac{ع\,فرع}{(ا^2+ع)(ب^2+ع)\,د} \quad\text{......}\quad (جہ)$$

اور چونکہ یہ جملہ ایک مثبت مقدار ہے اس لئے سہ کی ایک ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ ثابت ہو گیا کہ ناقص نما، آزاد سطح کی ایک ممکن شکل ہے جب کہ اس ناقص نما کے تینوں محور غیر مساوی ہوں اور مائع سب سے چھوٹے محور کے گرد گھوم رہا ہو۔

۱۹۸ــــ ج کا سب سے چھوٹا محور ہونا اس طرح بھی ظاہر ہے

$$سہ^2 = \frac{\mathbf{ا}\,ا^2 - \mathbf{ج}\,ج^2}{ا^2}$$

$$= \frac{۳}{۲}\frac{ک}{ا^2}\int_{ب}^{\infty}\left\{\frac{ا^2}{ا^2+ع} - \frac{ج^2}{ج^2+ع}\right\}\frac{ع\,فرع}{د}$$

$$= \frac{۳}{۲}\frac{ک}{ا^2}(ا^2 - ج^2)\int_{ب}^{\infty}\frac{ع\,فرع}{(ا^2+ع)(ج^2+ع)\,د}$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ سہ کے حقیقی ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ ج < ا ، ب اور (۲۱۱)

اسی طرح ج > ب۔

۱۹۹ —— ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۱۹۷ میں ا، ب، ج کے لئے جو جملے دیئے گئے ہیں وہ اُن جملوں میں تحویل ہو سکتے ہیں جو دفعہ (۱۹۴) میں مندرج ہیں اگر ا^۲ کی بجائے ج^۲ (۱ + ل^۲)، ب^۲ کی بجائے ج^۲ (۱ + ل^۲) اور ج^۲ + ۶ کی بجائے ج^۲ / ۶^۲ لکھا جائے اس طرح دفعہ (۱۹۷) کی مساواتیں (بہ) (جہ) وہی ہیں جو دفعہ (۱۹۴) کی مساواتیں (۳) اور (۴) ہیں۔ اگر سیال کی کمیت ک دی جائے تو ایک اور مساوات $\frac{4}{3}$ π ث ا ب ج = ک حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات اور دفعہ (۱۹۷) کی مساواتوں (بہ) (جہ) سے ا، ب، ج، کا تعین ک، ث اور ω کی رقوم میں ہو سکتا ہے۔

ان مساواتوں کو سی۔ او۔ میئر[۱] (C. O. Mayer) نے دریافت کیا اور ٹسرینڈ (Tisserand) کی کتاب Traite de Mecanique Celeste Tome II کے باب ہفتم[۲] میں بھی ان کی پوری تشریح موجود ہے جس میں یہ بتایا گیا ہے کہ ω^۲ / ۲π ث کی اعظم قیمت ۰۹ ۱۸۷۰ء ہے جو جیکوبی ناقص نما کو توازن کی ایک ممکن شکل بناتی ہے اور اس خاص قیمت کے لئے ناقص نما ایک گردشی ناقص نما ہے جو میکلارن کے ایک کرہ نما پر منطبق ہوتا ہے۔ مزید برآں یہ بھی بتایا گیا ہے کہ دفعہ (۱۹۷) کی مساوات (جہ) کے بائیں جانب کا تفاعل اس قیمت سے ایک یگانہ قیمت اعظم اختیار کرتا ہے اور اس سے چھوٹی قیمتوں کے لئے ایک اور صرف ایک ناقص نما حاصل ہوتا ہے۔

میکلارن کے کرہ نماؤں اور جیکوبی کے ناقص نماؤں سے متعلق نتیجوں کا خلاصہ اس طرح لکھ سکتے ہیں:۔

اگر ω^۲ / ۲π ث > ۲۲۴۷ء تو کوئی کرہ نما یا ناقص نما نہیں

[۱] Crelle's Journal, Tome XXIV. (1842)

[۲] اس تشریح کے خلاصہ کے لئے دیکھو Traite de Mecanique Rationnelle, Tome III. p. 170.

اگر ۲۲۴۷ء > سہ²/۲πث > ۱۸۷۰۹ء تو دو چپٹے کرہ نما،
اگر ۱۸۷۰۹ء > سہ²/۲πث، تو دو چپٹے کرہ نما اور ایک ناقص نما
جس کے تینوں محاور غیر مساوی۔

۲۰۰ — ہم نے دفعہ (۱۹۴) میں دیکھا ہے کہ جیکوبی کے ناقص نما کی دونوں اہلیلجیتیں چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔ درحقیقت ایک محور ہر صورت میں گردش کے محور کا کم از کم ۲/۱ گنا ہے۔ جیکوبی کے ناقص نماؤں پر تفصیلی بحث کرتے ہوئے جس میں عددی جدول اور اشکال[۵] شامل ہیں ڈارون یہ بتاتا ہے کہ ناقص نما جیسے لمبا ہوتا جائیگا ویسے اس کے گھومنے کی رفتار سست پڑتی جائے گی اور جب زاوئی رفتار مسلسل گھٹتی جاتی ہے تو معیار حرکت کا معیار مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ اس نے یہ بھی بتایا ہے کہ لمبے ناقص نما تقریباً گردش کے ناقص نما ہیں جن کے گردش کا محور گھومنے کے محور پر علی القوائم ہے۔

(۲۱۲) ۲۰۱ — ناقصی اسطوانہ۔ ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ نظری طور پر متجانس تجاذبی مائع کی لامتناہی کمیت کی سطح کی ایک ممکن شکل ناقصی اسطوانہ ہے جبکہ مائع ہموار جسم کے مانند اسطوانے کے محور کے گرد گھوم رہا ہو۔

اگر ا اور ب نیم محور ہوں تو کسی اندرونی نقطہ (لا، ما) پر کشش کے اجزائے ترکیبی ہیں

$$\frac{۴\pi ث ب لا}{ا + ب} \quad \text{اور} \quad \frac{۴\pi ث ا ما}{ا + ب}$$

(کیلول اور ٹیٹ، دفعہ ۴۹۴) اور اسلیے آزاد سطح کی مساوات ہے

$$\left(\frac{۴\pi ث ب}{ا + ب} - سہ^۲\right) لا فرلا + \left(\frac{۴\pi ث ا}{ا + ب} - سہ^۲\right) ما فرما = ۰$$

اس مساوات کو

---

[۵] دیکھو "On Jacobi's Figure of Equilibrium for a rotating mass of fluid." Proc. *Royal Soc.* Vol. XLI. (1887) p. 319, or *Scientific Papers*, Vol. III. p. 119.

$$\frac{\text{لا فرلا}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما فرما}}{\text{ب}^2} = ۰$$

کے ساتھ متماثل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ}^2 = ۴\ \text{ہ ث ا ب}/(\text{ا} + \text{ب})^2$$

اس سے سہ کی تعیّن ہوتی ہے اگر ث، ا، ب دے گئے ہیں۔ لیکن اگر سہ، ث دے جائیں تو چونکہ

$$\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}} = \sqrt{۱ - \frac{\text{سہ}^2}{\text{ہ ث}}}$$

اس لئے ناقصی اسطوانہ توازن کی ممکن شکل نہیں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ

$$\text{سہ}^2 < \text{ہ ث}.$$

۲۰۲ — پوانکارے کا مسئلہ۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ جیکوبی کا ناقص نما اضافی توازن کی ایک نا ممکن شکل ہوتا ہے اگر

$$\text{سہ}^2/۲\ \text{ہ ث} > ۰۹ ۱۸۷ء$$

ایک چپٹا کرہ نما نا ممکن شکل ہوتا ہے اگر $\text{سہ}^2/۲\ \text{ہ ث} > ۲۲۴۷ء$ اور ایک ناقصی اسطوانہ نا ممکن شکل اگر $\text{سہ}^2/۲\ \text{ہ ث} > ۵ء$۔ پوانکارے نے ثابت کیا کہ اگر $\text{سہ}^2/۲\ \text{ہ ث} > ۱$ تو توازن کی کوئی شکل ممکن نہیں[۱]۔ کیونکہ توازن کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ آزاد سطح کے ہر نقطہ پر کشش اور مرکز گریز قوت کے حاصل کی سمت اندرونی جانب ہو ورنہ ایک حصہ جدا ہو جاسئے گا فرض کرو کہ تجاذبی قوتوں کا قوہ فہ ہے اور محور سے فاصلہ ر ہے اور فرض کرو کہ

[۱] دیکھو *Bulletin Astron.* Tome II. p. 117 or figures d'equilibre d'une masae fluide, P. 11.

$$۶ = فہ + \tfrac{1}{۲} سہ^۲ رَ^۲$$

(۱۳) بیرونی جانب حاصل عمادی قوت $\frac{جف ۶}{جف ع}$ ہے اور توازن کے لئے آزاد سطح کے ہر نقطہ پر $\frac{جف ۶}{جف ع}$ منفی ہونا چاہیئے۔ گرین کے مسئلہ سے[۱]

$$\iint \frac{جف ۶}{جف ع} فرس = \iiint لف^۲ ۶ فرلا فرما فری$$

جہاں پہلا تکملی سطح پر اور دوسرا سیال کے کل حجم کے اندر لیا گیا ہے۔ اور

$$لف^۲ ۶ = لف^۲ فہ + ۲ سہ^۲ = - ۴ \pi ث + ۲ سہ^۲$$

$$\text{اس لئے} \quad \iint \frac{جف ۶}{جف ع} فرس = ۲ (سہ^۲ - ۲ \pi ث) \times حجم$$

اور اگر $سہ^۲ > ۲ \pi ث$ تو داہنی جانب کا جملہ مثبت ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ سطح کے چند نقطوں پر حاصل قوت کی سمت بیرونی جانب ہے اور اس لئے توازن ناممکن ہے۔

۲۰۳ —— توازن کی اور شکلیں - ان اشکال کے علاوہ جن پر ہم نے غور کیا ہے حلقہ نما (Annulus) پر سب سے پہلے لاپلاس[۲] نے غور کیا جس کا تعلق زحل کے چھلوں سے ہے اور اس وقت سے اس مضمون پر بہت سی تحقیقات ہو چکی ہے۔

کیلون اور ٹیٹ کی (*Natural Philosophy*) طبع دوم کے دفعہ ۷۷۸ میں نتیجوں کی ایک تعداد جو مذکورہ بالا اشکال کی قائمیت سے متعلق ہیں بغیر ثبوت

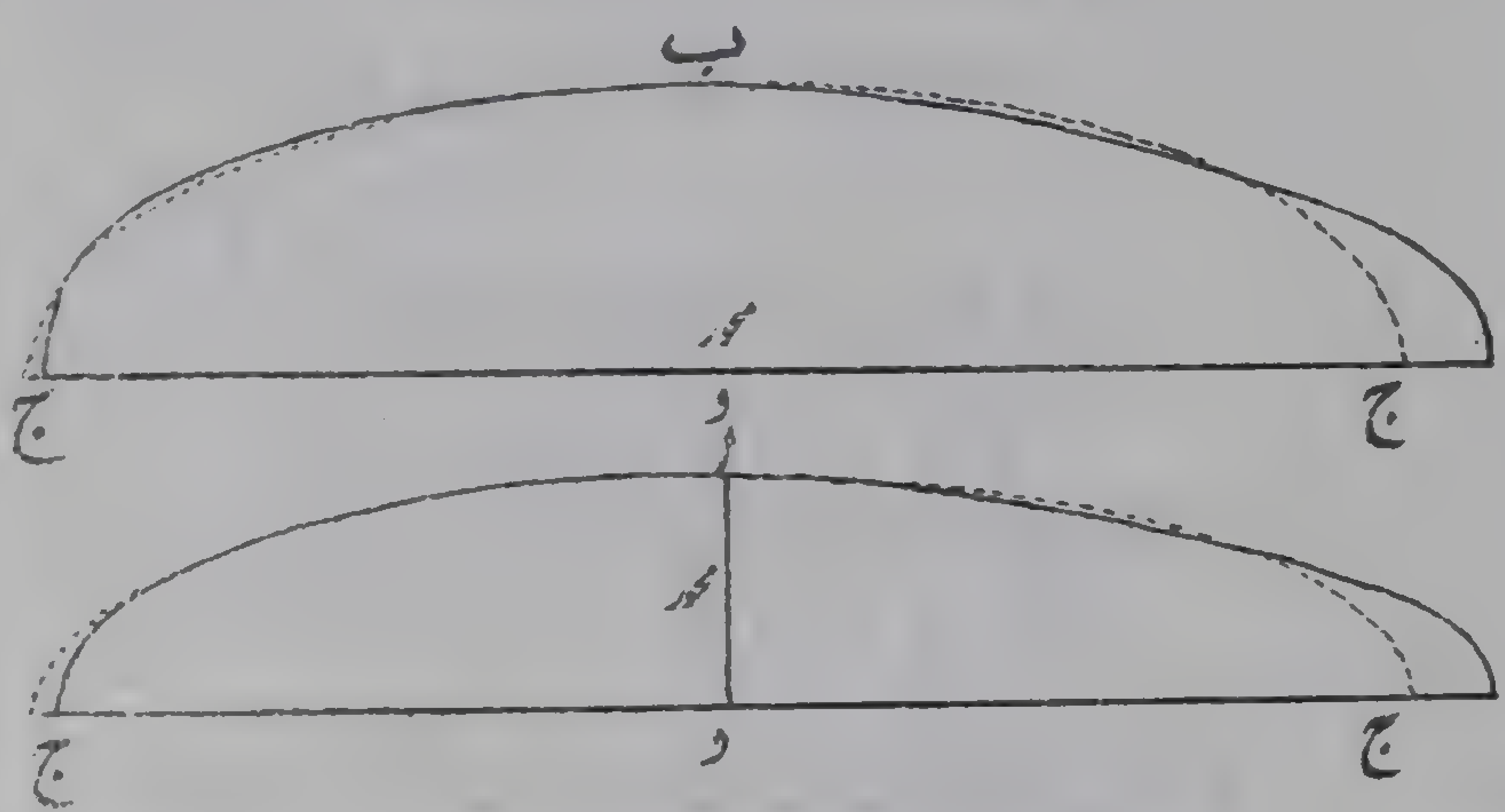
---

[۱] $لف^۲ فہ = \nabla^2 u$

[۲] (*Mecanique Celeste*, Tome II. p. 155) نیز (Tisserand) کی (Mecanique Celeste) جلد دوم کے ابواب نہم، دہم، دوازدہم دیکھو جن میں لاپلاس، کلرک میکسول، اور (Mme Kowalewsk) کی تحقیقاتوں پر بحث کی گئی ہے۔

کے درج کیگئی تھی - ان نتیجوں کو قائم کرنے کی کوشش میں پوانکارے نے ایک مشہور و مقبول مقالہ لکھا جو ۱۸۸۵ء میں (Acta Mathematica ,7, Stockholm) میں شائع ہوا - اس مقالہ میں توازن کی شکل کے مسئلہ پر زیادہ عام طریقہ سے بحث کی گئی ہے - اس میں بتایا گیا ہے کہ توازن کی ممکن اشکال خطی سلسلہ بناتی ہیں یعنی ایسا سلسلہ جو ایک تنہا مبدل پر منحصر ہوتا ہے، مثلاً زاوئی رفتار پر اور ایسا کہ مبدل کی ہر قیمت کے جواب میں ایک اور صرف ایک شکل یا اشکال کی ایک محدود تعداد حاصل ہوتی ہے اور یہ کہ اشکال ایک مسلسل طریقہ سے بدلتی ہیں جب کہ مبدل بدلا جاتا ہے - اس طرح میکلارن کے کرہ نما ایک خطی سلسلہ بناتے ہیں اور جیکوبی کے ناقص نما دوسرا - یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ہی شکل دو مختلف سلسلوں سے تعلق رکھے - اسطرح کی شکل دو شاخگی کی ایک صورت ہے - مثلاً کرہ نماؤں کے سلسلہ کا ایک خاص رکن ایسا ہے جو جیکوبی کے ناقص نما کے سلسلہ سے تعلق رکھتا ہے - پوانکارے نے اس مقالہ میں توازن کی اشکال کی قائمیت کے مسئلہ پر بھی بحث کی ہے اور یہ بتایا ہے کہ اگر اشکال کا ایک سلسلہ دو شاخگی کی شکل کی حد تک قائم ہو تو اس نقطہ کے بعد اشکال (۴
غیر قائم ہو جاتی ہیں - قائم اشکال اب دوسرے سلسلہ سے متعلق ہو جاتی ہیں جو دو شاخگی کی شکل میں شامل ہوتا ہے - اس طرح میکلارن کا کرہ نما اس وقت تک قائم ہوتا ہے جب تک کہ اسکا خروج المرکز ۸۱۲۷ر سے کم ہو جو دو شاخگی کا نقطہ ہے اور اس نقطہ سے جیکوبی کے ناقص نما قائم ہو جاتے ہیں - جیکوبی کے ناقص نماؤں کے سلسلہ میں دو شاخگی کے نقطے (Lame) کے تفاعلوں کی مدد سے معلوم کرنے کی کوشش میں پوانکارے نے دریافت کیا کہ توازن کی اشکال کے سلسلوں کی تعداد لامتناہی ہے تمام اشکال بلحاظ ایک مستوی کے جو گردش کے محور پر عمود وار ہوتا ہے متشاکل ہوتی ہیں - تمام اشکال کم از کم ایک تشاکل کا مستوی رکھتی ہیں جو محور میں سے گزرتا ہے اور ان میں سے بعض گردشی اشکال ہیں - ان اشکال میں صرف ایک قائم ہوتی ہے اور اس صورت میں تشاکل کے صرف دو مستوی ہوتے ہیں - یہ وہ شکل ہے جو جیکوبی کے ناقص نماؤں کے سلسلہ میں پہلی دو شاخگی سے پیدا ہوتی ہے اور ان کو توازن کی ناسپاتی نما شکل کہا گیا ہے

کیونکہ پوانکارے کے مقالہ[۱] میں جو شکل کھینچی گئی ہے وہ ناسپاتی سے کے متشابہ ہے ۔ مزید تحقیقات سے معلوم ہوا کہ شکل ناسپاتی سے اتنی مشابہت نہیں رکھتی جتنی کہ پہلے فرض کی گئی تھی۔ڈارون نے اس پر دو مقالوں[۲] میں بحث کی ہے اور دوسرے تقرب تک اس کی شکل کا تعین کیا ہے دو شاخگی کے نقطہ پر جیکوبی ناقص نما کے محوروں میں نسبت ۶۵۰۶۶ : ۸۱۴۹۸ : ۱۸۸۵۸۴ ہے اور س۲/ ۲π ث = ۰ء۱۴۲۰۰ اور ناسپاتی نما شکل جیکوبی کے اس ناقص نما سے ذرا سا فرق رکھتی ہے



جو اپنے سب سے لمبے محور کے ایک سرے پر ابھرا ہوا اور دوسرے پر کُند ہوتا ہے ۔

۱؎ *Loc. cit.* p. 347, also *Figures d'equilibre d'une masse fluide*, p. 161.

۲؎ "On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil. Trans.* Vol, 198 A (1901), p. 301. or *scientific papers*, Vol. III p. 288. and "The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil. Trans.* Vol. 200 A (1903), p. 251, or *Scientific Papers*, Vol III. p. 317.

ان اشکال کی ماہیت پر ایک سلیس اور دلچسپ مضمون The Genesis of Double Stars, میں بہت آسان بحث کی گئی ہے ۔ یہ مضمون *Darwin and Modern Science.* کے باب بست و ہشتم میں اسی مصنف کا لکھا ہوا ہے ۔

اشکال بالا میں جن کو بالاجازت متذکرہ صدر ڈاروں کے دوسرے مقالہ سے لیا گیا ہے نقطہ دار خط جیکوبی ناقص نما کو تعبیر کرتا ہے اور دوسرا منحنی ناسیاتی نما شکل کو۔ اوپر والی شکل استوائی تراش اور نچلی نصف النہاری تراش ہے تشاکل کے مستوی ہیں۔

۲۰۴ — چھوٹی اہلیلیجیتوں کے ٹھوس متجانس ناقص نما کی کشش کے لئے حسب ذیل جملے گھومنے والے مائع کی کمیتوں کی اختیار کردہ اشکال کی بحث میں اکثر مفید ثابت ہوتے ہیں یعنی اگر ا، ب، ج نیم محور ہوں ایسے کہ ب = ا (۱ - صہ) اور ج = ا (۱ - شہ) تو کسی اندرونی نقطہ (لا، ما، ی) پر کشش کے اجزائے ترکیبی ہیں

$$\text{ا ث لا، ب ث ما، ج ث ی}$$

جہاں

$$\text{ا} = \frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{2}{5}\,\text{صہ} - \frac{2}{5}\,\text{شہ}\right)$$

$$\text{ب} = \frac{4}{3}\pi\left(1 + \frac{4}{5}\,\text{صہ} - \frac{2}{5}\,\text{شہ}\right)$$

$$\text{ج} = \frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{2}{5}\,\text{صہ} + \frac{4}{5}\,\text{شہ}\right)$$ [لہ]

ان جملوں کو متشاکل صورت میں اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\text{ا} = \frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{2}{5}\,\frac{2\text{ا} - \text{ب} - \text{ج}}{\text{ا}}\right) \text{، وغیرہ}$$

یا اسطرح

$$\text{ا} = \frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{6}{5}\,\frac{\text{ا} - \text{کہ}}{\text{کہ}}\right) \text{، وغیرہ}$$

جہاں

$$\text{کہ} = \frac{1}{3}\left(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}\right)$$

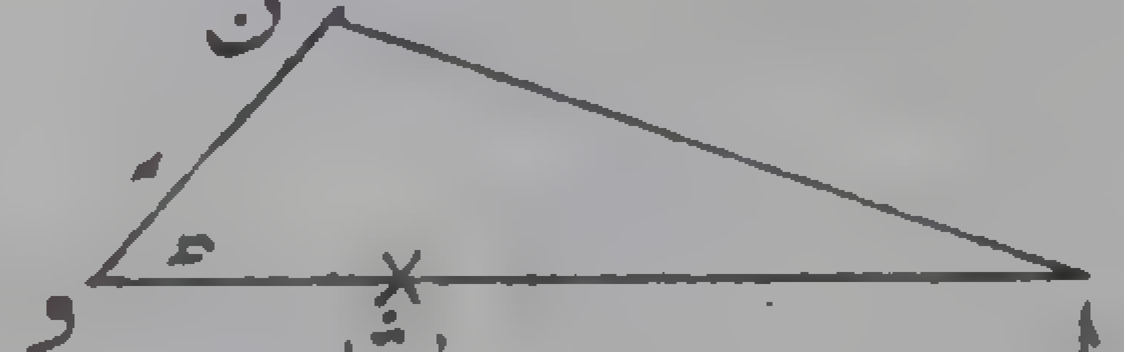
۲۰۵ — مثال۔ متجانس مائع کی کمیت ک اور ک کمیت کا ایک دور رکھا ہوا کرہ اضافی توازن میں اپنے مرکز ثقل کے گرد چھوٹی یکساں زاویٔ رفتار سہ سے گھوم رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ مائع کی آزاد سطح صغیر اہلیلیجیتوں کا ناقص نما ہے جس کا سب سے

لہ دیکھو راؤتھ کی (Analytical Statics) جلد دوم دفعہ ۲۲۱ (طبع دوم)

لمبا محور ک کی طرف ہے اور سب سے چھوٹا محور حرکت کے مستوی پر علی القوائم ہے۔ اور اجسام کے مراکز ثقل کو ملانے والے خط میں سے گزرنے والی مدوری تراشوں کی طیلیجیوں کی نسبت $4\text{ک} + \text{ک} : 3\text{ک}$ ہے[1]۔ (Math. Tripos. 1888)

اگر اجسام کے درمیان فاصلہ ف ہو تو کیت ک کے مرکز ثقل و کا اسراع $\frac{\text{مک}}{\text{ف}^2}$ ہے اور و کو ساکن کر دیا جا سکتا ہے اگر مائع کی کیت کے ہر عنصر پر یہ اسراع متقابل سمت میں لگا دیا جائے۔

اگر کیت ک کا مرکز ثقل ا ہو اور مائع کی کیت میں کوئی نقطہ ن ہو تو ن پر عمل کرنے والی قوتیں ہیں $\frac{\text{مک}}{\text{نا}^2}$ ا کی سمت میں، $\frac{\text{مک}}{\text{او}^2}$ ا و کے متوازی، وہ قوت جو مائع کی بر خود کشش سے پیدا ہوتی ہے، اور مرکز گریز قوت۔ اب ن ا کی سمت میں عمل کرنے والی قوت $\frac{\text{مک}}{\text{نا}^3}$ معادل ہے



ن و کی سمت میں عمل کرنے والی قوت $\frac{\text{مک}}{\text{نا}^3} \times$ ن و کے اور و ا کے متوازی عمل کرنے والی قوت $\frac{\text{مک}}{\text{نا}^3} \times$ و ا کے۔

اول الذکر

$$= \frac{\text{مک ر}}{(\text{ف}^2 + \text{ر}^2 - 2\,\text{ف ر جم ط})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{مک ر}}{\text{ف}^3}$$

$\frac{\text{ر}}{\text{ف}}$ کے پہلے رتبہ تک۔

---

[1] اس قسم کے مسئلوں پر لاپلاس نے (Mecanique Celeste) کی تیسری جلد میں بحث کی ہے۔

ثانی الذکر $\frac{\text{مہ ک}}{\text{او}^2}$ کے ساتھ مل کر

$$= \frac{\text{مہ ک ف}}{(\text{ف}^2 + \text{ر}^2 - 2\,\text{ف ر جم ط})^{3/2}} - \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^2}$$

$$= \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^2}\left\{1 + \frac{3\,\text{ر}}{\text{ف}}\,\text{جم ط} - 1\right\}$$

$$= \frac{3\,\text{مہ ک ر جم ط}}{\text{ف}^3}$$

و ا کے متوازی۔

اگر ہم ناقص نمائی شکل مان لیں اور و ا کو محور لا اور گردش کے محور کو محور ی قرار دیں تو

$$\frac{\text{فر د}}{\text{ث}} = \text{سہ}^2(\text{لا فر لا} + \text{ما فر ما}) - \text{ا ث لا فر لا} - \text{ب ث ما فر ما} - \text{ج ث ی فر ی}$$
$$- \frac{\text{مہ ک ر}}{\text{ف}^3}\,\text{فر ر} + \frac{3\,\text{مہ ک لا}}{\text{ف}^3}\,\text{فر لا}$$

اور آزاد سطح کی شکل ہونی چاہیے

$$\text{لا}^2\left(\text{سہ}^2 - \text{ا ث} + \frac{3\,\text{مہ ک}}{\text{ف}^3} - \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^3}\right) + \text{ما}^2\left(\text{سہ}^2 - \text{ب ث} - \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^3}\right)$$
$$- \text{ی}^2\left(\text{ج ث} + \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^3}\right) = \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{ا}^2\left(\text{ا ث} - \frac{2\,\text{مہ ک}}{\text{ف}^3} - \text{سہ}^2\right) = \text{ب}^2\left(\text{ب ث} + \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^3} - \text{سہ}^2\right)$$
$$= \text{ج}^2\left(\text{ج ث} + \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^3}\right)$$

اب چونکہ کمیتیں اپنے مرکز ثقل ث کے گرد زاوی رفتار سہ سے گھوم رہی ہیں

$$\therefore \text{سہ}^2 \times \text{و ث} = \frac{\text{مہ ک}}{\text{ف}^2}$$

لیکن $$(\text{ک}+\text{ک})\,\text{وث} = \text{ک}\,\text{ف}$$

$$\therefore\ \text{سہ}^2 = \frac{\text{م}(\text{ک}+\text{ک})}{\text{ف}^3}$$

$$\therefore\ \text{ا}^2\text{ا} - \text{ب}^2\text{ب} = \frac{\text{سہ}^2}{\text{ث}}\left\{\text{ا}^2\left(1+\frac{2\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}}\right) - \text{ب}^2\left(1-\frac{\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{سہ}^2}{\text{ث}}\,\text{ا}^2\,\frac{3\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}}$$

کیونکہ $\text{سہ}^2/\text{ث}$ اور ا - ب چھوٹے ہیں۔

اسی طرح $$\text{ا}^2\text{ا} - \text{ج}^2\text{ج} = \frac{\text{سہ}^2}{\text{ث}}\left\{\text{ا}^2\left(1+\frac{2\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}}\right)+\text{ج}^2\,\frac{\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}}\right\}$$

$$= \frac{\text{سہ}^2}{\text{ث}}\,\text{ا}^2\,\frac{2\text{ک}+\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}}$$

لیکن دفعہ گزشتہ سے

$$\text{ا}^2\text{ا} - \text{ب}^2\text{ب} = \frac{4}{3}\pi\left\{(\text{ا}^3-\text{ب}^3) - \frac{2}{5}\,\text{ا}^2\,\frac{\text{ا}-\text{کہ}}{\text{کہ}} + \frac{2}{5}\,\text{ب}^2\,\frac{\text{ب}-\text{کہ}}{\text{کہ}}\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\pi(\text{ا}-\text{ب})\left\{\text{ا}+\text{ب}-\frac{2}{5}\left(\frac{\text{ا}^2+\text{اب}+\text{ب}^2}{\text{کہ}}-\text{ا}-\text{ب}\right)\right\}$$

اور صغیر فرق ا - ب کے پہلے رتبہ تک صحیح نتیجہ حاصل کرنے کے لئے ہم آخری جزو ضربی میں کہ = ب = ا رکھ سکتے ہیں۔ اس طرح

$$\text{ا}^2\text{ا} - \text{ب}^2\text{ب} = \frac{16}{15}\pi\,\text{ا}\,(\text{ا}-\text{ب})$$

اسی طرح $$\text{ا}^2\text{ا} - \text{ج}^2\text{ج} = \frac{16}{15}\pi\,\text{ا}\,(\text{ا}-\text{ج})$$

پس $$\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}-\text{ج}} = \frac{\text{ا}^2\text{ا}-\text{ب}^2\text{ب}}{\text{ا}^2\text{ا}-\text{ج}^2\text{ج}} = \frac{3\text{ک}}{2\text{ک}+\text{ک}}$$

امثلہ

۱ــــــ ا نصف قطر کا ایک پتلا کروی خول ث کثافت کے تجاذبی مائع سے عین بھرا ہوا نہیں ہے۔ اگر یہ مائع اضافی توازن میں ایک قطر کے گرد زاوئی رفتار سہ سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ گردش کے محور کے علی القوائم خول کا جو بڑا دائرہ ہے اس کے کسی نقطہ پر سطح دائرہ کی علی القوائم سمت میں تناؤ سہ۲ ث ا۳/۸ کے مساوی ہے۔

۲ ــــــ ایک استوار کروی خول تجاذبی سیال سے عین بھر دیا گیا ہے۔ یہ ایک مرکزہ ہے جو ایک دوسرے ہلکے سیال کے خول سے گھرا ہوا ہے۔ کل نظام کو ایک قطر کے گرد گھمایا گیا۔ ثابت کرو کہ ایک چپٹا کرہ نما سطح فاصل کی ممکن شکل ہے۔

۳ ــــــ ایک استوار کروی خول میں دو مائعات ہیں جو آمیز نہیں ہوتے اور کل نظام استوار جسم کی مانند خول کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد گھومتا ہے۔ سب سے بڑی زاوئی رفتار معلوم کرو جس کے لئے مشترک سطح کروی ہو جائے اور خول کو مس نہ کرے اور ثابت کرو کہ جب زاوئی رفتار اس قیمت سے متجاوز نہیں ہوتی تو کرہ نما کا خروج المرکز خول کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتا۔

۴ ــــــ ث۱ کثافت کے مائع کی کچھ کمیت ث کثافت کے مائع کی کچھ کمیت سے گھری ہوئی ہے اور کل کمیت پوری طرح ایک غلاف میں بھر جاتی ہے جسکی شکل صغیر اہلیلجیت صہ کا ایک چپٹا کرہ نما ہے۔ اگر غلاف اپنے محور کے گرد صغیر زاوئی رفتار سہ سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل صہ۱ اہلیلجیت کا ایک چپٹا کرہ نما ہے جہاں صہ۱

۵ سہ۲ / ۱۶ π = صہ۱ ث۱ + ۳/۲ (صہ۱ − صہ) ث

سے حاصل ہوتا ہے۔

۵ ــــــ ایک غلاف صغیر اہلیلجیت صہ کے ایک لمبوترے کرہ نما کی شکل میں ہے۔ اس کو ث + ثہ کثافت کے ایک سیالی مرکزہ اور اس کے گرد ث کثافت کے سیال سے بھر دیا گیا ہے اگر یہ اپنے محور کے گرد زاوئی رفتار (۸/۵ π ث صہ)^½

سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل ایک کرہ ہے۔

۶ —— ث کثافت کے متجانس مائع کی کچھ کمیت ایک غلاف کو بھر دیتی ہے جسکی شکل ناقص نما $\text{لا}^2/\text{ا}^2 + \text{ما}^2/\text{ب}^2 + \text{ی}^2/\text{ج}^2 = 1$ ہے، یہ غلاف استوار جسم کی مانند خط $\text{لا}/\text{ل} = \text{ما}/\text{م} = \text{ی}/\text{ن}$ کے گرد یکساں زاوی رفتار سہ سے گھومتا ہے۔ اگر مرکز پر کا دباؤ سطح پر کے کسی نقطہ پر کے دباؤ سے بقدر $\frac{1}{2}$ لہ ث سے زیادہ ہو اور یہ اضافہ بڑے سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ل}^2}{\frac{1}{\text{ا} - \text{لہ}/\text{ا}^2} - \frac{1}{\text{سہ}^2}} + \frac{\text{م}^2}{\frac{1}{\text{ب} - \text{لہ}/\text{ب}^2} - \frac{1}{\text{سہ}^2}} + \frac{\text{ن}^2}{\frac{1}{\text{ج} - \text{لہ}/\text{ج}^2} - \frac{1}{\text{سہ}^2}} = 0$$

جہاں ا لا، ب ما، ج ما، کسی اندرونی نقطہ پر کی کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں۔

۷ —— ایک یکساں کرہ جو معمولی تجاذبی مادے سے بنایا گیا ہے اور جسکا نصف قطر ا ہے چھوٹی یکساں زاوئی رفتار سے دور کے ایک قوت کے مرکز کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ مرکزی قوت فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ (۸ اگر کرہ کو پوری طرح پانی سے ڈھانپ دیا جائے اور پانی کی برخود کشش نظر انداز کردی جائے تو ثابت کرو کہ پانی کا حجم

$$10\pi\, \text{سہ}^2\, \text{ا}^4 / 3\text{ج}$$

سے بڑا ہونا چاہیئے جہاں ج کرہ کی سطح پر جاذبہ ارض کی قیمت ہے۔

۸ —— دو تجاذبی مائعات آمیز نہیں ہوتے اور جن کی کثافتیں ث، ثہ (ث > ثہ) ہیں ایک استوار کروی لفافہ میں بند ہیں اور کل نظام اضافی توازن میں کرے کے ایک قطر کے گرد صغیر یکساں زاوئی رفتار سہ سے گھومتا ہے ثابت کرو کہ ان دو مائعوں کی مشترک سطح کی ممکن شکل ایک چپٹا کرہ نما ہے جس کی بیضویت $\frac{15}{16}\text{سہ}^2 / 2\pi\left(\text{ث} + \frac{3}{2}\,\text{ثہ}\right)$ ہے۔

۹ ـــــ ا اوسط نصف قطر کا ایک لا متناہی متجانس اسطوانہ ثہ کثافت کے متجانس مائع کی کمیت سے گھرا ہوا ہے۔ اسطوانہ کی کثافت ث اور اس کی صغیر ہلیلیجیت صہ ہے کل نظام اضافی توازن میں خود اپنی کشش کے زیر عمل محور کے گرد یکساں زاوئی رفتار سہ سے گھومتا ہے۔ اگر آزاد سطح کا اوسط نصف قطر عہ ہو تو ثابت کرو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ایک ناقصی اسطوانہ ہے جسکی صغیر ہلیلیجیت ہے

$$\pi\, ا^{2} (ث - ثہ)\, سہ \,/\, \{ ۲\pi (ث - ثہ)\, ا^{2} + \pi\, ثہ\, عہ^{2} - سہ^{2} عہ^{2} \}\, خہ^{2}$$

۱۰ ـــــ ث کثافت کے جاذب سیال کی دی ہوئی کمیت اضافی توازن میں زاوئی رفتار شہ کے ساتھ اس طرح گھوم سکتی ہے کہ اس کی آزاد سطح ناقص نما کی شکل میں ہے جس کے تینوں محاور غیر مساوی ہیں اور سب سے بڑا نیم محور ا ہے۔ اب اس شکل کا ایک استوار ترن بنایا گیا ہے اور اس کے اندرونی سیال کو ظرف کے ساتھ اضافی توازن کی حالت میں سب سے چھوٹے محور کے گرد زاوئی رفتار سہ سے گھمایا گیا ہے ثابت کرو کہ سطح کے کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے

$$\tfrac{1}{2}\, ث (سہ^{2} - شہ^{2}) (لا^{2} + ما^{2}) \;\text{یا}\; \tfrac{1}{2}\, ث (سہ^{2} - شہ^{2}) (لا^{2} + ما^{2} - ا^{2})$$

بموجب اس کے کہ سہ، شہ سے بڑا یا چھوٹا ہو۔

۱۱ ـــــ اوسط کثافت ث کا ایک ٹھوس کرہ یکساں کثافت ثہ کے مائع کی ایک پتلی چادر سے لپیٹ دیا گیا ہے کل نظام کرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد صغیر یکساں زاوئی رفتار سہ سے گھومتا ہے۔ ٹھوس کرہ معکوس مربع کے قانون کی بموجب اس طرح جذب کرتا ہے گویا کہ اس کا مادہ محور کے ایک نقطہ پر منجمد ہے جسکا مرکز سے فاصلہ ج چھوٹا ہے۔ مائع بھی معکوس مربع کے قانون کے بموجب جذب کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی بیرونی سطح تقریباً ایک کرہ نما ہے جس کی ہلیلیجیت $۱۵\, سہ^{2} / ۸\pi (۵\, ث - ۳\, ثہ)$ ہے اور جسکا مرکز کرہ کے مرکز سے $ث\, ج / (ث - ثہ)$ فاصلہ پر واقع ہے۔

۱۲ـــــ ا نصف قطر اور ث کثافت کا ایک ٹھوس تجاذبی کرہ مائع سے گھرا ہوا ہے جسکی کثافت ثہ اور جسکا حجم $\frac{4}{3}\pi$ (ب^3 − ا^3) ہے۔ کل نظام صغیر زاوی رفتار سہ سے گھمایا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ مائع کی آزاد سطح کی شکل رشتہ

$$ر = ب\left(1 - \frac{2}{3}\,صہ\,ع_{2}\right)$$

سے حاصل ہوتی ہے، جہاں کرہ نما کی صغیر بیضویت صہ

$$= \frac{15\,سہ^{2}\,ب^{3}}{8\pi\left\{5(ث - ثہ)\,ا^{3} + 2\,ثہ\,ب^{3}\right\}}$$

اور ع$_2$ دوسرے رتبہ کا لیجنڈر کا سر ہے۔

۱۳ـــــ ث کثافت اور $\frac{4}{3}\pi$ (کہ^3 − ا^3) حجم کے متجانس مائع کی کمیت جو ثہ کثافت اور ا نصف قطر کے ایک ثابت ٹھوس کروی مرکزہ کو گھیرے ہوئے ہے قطبی محور کے گرد صغیر زاوی رفتار سہ کے ساتھ ٹھوس کے مانند اپنی خود کشش، مرکزہ کی کشش اور ایک ذرہ کی کشش کے زیر عمل گھوم رہی ہے۔ ذرہ کی صغیر کمیت ک ہے اور وہ قطبی محور پر کرہ کے مرکز سے ج فاصلہ پر واقع ہے۔ آزاد سطح کی شکل کی تعیین کرو کہ کرہ کا کوئی حصہ مائع سے خالی نہ ہو اور ثابت کرو کہ (19)
ک کے نزدیک ترین کرہ کے نصف حصہ پر مائع کا حجم مائع کے اُس حجم سے بقدر

$$4\,ک\sum_{ن=0}^{ن=\infty}(-1)^{ن}\,\frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن\,\lfloor ن+1}\;\frac{\left(کہ/2ج\right)^{2ن+2}}{\frac{ا^{3}}{کہ^{3}}\left(ثہ - ث\right) + \frac{4\,ث\,ن}{4ن+4}}$$

کے بڑا ہے جو اس صورت میں ہوتا جبکہ ک نہ ہوتا۔

ایسی صورت میں بحث کرو جبکہ ث تقریباً ثہ کے مساوی ہو جائے۔

۱۴ـــــ ایک متجانس تجاذبی سیال ایک استوار غلافہ کو پُر کرنے میں عین ناکافی ہے۔ غلافہ ایک بھینچے ناقص نما کی شکل میں ہے۔ سیال اضافی توازن میں قطبی محور کے گرد توانائی بالحرکت ع کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ اگر سیال توانائی بالحرکت ع$_1$

کے ساتھ گھومے تو لفافہ صغیر دباد کی آزاد سطح ہو جاتا ہے۔ ع کی تمام قیمتوں کے لئے خواہ وہ ع، سے بڑی ہوں یا چھوٹی ثابت کرو کہ لفافے کے استوائی تراش کے عمودوار تناؤ فی اکائی طول ہے

ع - ع، / ا ۱۵/۳۲

جہاں ا ناقص نما کی قطبی تراش کا رقبہ ہے۔

۱۵ ــــ ک کمیت کے تقریباً کروی ٹھوس جسم کی سطح پر مائع کی ک کمیت ہے۔ ٹھوس جسم کی سطح کی مساوات ہے ر = ا (۱ + عہ ع۵[1]) ۔ ٹھوس اور مائع کلیہ نیوٹن کے بموجب جذب کرتے ہیں اور کل نظام زاویٔ رفتار سہ کے ساتھ موسیقی کے محور کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط استوا مائع سے غیر ڈھپا ہوا ہوگا اگر

ک > ۹ عہ ک/(۱۲ ل - ۴) - ۵ سہ۲ ا۳/(۱۰ ل - ۶) اور قطب غیر ڈھنپے ہوئے ہونگے اگر ک > ۶ عہ ک/(۳ ل - ۱) + ۵ سہ۲ ا۲/(۵ ل - ۳)

جہاں ل وہ نسبت ہے جو ٹھوس جسم کی کثافت کو مائع کی کثافت کے ساتھ ہے۔

۱۶ ــــ یہ مانکر کہ زمین ایک سیال پر مشتمل ہے جو ایک ٹھوس کروی مرکزہ کو گھیرے ہوئے ہے ثابت کرو کہ بیضیت صہ جسکو صغیر فرض کیا گیا ہے رشتہ

صہ = ک (ٹ/ث) / (۴/۵ + ۲ (ٹ/ث - ۱))

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ک وہ نسبت ہے جو استوا پر مرکزی قوت کو وہاں کے جاذبہ سے ہے۔ ٹ کل زمین کی اوسط کثافت اور ث سیال کی کثافت ہے۔

ذیل کی صورتیں مستنبط کرو

(۱) پورے طور پر سیال زمین کی صورت صہ = ۵/۴ ک

(۲) ٹھوس مرکزہ پر بہت پایاب سمندر، صہ = ۱/۲ ک

ــــــ ۰ ــــــ

[1] ع۵ لیجنڈر کا چار رتبی سر ہے۔ مترجم

متفرق مثالیں

ا ـــــ لچکدار سیال کی کچھ مقدار جس کے اجزا ایک دوسرے کو بموجب قانون قدرت جذب کرتے ہیں ایک کرہ میں بھر جاتی ہے جس کے مرکز پر ایک مرکزی قوت ـــ موجود ہے۔ کرہ کا نصف قطر ج اور سیال کی کمیت (۲ کہ - مہ) ج ہے جہاں ث کہ = د۔ ثابت کرو کہ توازن کی شرطیں پوری ہوتی ہیں اگر ث، ر۲ کے بالعکس متناسب ہو۔

۲ ـــــ ایک کرہ (نصف قطر ص) پانی سے عین بھرا ہوا ہے اور انتصابی محور کے گرد زاوئی رفتار ـــ کے ساتھ گھومتا ہے اس طرح کہ ص ـــ = ۲ ج۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی جو سطح کرہ کو علی القوائم قطع کرتی ہے اس میں دباؤ ۳ ج ث ع/۴ ہے جہاں ث پانی کی کثافت ہے۔

۳ ـــــ مائع کی کچھ کمیت تین محدودوں کے مستویوں کے درمیان واقع ہے ان مستویوں میں سے ہر ایک ایسی قوت سے مائع کو جذب کرتا ہے جو فاصلے کے متناسب ہے اور کشش کی مطلق قوتیں مہ، مہَ، مہً سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ ایک نصف ناقص نما اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ اس کا مستوی رُخ ایک مستوی پر واقع ہے اور اس کی منحنی سطح دوسرے دو مستویوں کو مس کرتی ہے اس کے محور محدودوں کے محوروں کے متوازی ہیں اور

ا/مہ، ا/مہَ، ا/مہً

کے بالعکس متناسب ہیں۔

اگر ناقص نما کو ڈھانپ دینے کے لیئے سیال ناکافی ہو تو غیر ڈھنپا ہوا حصہ ایک دائرہ سے محدود ہوگا۔

۴ ـــــ مائع کی کچھ کمیت اپنے ذرات کے باہمی جذب کے تابع ہے اور ایک دفاعی قوت مائع کے مرکز میں سے گذرنے والے ایک مستوی سے پرے ہٹانے کا اثر رکھتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس مستوی سے عمودی فاصلہ۔

ثابت کروکہ توازن کی شرطیں پوری ہونگی اگر سطح ایک خاص ہلیلیجبت کالمبوترا کرہ نما ہو بشرطیکہ دفاعی قوت بہت زیادہ بڑی نہ ہو۔

۵ — ایک مثلثی رقبہ سیال میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع سیال کی سطح میں ہے۔ اس مثلث میں سب سے بڑے ممکن رقبہ کا قطع ناقص بنایا گیا ہے۔ ثابت کروکہ مثلث کے بقیہ حصہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی اس کے

زیر ترین نقطہ کی گہرائی کا $\frac{\text{۱۸ ما}\overline{\text{۳}} - \text{۵ ۱۱}}{\text{۳۶ ما}\overline{\text{۲}} - \text{۱۲ ۱۱}}$ ہے۔

۶ — سیال جو کلیہ نیوٹن کے بموجب جاذب بالذات ہے ایک ظرف میں عین بھر جاتا ہے۔ یہ ظرف ناقص نما $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱$ کی شکل کا ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ اور ظرف پر اعظم اور اقل دباؤ کے نقطے معلوم کرو۔

۷ — اگر ایک ذوار بعتہ الاضلاع رقبے کے راسوں کی گہرائیاں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں اور رقبہ مائع میں پوری طرح غرق ہو اور اس کے مرکز ثقل کی گہرائی ف ہو تو اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{۱}{۲}(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) - \frac{۱}{۶\,\text{ف}}(\text{بہ جہ} + \text{جہ عہ} + \text{عہ بہ} + \text{عہ ضہ} + \text{بہ ضہ} + \text{جہ ضہ})$$

۸ — ف ارتفاع کا ایک مخروطی ظرف، راس نیچے وار، مائع سے بھر دیا گیا ہے مائع کی کثافت لہ لا ہے جہاں لا گہرائی ہے۔ اس کو دوسرے ظرف میں جو ایک گردشی سطح کی شکل کا ہے ڈال دیا گیا ہے جس میں یہ معلوم ہوا کہ اس کی کثافت مہ لا^{۲} ہے۔ ثابت کروکہ ظرف کی شکل اس مساوات

$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{لہ}}\,\text{لا}\left(\text{ف} - \frac{\text{مہ}}{\text{لہ}}\,\text{لا}^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} \text{مس}^{۲}\,\text{عہ}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۹ — مثلثی تراشش ا ب ج کا ایک بند، ضلع ب ج پر پانی کا دباؤ تھامتا ہے۔ ایسی شرط معلوم کروکہ زاویہ ا کے گرد یہ بند الٹ نہ جائے جبکہ پانی

مثلث کے راس ب تک پہنچ جائے۔

اگر مثلث کے رقبہ کو کم سے کم کر دیا جائے اس طور پر کہ پانی کی دی ہوئی گہرائی کے لئے قائمیت برقرار رہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{سس ج} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{س} + 9}}{3 - \text{س}}$$

$$\text{سس ا} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 2\,\text{س} + 9}}{\text{س} - 1}$$

جہاں بند کی کثافت نوعی س ہے۔

۱۰۔ سیال کی کچھ کمیت اپنی خود کشش کے زیر عمل توازن میں ہے ثابت کرو کہ کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کا دباؤ اس مساوات

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{1}{\text{ث}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{1}{\text{ث}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\left(\frac{1}{\text{ث}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}\right) = -4\pi\,\text{ث}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ث نقطہ (لا، ما، ی) پر کی کثافت ہے۔

سیال کی لامتناہی کمیت (ایسی کہ د = ک ث^2 جہاں ک مستقل ہے) ایک استوار کروی خول کو گھیرے ہوئے ہے اور خود اپنی کشش کے زیر عمل توازن میں ہے لامتناہی پر دباؤ π ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۱۱۔ کشتیوں کا ایک پل، ایک مستوی استوار راستے ا ب کو افقی محل میں تھامتا ہے۔ اگر ایک چھوٹا متحرک بوجھ نقطہ گ پر رکھا جائے تو پل یکساں طور پر نیچے دبتا ہے۔ جب بوجھ نقطہ ج پر رکھا جاتا ہے تو سرا ا اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے، جب نقطہ د پر تو سرا ب اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے، اور جب نقطہ ن پر تو راستہ کا نقطہ ق اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے۔

ثابت کرو کہ ا گ × گ ج = ب گ × گ د = ن گ × گ ق

اور یہ کہ نقطہ ن پر کے ایک بوجھ سے نقطہ ما پر جو انحراف پیدا ہوتا ہے وہ اس انحراف کے مساوی ہے جو اسی بوجھ کو نقطہ ما پر رکھنے سے ن پر پیدا ہوتا ہے۔

۱۲ا۔۔۔ ایک پیالہ تیل میں سیدھا تیر رہا ہے اور اس کے اندر پانی ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو اور اُس کا نقشہ کھینچو جب دونوں مائعات کی سطحوں کا فرق اغراق کے تمام درجوں کے لئے وہی ہو۔

۱۳ا۔۔۔ کسی شکل کے ظرف میں کچھ مائع ہے اور اسکو مختلف شکل کے دوسرے ظرف میں بہنے دیا جاتا ہے۔ اگر علی القوائم محددوں کے لحاظ سے (جو ظروف پر منحصر نہیں ہیں) نقطہ (لا، ما، ی) پر کسی ظرف میں دباؤ د ہو تو ∭ (د فرلا فرما فری) کی دونوں قیمتوں کے درمیان فرق اس کام سے جو مائع نے اوپر والے ظرف سے نچلے ظرف میں بہ آنے میں کیا ہے اس قدر فرق رکھتا ہے جو اُس کام کے مساوی ہے جو نچلے ظرف میں سیال کی سطح کو اُسی افقی مستوی پر لانے میں درکار ہوتا ہے جو اوپر والے ظرف میں سیال کی ابتدائی سطح تھی۔

۱۴ا۔۔۔ گردشی مکافی نما کی شکل کے ایک ظرف میں کچھ سیال ہے جو مکافی نما کے انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ زاویائی رفتار معلوم کرو جبکہ سیال عین ڈھلکنا شروع کرے۔ اور ثابت کرو کہ اگر یہ زاویائی رفتار $\sqrt{ج/ل}$ ہو تو ظرف سیال سے نصف بھرا ہوا ہونا چاہیئے۔

اگر مکافی نما گردشی نہ ہو بلکہ $ی = \frac{لا^2}{ل} + \frac{ما^2}{ل'}$ کی شکل کا ہو اور محور (ی) انتصابی ہو اور اگر سیال کی سطح جس منحنی پر ظرف کو ملتی ہے اس کے اعظم اور اقل ارتفاع $ی_1$، $ی_2$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ی_2} - \frac{1}{ی_1} = \frac{\omega^2}{2\,ج\,ک}(ل - ل')$$

جہاں دونوں مکافی نماؤں کے راسوں کے درمیان فاصلہ ک ہے۔

۱۵ا۔۔۔ ایک اسطوانی ظرف غواص انتصابی محور کے ساتھ اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ پانی ظرف کے نصف حصہ تک چڑھ جاتا ہے۔ ظرف کی اوپر کی سطح کے مرکز سے اس کے مرکزِ ثقل کا اقل فاصلہ معلوم کرو جو اس شرط کے مطابق ہو کہ توازن محور کے زاویائی ہٹاؤ کے لحاظ سے قائم ہو سکے۔

۱۶۔ ــــ بے لچک سیال، قوتوں

$$\frac{\text{مہ لا}}{\text{ا}^2}،\ \frac{\text{مہ ما}}{\text{ب}^2}،\ -\frac{\text{مہ ی}}{\text{ج}^2}$$

کے زیر عمل ساکن ہے جو علی الترتیب محوروں کے متوازی ہیں۔ ایک ذرہ جس کی کثافت سیال کی کثافت سے کم ہے سطح

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = \text{ک}$$

میں کسی جگہ رکھ دیا گیا ہے۔ مزاحمت نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار سطح (جسکی تعیئن مقدار ک' سے ہوتی ہے) سے گزرتے وقت ایسے بدلتی ہے جیسے $\sqrt{\text{ک}' - \text{ک}}$۔

۱۷ ــــ ایک لچکدار کروی لفافہ توازن کی حالت میں ہے جبکہ اس میں کرہ ہوائی کے دو چند کثافت کی ہوا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی نصف قطر کا دو چند ہے۔ اگر بار پیما کا ارتفاع $\frac{1}{\text{ن}}$ انچ اُتر جائے تو لفافہ کے ناپ میں صغیر اہتزاز کا وقت دریافت کرو۔

۱۸ ــــ ایک قائم مخروط ایک ظرف میں جسکے اندر دو دئے ہوئے سیالوں کی گہرائیاں مساوی ہیں اس طرح ٹکا ہوا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اسکا راس ظرف کی تہہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ قائم توازن کی شرط معلوم کرو۔

۱۹ ــــ ایک سیدھا یکساں ڈنڈا ایسے مادہ پر مشتمل ہے جس کی کشش، $(\text{فاصلہ})^{-1}$ کے متناسب ہے۔ اس کے گرد ساکن سیال ہے جو صرف اس کی کشش کے ماتحت ہے۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحوں کی نصف النہاری تراشوں کی تفرقی مساوات اس شکل

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{سا} + \text{لوک}\,\frac{\text{ر}}{\text{ر}} = 0$$

میں رکھی جا سکتی ہے جہاں ڈنڈے کے سروں سے نقطہ (لا، ما) کے فاصلے ر، ر ہیں اور ڈنڈے کے محاذی اس نقطہ پر زاویہ سا بنتا ہے۔

۲۰ ——— مکافی نما کا ایک حصہ، وتر خاص ۴ ا، ایک مستوی سے جو راس سے ۳ ا فاصلہ پر محور پر عمود وار ہے کاٹ لیا گیا ہے۔ اگر مکافی نما کا راس ایک مائع کی سطح کے نیچے $\frac{۱۳}{۲}$ ا گہرائی پر ثابت کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ساکن رہے گا ایسے کہ اس کا ماسکہ مائع کی سطح میں ہوگا اگر مائع کی کثافت کو مکافی نما کی کثافت سے نسبت ۷۲۹ : ۲۳۲ ہو۔

۲۱ ——— سیال کی کچھ کمیت (ک) ایک ثابت محور کے گرد دی ہوئی مستقل زاوئی رفتار کے ساتھ گھومتی ہے اور محور کے ایک نقطہ کی طرف دی ہوئی قوت سے جذب ہوتی ہے جو فاصلہ کے متناسب ہے۔ سیال کی کثافت کسی نقطہ پر ایک دی ہوئی مستقل مقدار اور ایک ایسی مقدار کا مجموعہ ہے جو اس نقطہ پر کے دباؤ سے دی ہوئی مستقل نسبت رکھتی ہے۔ آزاد سطح کی شکل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا اقل نصف قطر (ب) اس مساوات

$$ک = م \int_{ب}^{ب} و^{\frac{ب^{۲} - لا^{۲}}{گ^{۲}}} لا^{۲} \, فرلا$$

سے متعین ہوتا ہے جہاں م اور گ مستقل ہیں۔

۲۲ ——— ایک دافع قوت فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہے اور اسکا مرکز ایک متجانس بے لچک سیال کی آزاد سطح کے نیچے واقع ہے۔ یہ سیال ساکن ہے اور جاذبہ ارض کے زیر عمل بھی ہے قوت کی شدت اُس نقطہ پر جو سیال کی آزاد سطح میں قوت کے مرکز سے انتصاباً اوپر واقع ہے جاذبہ ارض کی شدت کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ سیال کی بیرونی سطح ایک اُفقی متقارب مستوی رکھتی ہے اور قوت کا مرکز ایک اندرونی جوف سے محصور ہے جس کی چوٹی سیال کی بیرونی سطح میں ہے۔ جوف کا حجم اس کے طول کے رقوم میں معلوم کرو۔

۲۳ ——— مربع قاعدے کے ایک قائم منشور کے ساتھ دوسرا منشور جس کا قاعدہ بھی مربع ہے چپکا دیا گیا ہے اس طرح کہ انکے محور منطبق ہیں اور اضلاع متوازی ہیں۔ یہ کل نظام ایک سیال میں اس طرح تیرتا ہے کہ ان کا مشترک مستوی تیراؤ کے مستوی میں ہے۔ اگر منشوروں کے قاعدوں کے اضلاع ۲ : ۱ کی نسبت میں ہوں تو

ان کے انتہائی ارتفاع معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے ۔

۲۴ ـــــ ایک وزنی مکعب ایک ایسے محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے جو ایک رخ کے مقابل ضلعوں میں سے گزرتا اور ان کی تنصیف کرتا ہے ۔ اس محور کو افقی طور پر ایک خالی ظرف میں ثابت کر دیا گیا ہے اس طرح کہ مکعب توازن کے محل میں تھما ہوا ہے ۔ کس گہرائی تک سیال کو ظرف میں ڈالا جائے کہ توازن غیر قائم ہو جائے ۔ مکعب اور سیال کی کثافتوں کی بڑی سے بڑی نسبت معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو سکے ۔

یہ فرض کر کے کہ مکعب نصف غرق ہے اور توازن قائم ہے صغیر اہتزاز کا وقت معلوم کرو ۔

۲۵ ـــــ ایک اسطوانہ جس کا محور انتصابی ہے ایک سیال میں تیر رہا ہے جس میں کسی نقطہ پر کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی ن ویں قوت ۔ اسطوانہ کو اتنا نیچے دبا دیا گیا ہے کہ اس کا اوپر والا رخ سیال کی سطح پر عین منطبق ہوتا ہے اور جب اسطوانہ کو چھوڑ دینے پر اسطوانہ سیال کے عین باہر اٹھ آتا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب اسطوانہ تیر رہا تھا تو غرق شدہ گہرائی کو اسطوانہ کے ارتفاع سے وہی نسبت تھی جو ۱ کو $(ن+۲)^{\frac{۱}{ن+۱}}$ سے ہے ۔

۲۶ ـــــ ایک یکساں گردشی مکافی نما کا ارتفاع ف اور وتر خاص ل ہے اور اس کی کثافت اضافی بلحاظ اس سیال کے جس میں یہ تیر رہا ہے س ہے ۔ ثابت کرو کہ غرق شدہ راس کے ساتھ توازن کا صرف ایک محل یقیناً ہوگا اگر

$$۲ف\left(۲-۳س^{\frac{۱}{۲}}\right) < ۳ل$$

۲۷ ـــــ رقیق مادہ کا ایک ظرف گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے اور اس میں مائع ہے ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا بشرطیکہ اندرونی سیال کی کثافت بیرونی سیال کی کثافت سے بڑی ہو ۔ ظرف کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے ۔

۲۸ ـــــ ایک ناقص مخروط انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جسکی کثافت اسکی

کثافت کا دو چند ہے تیرتا ہے - ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$\text{ن}^2 > \frac{(\text{ا} - \text{ب})^2}{\text{م} - 1} \text{ ، جہاں } \text{م} = \frac{\frac{3}{2}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{4}{3}}}$$

جہاں ناقص مخروط کا ارتفاع ف اور اسکے رخوں کے نصف قطر ا، ب ہیں۔
نیز ناقص مخروط افقی محور کے ساتھ تیرتا ہو تو توازن قائم ہوگا اگر

$$\text{ن}^2 > \frac{3(\text{ا} + \text{ب})^2(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{\text{ا}^2 + 4\text{اب} + \text{ب}^2}$$

۲۹ —— مکعب کی شکل کے ایک ظرف میں مائع ہے، مکعب کا ضلع ۱۲ ا ہے۔ اس کو ۵ ا نصف قطر کے ایک کامل کھردرے ثابت کرہ کے سر پر اس طرح رکھدیا گیا ہے کہ وہ بیکار ہے۔ ظرف کے وزن کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ اگر انتصابی رخوں کے متوازی مستویوں میں ہٹاؤ پیدا کئے جائیں تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ مائع کی گہرائی ۴ ا اور ۶ ا کے درمیان ہو۔

۳۰ —— ایک متساوی الساقین مثلثی پترا جسکے اضلاع اب، اج مساوی ہیں ایک مائع میں جس کی کثافت گہرائی کے متناسب ہے نیچے وار راس کے ساتھ تیرتا ہے اگر اد، ب ج پر عمود ہو اور اگر پترا اس طرح تیر سکتا ہو کہ خط اد انتصابی سمت سے زاویہ ط بنائے تو ثابت کرو کہ ط اس مساوات

$$81\,\text{ثہ}\,\text{جب}^3\text{ط} = 64\,\text{ث}\,\text{جم}^3\text{ع}\,(\text{جب}^2\text{ط} - \text{جب}^2\text{ع})^2$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ جہاں زاویہ ب اج، ۲ع ہے اور پترے کی کثافت ثہ، اور اب یا اج کے مساوی گہرائی پر مائع کی کثافت ث ہے۔

(۲۲۴) ۳۱ —— ایک گردشی مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے۔ اس کے محور کے ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھ کر اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈبویا گیا ہے اسکی شکل معلوم کرو اگر توازن ہمیشہ تعدیلی رہے۔

۳۲ —— اگر ایک جسم سکون میں تیرے تو ثابت کرو کہ کسی ہٹاؤ کے لئے سیال کی

سطح کے نیچے جسم کے اور ہٹائے ہوئے سیال کے مراکز ثقل کے فاصلوں کا فرق عام طور پر اعظم یا اقل ہوگا بموجب اس کے کہ توازن غیر قائم یا قائم ہو بشرطیکہ ہٹائے ہوئے سیال کا وزن تیرنے والی شے کے وزن کے مساوی ہو نیز اگر یہ فرق ے ہو اور جسم ایک انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہو جو اس خط پر عمود ہے جس کے گرد متذکرہ بالا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اور اگر ایک ثابت خط کا میلان جو جسم کے اور اس مستوی کے اندر واقع ہے انتصابی سمت کے ساتھ ط ہو تو چھوٹے اہتزاز کا وقت وہی ہوگا جو سادہ رقاص کا ہوتا ہے جس کا طول ل $\frac{ک^۲}{\frac{فر^۲ ے}{فرط^۲}}$ ہو جہاں ک اس خط کے گرد گردش کا نصف قطر ہے جو جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور ہٹاؤ کے محور کے متوازی ہے۔

ان شرطوں کو بیان کرو جو ان مسائل کی عمومیت کو محدود کرتے ہیں۔

۳۳ — ایک ناقص نما ایک سیال میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے اس طرح تیرتا ہے کہ اس کا اقل محور (۲ د) انتصابی مستوی میں ایک نقطہ کے گرد جو ثابت محور اعظم (۲ ا) میں واقع ہے چھوٹے اہتزازات کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دور

$$۲\pi\sqrt{\frac{۸}{۱۵}\cdot\frac{د}{ج}\cdot\frac{۵ کہ^۲ + ا^۲ + د^۲}{۴ کہ^۲ + ا^۲ - د^۲}}$$

ہے جہاں ثابت نقطہ کا مرکزی فاصلہ کہ ہے۔

۳۴ — ایک رقیق ریل گاڑی ایک زمین دوز راستہ میں جس میں یہ ٹھیک سما سکتی ہے آزادانہ حرکت کرسکتی ہے۔ اسکو ایک سرے پر ساکن رکھا گیا ہے اور ایک انجن دوسرے سرے پر راستہ کے اندر کی ہوا کو خالی کرنا شروع کرتا ہے اور مساوی وقفوں میں مساوی حجم کی ہوا خارج کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت پر گاڑی کا فاصلہ اس سرے سے جسطرف کو یہ جا رہی ہے شکل ذیل کی مساوات سے معلوم ہوتا ہے۔

$$لا \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} + ب \frac{فر لا}{فرت} + ن (لا + ب ت) = ن ل$$

۳۵ — ایک گردشی مجسم میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے۔ اگر اس کا ایک حصہ

ایسے مستوی سے کاٹ لیا جائے جو اسکے محور پر عمود وار ہے اور اگر اسکو نیچے وار راس کے ساتھ مائع میں غرق کر کے ایک چھوٹے زاویہ میں پھرا دیا جائے تو استقراری معیار کیٹے ہوئے حصہ کی مقدار پر منحصر نہیں ہوتا۔ ثابت کرو کہ اگر ما = ف (لا) تکوینی منحنی ہو تو ف کو معین کرنیوالی مساوات ہے

$$\left[ن (لا)\right]^2 = ث \left[۱ + \{ف (لا)\}^2 + ف (لا) نً (لا) \right] \left[ف \{لا + ف (لا) فً (لا)\} \right]^2$$

جہاں مجسم کی کثافت بلحاظ سیال کے ث ہے۔

۳۶ —— رنصف قطر کے ٹھوس نیم کرہ سے ایک حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے یہ حصہ قائم اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور جسکا محور کرہ کا محور اور جس کے قاعدہ کا مرکز کرہ کا مرکز ہے۔ کرہ کے اس حصہ میں ایک پتلی نلی رکھدی گئی ہے جو اس میں ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ پھر اس کو نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں رکھ کر نلی میں ث کثافت کا سیال ڈالا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ کس قدر سیال اس میں ڈالا جائے کہ توازن تعدیلی ہو جائے۔ اگر نلی میں ۲ ف ارتفاع تک سیال داخل کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ث}{ۃ} = \frac{ر^4 - ۲ ب^2 ف^2}{ب^4}$$

جہاں ٹھوس جسم کی کثافت ۃ ہے۔

۳۷ —— ایک جسم متغیر کثافت کے مائع میں تیر رہا ہے۔ اس کے محل میں ذراسی تبدیلی کردی گئی ہے اس طرح پر کہ ہٹائے ہوئے مائع کی کمیت غیر متبدل رہتی ہے۔ اگر ی گہرائی پر کثافت ف (ی) ہو اور جسم کی غرق شدہ سطح میں سے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما، ی) ہوں جبکہ سطح کو حوالے کا مستوی لا ما فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ تیراؤ کے مستوی میں کا وہ نقطہ جسکے گرد جسم گھومتا ہے اس مستوی کا مرکز ثقل ہے جسکو ایک پتر سے کے مانند خیال کیا گیا ہے جسکی کثافت (۲۲۵) نقطہ (لا، ما) پر ف (ی) ہے۔

۳۸ —— ایک پیالہ کی بیرونی سطح ل وتر خاص کا ایک مکافی نما ہے اور

اسکی موٹائی افقی سمت میں ہر نقطہ پر ایک ہی ہے اور بمقابلہ ل کے بہت چھوٹی ہے۔ یہ پیالہ راس کے اوپر ف ارتفاع پر دائری کور رکھتا ہے اور ر نصف قطر کے ایک کرہ کے بلند ترین نقطہ پر ٹکا ہوا ہے۔ اگر اس میں اتنا پانی ڈالا جائے کہ اس کی سطح پیالہ کے محور کو راس سے $\frac{۳}{۲۰}$ ف فاصلہ پر قطع کرے اور اگر پانی کا وزن پیالے کے وزن کا چار گنا ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{ر - ۲ل}{۲ر + ل} > \frac{ف}{ل}$$

۳۹ —— ایک متساوی الساقین مثلثی پترا ا ب ج ساکن ہے اس طرح کہ اس کا مستوی انتصابی ہے اور راس ج مائع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت ہے۔ مائع کی کثافت گہرائی کے متناسب ہے۔ اگر پترے کی کثافت اتنی ہو جتنی کہ مائع کی کثافت گہرائی د پر ہے اور مثلث کا ارتفاع ف، سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$۸\,د\,ف^{۳}\,جم^{۲}(ط + ع)\,جم^{۲}(ط - ع) = ۳\,گ^{۴}\,جم^{۲}ع\,جم\,ط$$

جہاں زاویہ ا ج ب = ۲ ع ۔

۴۰ —— ۲ ف ارتفاع اور ا نصف قطر کے مجوف اسطوانہ کے اندر پانی ہے اور اسطوانے کے سر سے بند ہیں اسکو ر نصف قطر کے ایک کھردرے کرہ پر اسطرح رکھا گیا ہے کہ اس کے قاعدے کا مرکز کرہ کے بلند ترین نقطہ کو مس کرتا ہے۔ پانی کا وزن اسطوانے کے وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر اسطوانہ میں پانی کے ارتفاع کا طول مساوات

$$۲\,لا^{۲} - ۴\,(۲ر - ف)\,لا + ا^{۲} = ۰$$

کی اصلوں کے درمیان واقع ہو۔

۴۱ —— گردشی مکافی نما کی شکل کا ایک بے وزن خول ایک متشابہ خول میں ٹکا ہوا ہے جسکا مبدل قبل الذکر کے مبدل کا دوچند ہے، اس کے اندر سیال ہے

جسکی کثافت (گہرائی)ⁿ کے متناسب ہے۔ سیال کی گہرائی معلوم کرو تاکہ توازن تعدیلی ہو۔

۴۲ ـــــ باریپما کا ارتفاع ۳۰ انچ اور پارہ کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے ۱۳٫۵۹۶ ہے اور پانی کے ایک مکعب انچ کا وزن ۲۵۲٫۴۷ گرین ہے۔ ان حالات کے تحت کرہ ہوائی کی ایک مکعب گز ہوا ایک ظرف میں جسکی گنجائش ایک مکعب فٹ ہے بچکادی گئی ہے۔ اس میں جمع شدہ توانائی کی مقدار تقریباً معلوم کرو۔

۴۳ ـــــ پانی اور شیشے کے پھیلاؤ ضوابط

$$ح_{ت} = ح_{۴}\left\{۱ + ع\,(ت - ۴)^{۲}\right\} \text{ اور } ح_{ت} = ح_{۰}\,(۱ + ۵\,ع\,ت)$$

سے معلوم ہوتے ہیں جہاں ت تپش سنتی گریڈ ہے۔ اگر ایک آبی تپش پیما بنایا جائے اور اس کی درجہ بندی معمولی سیمابی تپش پیما کی طرح کیجائے تو ثابت کرو کہ نقاط انجماد و جوش کے سوا مختلف تپشوں پر اس کا ارتفاع صحیح تپش کو بہت گھٹا کے ظاہر کریگا اور ۰° سے ۱۳° سے کچھ زیادہ تک اس سے جو ارتفاع ملیگا وہ منفی ہوگا اور خطا سب سے بڑی ہوگی جبکہ ۵ ع ت^{۲} + ۲ ت = ۱۰۰۔

۴۴ ـــــ ہوا کی کچھ مقدار جسکی کثافت ث اور جسکا دباؤ د ہے کروی ظرف میں بند ہے۔ اگر کرہ کے مرکز پر قوت مہ ف^{ن} کا مرکز رکھدیا جاسے تو ثابت کرو کہ مرکز سے ر فاصلہ پر ہوا کی کثافت ہوگی

$$\frac{ن+۱}{۳}\left\{\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{جا}\left(\frac{۳}{ن+۱}\right)}\right\}\left\{\frac{مہ\,ث^{\frac{ن+۱}{۳}}}{د\,(ن+۱)}\right\}^{\frac{۱}{ن+۱}} \quad \text{قو}^{\frac{مہ\,ث}{د\,(ن+۱)}\,ر^{ن+۱}}$$

قوت کی شدت اس قدر بڑی فرض کیگئی ہے کہ ظرف کے ساتھ تماس رکھنے والی ہوا کی کثافت نظر انداز کیجاسکتی ہے۔

(۲۲۶) ۴۵ ـــــ سطح زمین پر کرہ ہوائی کا دباؤ د اور کثافت ث ہے اور بلند تر نقطوں پر کی تپش زمین کے مرکز سے فاصلے کی ن ویں قوت کے بالعکس متناسب ہے

ثابت کرو کہ زمین کے مرکز سے ر فاصلہ پر دباؤ د ہے ایسا کہ

$$\text{لوک}\ \frac{د}{د_0} = \frac{\text{ج ث}\left(ا^{ن-1} - ر^{ن-1}\right)}{(ن-1)\, د_0\, ا^{ن-2}}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ا ہے۔

اگر ن = ۱ تو ثابت کرو کہ ایک کروی غبارے کا حجم جبکہ مادہ تمام سمتوں میں مساوی طور پر امتداد پذیر ہے بڑے سے بڑا ہوگا جب راس مساوات

$$د_0(م-1)\frac{ا^م}{ر^م} = \frac{2ل}{ک}\left\{1 - م^{\frac{1}{3}}\frac{ا^{\frac{م-1}{3}}}{ر^{\frac{م-1}{3}}}\right\}$$

سے معلوم ہو جہاں $م = \frac{\text{ج ث ا}}{د_0}$، لچک کی قدر ل، اور غبارے کا قدرتی نصف قطر ک ہے۔ یہ معلوم ہے کہ جب غبارہ زمین سے اٹھتا ہے تو عین بھرا ہوا ہوتا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی ہوتا ہے۔

۴۶ — ایک غبارہ کسی خاص لمحہ میں ف بلندی پر ہے، س رفتار سے نیچے اتر رہا ہے اور افقی سمت میں سَ رفتار سے حرکت کرتا ہے جو اس بلندی پر ہوا کی رفتار ہے۔ اگر ہوا کی رفتار بلندی کے متناسب ہو اور اگر کسی خاص مقام پر اترنے کے مقصد سے گیس کو اس طرح خارج کیا جائے کہ اتار کی رفتار مستقل رہے تو ثابت کرو کہ ابتدائی بلندی کے اندازے میں فرف کی خطا واقع ہونے سے جس نقطہ پر غبارہ پہنچتا ہے اس نقطہ میں

$$\frac{\text{سَ فرف}}{ک^2 س^2}\left\{1 + \frac{1}{2}ک^2 - ق^{ک}(1+ک)\right\}$$

کی خطا پیدا ہو جائے گی جہاں $ک = \frac{ج ف}{س^2}$

۴۷ — ثابت کرو کہ سیمٹن (Smeaton) کے ہوا پمپ کی (ن + ۱) ویں

ضرب میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\pi\left(\frac{\text{ا}}{\text{ا}+\text{ب}}\right)^{\text{ن}}\left\{(\text{ن ب}+\text{ا})\,\text{لوک}\left(1+\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)+\text{ب}\right\}$$

کے مساوی ہے اگر ہوا کے پھیلاؤ کو ہم تپشی فرض کرلیا جائے جہاں ا قابلہ کا اور ب نالی کا حجم ہے۔

۴۸ — اگر انکثیف ہم تپشی ہو تو ایک مکثفہ کی ن ویں ضرب میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرو۔

۴۹ — ا حجم کے ایک قابلہ میں اگر ب گنجایش کے ایک کثف کرنے والے پمپ سے ہوا اس قدر تیزی سے داخل کی جائے کہ ایصال سے حرارت کا جو نقصان ہوتا ہے اس کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے تو ثابت کرو کہ ن ضربوں کے بعد قابلہ میں ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کا $(1+\text{ن ب}/\text{ا})^{\text{ج}}$ گنا ہوگا۔ یہ معلوم کرو کہ قابلہ میں تپش کیا ہے اور پچکانے میں جو کام ہوا اُسے دریافت کرو۔

نیز قابلہ میں ہوا کا دباؤ معلوم کرو جبکہ ایصال سے تپشی توازن پھر برقرار ہو جائے۔

۵۰ — دی ہوئی کمیت اور نصف قطر کا ایک ٹھوس کروی مرکزہ لچکدار سیال (د = ک ث) کے تجاذبی کرہ ہوائی سے گھرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ دباؤ کا تعین کرنیوالی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر ر}}\left(\frac{\text{ر}^2}{\text{د}}\,\frac{\text{فر د}}{\text{فر ر}}\right)+\frac{4\pi}{\text{ک}^2}\,\text{ر}^2\,\text{د}=0$$

کن شرطوں کے تحت دباؤ کی شکل $\frac{\text{ل}}{\text{ر}^2}$ ہو سکتی ہے۔

۵۱ — اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین کے اندر مساوی کثافت کی سطحیں ہم مرکز کرے ہیں اور دباؤ اور کثافت میں ربط $\text{د}=\frac{\text{ک}}{2}(\text{ث}^2-\text{ث}_{\text{و}}^2)$ ہے جہاں $\text{ث}_{\text{و}}$ سطح پر کی کثافت ہے تو ثابت کرو کہ

$$ث = ث_{ا}\,\frac{ا\,جب\,\sqrt{۲\,۲\,ر^{۲}/ک}}{ر\,جب\,\sqrt{۲\,۲\,ر_{ا}^{۲}/ک}}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ا ہے اور مرکز سے زیر بحث نقطہ کا فاصلہ ر۔ کمیت کی تجاذبی اکائی یہاں استعمال کی گئی ہے اور زمین کی فوری گردش کا اثر نظر انداز کیا گیا ہے۔

۵۲ —— ایک ٹھوس جسم دو مکعبوں پر مشتمل ہے جو متشاکلاً باہم ملائے گئے ہیں لیکن مختلف مادے اور مختلف جسامت کے ہیں۔ یہ ٹھوس ایک سیال میں اسطرح تیرتا ہے کہ مشترک سطح مستوی سیال کی سطح میں ہے۔ قائمیت کی شرط معلوم کرو۔

۵۳ —— ایک ٹھوس جسم گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے اور انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے۔ اگر مرکز ثقل مرکز مابعد پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۵۴ —— ایک ٹھوس جسم گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے اور ایک مائع میں جس کی کثافت مکافی نما کی کثافت کا ن گنا ہے تیر رہا ہے۔ اگر مکافی نما کا ارتفاع ف ایسا ہے کہ اس کا مرکز ثقل مرکز مابعد کے اوپر ک بلندی پر ہے تو ثابت کرو کہ توازن کا ایک محل ایسا ہے جس میں محور انتصابی نہیں ہوتا اور قاعدہ پوری طرح مائع کے باہر رہتا ہے اگر ک $<$ ف $(۱ - ن^{\frac{۱}{۲}})^{۲}$۔

۵۵ —— ایک جہاز کے پہلو پانی کے قریب انتصابی ہیں اور ہٹائے ہوئے پانی کا مرکز ثقل ی گہرائی پر ہے۔ جہاز کی کمیت ک ہے۔ ایک چھوٹا بوجھ ط ک جہاز پر متشاکلاً رکھا گیا ہے جس کی وجہ سے جہاز بقدر س گہرائی کے اور ڈوب جاتا ہے۔ اور ی، ی + مف ی ہو جاتا ہے۔ صغیر مقداروں کے مربعوں کو ملحوظ رکھ کر ثابت کرو کہ

$$مف\,ی = س - ط\,ی + ط^{۲}\,ی - \frac{۱}{۲}\,ط\,س$$

۵۶ —— ایک متجانس ناقص نما مائع میں اس طرح تیرتا ہے کہ اس کا اقصل محور

ج و جَ انتصابی ہے اور وزن و لاناقص نما کے وزن کا $\frac{3}{5}$) اوپر کے سرے ج پر ثابت کر دیا گیا ہے اس طور پر کہ تیراؤ کا مستوی مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص نما کو اوسط محور ب ب کے گرد ایک محدود زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو ثابت کرو کہ جفت کا معیار جو اس کو اس محل میں رکھے گا

$$\text{د ا/ج} = \text{ا ز}^2\,\text{جم ط}\left(1 - \text{ز}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط}\right)^{-\frac{1}{2}} \}\ \text{جب ط}$$

ہوگا جہاں تراش (ا/ج) کا خروج المرکز ز ہے۔

۵۷ —— جہاز کے عرشہ پر کے وسطی خط سے ج فاصلہ پر وسط میں ک ٹن کمیت رکھدی گئی ہے جسکی وجہ سے جہاز ایک طرف بقدر چھوٹے زاویہ ط کے جھک جاتا ہے۔ جہاز کا کل ہٹاؤ م ٹن ہے۔ ثابت کرو کہ اس کمیت کی عدم موجودگی میں مرکز ثقل کے اوپر مرکز ما بعد کی بلندی تقریباً $\frac{\text{ک ج}}{\text{م ط}}$ کے مساوی ہوگی اور اس جملہ کو دوسرے رتبہ تک صحیح بنانے میں مقدار

$$\frac{\text{ک}}{\text{م}}\left(\text{ب} - \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\text{فر ج}}{\text{فر ک}}\right)$$

کا اس میں اضافہ کرنا پڑے گا۔ جہاں خط آب کے اوپر ک کے مرکز ثقل کی بلندی ب ہے پیندے کی گہرائی گ ہے، خط آب کی تراش کا رقبہ ا اور جمود کا معیار ج ہے جن کا تقریباً معلوم ہونا فرض کر لیا گیا ہے۔

۵۸ —— تجاذبی کمیت میں ایک چھوٹا کروی جوف (نصف قطر = م) ہے جس کو متجانس بے لچک سیال سے بھر دیا گیا ہے اور کرہ کے مرکز پر کی کشش بالکل معدوم ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا سیالی دباؤ = $\frac{1}{2}$ ث ج م^2 سے کم اور جوف کی سطح پر کل دباؤ = $(\text{ج} + \frac{2}{3}\pi\,\text{ث})\,4\pi\,\text{ث}\,\text{م}^3$ سے کم نہیں ہو سکتا۔ جہاں سیال کی کثافت ث ہے اور تجاذبی کمیت کے قوہ کو فہ سے تعبیر کریں تو عنصر فر س کے لئے جو مرکز سے کسی سمت میں کھینچا گیا ہے مرکز پر $\frac{\text{فر}^2\,\text{فہ}}{\text{د س}^2}$ کی اقل جبری قیمت ج ہے۔

۵۹ —— پانی کا ایک اسطوانی حوض ایک افقی محور پر جھول سکتا ہے۔ یہ محور حوض کی ایک عمودی تراش کا قطر ہے اور اسطوانہ کے ارتفاع کے وسطی حصہ کے عین واقع ہے۔ ثابت کرو کہ پانی باہر نکل پڑنے کے پیشتر حوض میں پانی کی مقدار اگر اس کی سطح آزاد ہو (یعنی اگر حوض پر ڈھکن نہ ہو) بہ نسبت اُس پانی کی مقدار کے کم رہے گی جو اس میں رہتی اگر اس پر ڈھکن ہوتا۔ اگر قبل الذکر صورت میں گردش کے محور کے اوپر ف بلندی تک پانی بڑھ سکتا ہو تو ثابت کرو کہ موخرالذکر صورت میں اس کی اس بلندی میں (ف² + ۲ ک²)^½ - ف کا اضافہ ہو سکتا ہے جہاں گردش کے محور کے لحاظ سے رقبہ ا کی عمودی تراش کا جمود کا معیار ا ک² ہے۔

۶۰ —— مساوی وزن اور نصف قطر ا کے دو کروی بند غباروں کے اندر ایک ہی قسم کی گیس کرۂ ہوائی کے دباؤ Π پر مساوی مقداروں میں ہے ایک غبارہ تو امتداد ناپذیر مادے سے بنایا گیا ہے اور دوسرا امتداد پذیر مادے سے جس کی لچک کی قدر ع ہے۔ ان غباروں کو ایک ہی بلندی پر ایک ہلکی رسی کے سروں پر تھاما گیا ہے جو ایک چکنی چرخی پر سے گزرتی ہے اگر رسی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ غباروں کی بلندیوں میں فرق جب وہ توازن میں ہوں

$\frac{3\Pi}{ج\,ث}$ لوگ $\frac{ر}{ا}$ ہوگا جہاں ر مساوات $ر^3 - ا ر^2 - \frac{3\Pi\, ت\, ا}{8\Pi\, ج\, ت\, ع} = ۰$ کی

حقیقی اصل ہے۔ رسی کا تناؤ ت ہے اور دباؤ Π پر ہوا کی کثافت ث ہے۔ تپش کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے۔

۶۱ —— ایک لچکدار بے تنی ہوئی دائری جھلی کے محیط پر ایک استوار انگوٹھی ثبت کر دی گئی ہے۔ اس کے ایک رخ پر سیالی دباؤ عمل کرتا ہے جس سے جھلی ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کر لیتی ہے۔ یہ معلوم کیا گیا کہ کوئی چھوٹا مربع جو بے تنی ہوئی حالت میں جھلی پر بنایا جائے اور جس کا ایک ضلع ایک نصف قطر پر واقع ہو تو تنی ہوئی حالت میں ایک مستطیل میں تبدیل ہو جاتا ہے جس کے ضلعوں کی نسبت مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ جھلی کی یہ نئی شکل مخروط ہونی چاہیئے۔ اس پر کے سیالی دباؤ

کا قانون معلوم کرو۔

۶۲ —— اگر یہ دیا جائے کہ پانی کا سطحی تناؤ ت ۰۱ ، ۲۰° سی پر ۸۱ ڈاین فی سنٹی میٹر ہے اور $\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{ت}}{\text{۵۵۰}}$ تو صابوں کے ایک بلبلے کے پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جیسے تپش ت بڑھتی جائے۔

۶۳ —— لزج سیال کا ایک قطرہ اپنے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھومتا ہے اور سطحی تناؤ کے سوا کسی قوت کے زیر عمل نہیں ہے اس کی شکل کو ایک گردشی سطح کی شکل مان کر اور ما کو گردش کے محور پر مرکز سے ناپنے سے ثابت کرو کہ نصف النہاری منحنی اس مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}\,(\text{لا}^{۲} + \text{ک}^{۲})}{\sqrt{\text{ما}^{۲}\,\text{را}^{۲}\,(\text{را}^{۲} + \text{ک}^{۲})^{۲} - \text{لا}^{۲}\,(\text{لا}^{۲} + \text{ک}^{۲})^{۲}}}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں را استوائی نصف قطر ہے۔

۶۴ —— ایک نلی قدرتی نصف قطر را کے قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل کی ہے اور کامل ملائم مادے سے بنی ہے جو ملکوں کی سمت میں امتداد ناپذیر ہے لیکن ملکوبینی دائروں کی سمت میں لچکدار ہے۔ ٹھیک بیٹھنے والی دو تھالیاں اس کے سروں پر اچھی طرح ثبت کردی گئی ہیں اور پھر دئے ہوئے دباؤ کی گیس اس میں داخل کی گئی ہے۔ تھالیاں آزادانہ طور پر ایک دوسرے کے قریب آسکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ نصف النہاری تراش کی تفرقی مساوات ہے

$$\text{ما}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرس}^{۲}} + \text{۲ ما}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)^{۲} = \text{م}\,(\text{ا} - \text{را})\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)^{۳}$$

جہاں م لچک اور دباؤ کا تفاعل ہے۔

تمام دباؤں کے لئے نلی کے صدری نصف قطر انحنا تھالیوں پر ۲ اور ۱ کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

نلی کے مختلف ابتدائی طولوں کے لئے سب سے چوڑے نقطہ پر نصف النہاری

تراش کا انحنائے اعظم $\frac{م}{د}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{م}\right)^2$ ہے اور دوسرا صدری انحنا ہے

$$\frac{1}{د}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{م}\right)$$

۶۵ — ک کمیت کے صابونی بلبلے میں ہوا ہے جو کلیہ بائل کی پابندی کرتی ہے۔ اور جھلی کا تناؤ (ت) نصف قطر کی چھوٹی تبدیلیوں سے متغیر نہیں ہوتا۔ جھلی حالِ توازن کے گرد چھوٹے اہتزازات کر رہی ہے۔ اگر جھلی کی کروی شکل میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ اہتزاز کا وقت $\sqrt{\frac{\pi\, ک}{۳\, ت}}$ ہے جہاں ہوا کا جمود نظر انداز کیا
۲۲۱ گیا ہے اور بلبلہ خلا میں رکھا گیا ہے۔

۶۶ — ج مبدل کے ایک زنجیرہ کو ایک وتر کے گرد جو مرکز سے کے متوازی اور اس سے ک فاصلہ پر ہے گھما کر ایک بند سطح حاصل کی گئی ہے۔ اگر اس میں ث کثافت کا مائع بھر دیا جائے جو یکساں زاوی رفتار سہ سے محور کے گرد گھوم رہا ہے اور اس کو اسی قسم کے مائع میں ڈبویا جائے اور اگر اس میں ایک سوراخ ہو جس میں سے بیرونی و اندرونی مائع کی آمدورفت ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ محور سے ر فاصلے پر صدری تناؤ ہونگے

$$\frac{ث\, سہ^2 ر^3 (ک - ر)}{۵\, ج} \quad \text{اور} \quad \frac{ث\, سہ^2 ر^3 (۴ ک - ۵ ر)}{۸\, ج}$$

۶۷ — اگر ایک صابونی بلبلے کے ذرات فاصلے کے معکوس مربع کے قانون کے بموجب ایک دوسرے کو دفع کریں اور اگر ف قوہ ہو تو ثابت کرو کہ $ف^2 = ۱۶\, \pi\, ر\, ت$، جہاں ر بلبلے کا نصف قطر اور ت تناؤ ہے۔

۶۸ — پیتل کے ایک کروی خول میں (نصف قطر ا) اتنا پانی زور سے داخل کیا گیا ہے کہ اس کا نصف قطر ر تک پھیل جاتا ہے۔ اگر خول کی لچک کی شرح کھنچنے میں م ہو اور پانی کے پچکاؤ کی شرح ل تو ثابت کرو کہ خول میں پانی کی مقدار ہے

$$\frac{4}{3}\,\pi\, ث\, \frac{ا ر^3}{ا ر - ۲ ل مہ (ر - ا)}$$

جہاں ث پانی کی کثافت ہے جبکہ اسکو دبچکایا گیا ہو۔
اس سوال میں حسب ذیل باتیں معلوم ہیں
ا = ۲ سمر، ر = ۵ سمر، ایک کرہ ہوائی (۱۰ لاکھ ڈائن فی مربع سنتی میتر) کے لئے پانی کا پچکاؤ = $10^{-5} \times 5$، خول کی موٹائی = ۰۵ ملی میتر اور ایک مربع ملی میتر تراش کے پیتلی تار کے طول کو دو چند کرنے کے لئے ۹۰۰۰ لاکھ ڈائن کی قوت درکار ہوتی ہے اگر اس کی لچک مستقل رہے غیر معلوم مقداروں کو س۔گ۔س نظام میں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ کرہ میں پانی کی کمیت = ۵۲۵ گرام تقریباً۔
۴۹ — ایک نصف کروی ملبلہ پانی پر تیر رہا ہے اس کا نصف قطر ایسا ہے کہ اندرونی و بیرونی دباؤں کے فرق کو جو بیرونی دباؤ سے نسبت ہے وہ ایک صغیر مقدار ہے جبکا مربع نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ بلبلے کے اندر پانی کی سطح کی شکل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ بیرونی آبی سطح کے نیچے اس کی بڑی سے بڑی گہرائی ہے

$$\frac{2\, ا^2}{ر}\left\{1 - \frac{2\,\mu}{\int_0^{\pi/2} \sqrt{ر^2 \ldots}\ \text{جب فہ}\ \text{ف}\,\text{فہ}}\right\}$$

جہاں ملبلے کا نصف قطر ر ہے اور فی اکائی رقبہ پانی اور ہوا کے لئے جو سطحی توانائی ہے اس کو پانی کے اکائی حجم کے وزن کے ساتھ نسبت $ا^2$ ہے۔
۵۰ — گفرڈ (Giffard) کی انجمادی مشین میں دو اسطوانے ہوتے ہیں اور ایک بڑا ہوا کا ذخیرہ جس کی تپش خارجی ہوا کی تپش کے مساوی رکھی جاتی ہے۔ اسطوانوں کے فشار سے ایک دہرے پرکے دو گردونیوں (Cranks) کے ساتھ لگے ہوتے ہیں اور دہرے کو طاقت کے خارجی ماخذ سے چلایا جاتا ہے پہلے اسطوانے میں ہوا اس قدر پچکائی جاتی ہے کہ اس کا دباؤ وہی ہو جائے جو خزانہ میں ہے اور پھر کھلندن کھلتے ہیں اور ہوا خزانہ میں داخل ہوتی ہے جیسے ایک ضرب کی تکمیل ہو جاتی ہے۔ دوسرا چھوٹا اسطوانہ انجن کی طرح عمل کرتا ہے جس میں پچکی

ہوئی ہوا ضرب کے اس حصہ عمل میں خزانہ سے داخل ہوتی ہے اور ضرب کے بقیہ حصۂ عمل میں پھیل کر کرہ ہوائی کے دباؤ پر خارج ہو جاتی ہے۔ خارج ہوتے وقت اس ہوا کی تپش گھٹی ہوئی ہوتی ہے۔ اگر اسطوانوں کے حجم $ح_1$ اور $ح_2$ ہوں اور اگر پچکاؤ اور پھیلاؤ کو حرناگزر فرض کرلیا جائے تو ثابت کرو کہ ہر ضرب میں پہلے اسطوانہ میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\pi\, ح_1\, \frac{ج}{ج-1} \times \frac{ح_1 - ح_2}{ح_2}$$

ہے اور دوسرے اسطوانہ میں

$$\pi\, \frac{ج}{ج-1}\left(ح_1 - ح_2\right)$$

ہے۔ π کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔ (ڈاکٹر ہاپکنسن)

١ے — ثابت کرو کہ ایک کروی متجانس ٹھوس زمین پایاب سمندر سے گھری ہوئی ہے (٣٠)
جو دور کے ایک جسم کے زیر کشش ہے۔ اگر پانی پر خود اس کی کشش نظر انداز کردی جائے تو ثابت کرو کہ سمندر کی سطح کروی رہیگی لیکن اس کا مرکز زمین کے مرکز سے بقدر اس فاصلے کے ہٹ جائیگا جو اس کے نصف قطر کو

$$\frac{\text{تجاذبی جسم کی کشش سیال کے ایک عنصر پر}}{\text{زمین کی کشش اسی عنصر پر}}$$

سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

٢ے — اگر زمین کو کروی فرض کرلیا جائے اور اس کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو اور اگر پانی کے ذرات کی کشش ایک دوسرے پر نظر انداز کردی جائے تو ثابت کرو کہ کروی سمندر کی ایلپٹیسٹی مساوات

$$٢\,صہ = \frac{\text{استوا پر مرکز گریز قوت}}{\text{زمین کی سطح پر جاذبہ ارض کی قوت}}$$

سے حاصل ہوگی۔

٣ے — سیال کی کچھ مقدار ایک مادی لمبوترے کرہ نما کی سطح پر پھیلا دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ سیال کی آزاد سطح بھی کرہ نما ہے اور استوا پر سیال کی گہرائی کو جو نسبت قطب پر کی گہرائی سے ہے وہی نسبت کرہ نما کے محور اعظم کو محور اصغر سے ہے۔

٤ے — اگر زمین کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو تو ثابت کرو کہ عرض بلدی پر

سمندر کی گہرائی تقریباً گ (۱ - صہ جیب² ل) ہوگی جہاں گ استواء پر کی گہرائی اور صہ زمین کی بلیلجیت ہے۔

۷۵ —— اگر مائع ایک ثابت محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور اگر اس کے ذرات ایک ایسے قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوں کہ مساوی دباؤ کی سطحیں ہم محور متشابہ چپٹے کرہ نما ہوں تو ثابت کرو کہ کسی کرہ نما کی حاصل کشش جس کے ذرات اسی قانون کے بموجب جذب کرتے ہیں دو قوتوں کا حاصل ہوگی جو علی الترتیب استواء پر اور گردش کے محور پر عمود دار ہیں اور علی الترتیب ایسے بدلتی ہیں جیسے جذب ہونے والے نقطہ کا استواء اور محور سے فاصلہ۔

۷۶ —— دفعہ (۱۹۴) کی صورت میں ثابت کرو کہ تمام مائع میں اوسط دباؤ ناقص نما کے مرکز پر کے دباؤ کا $\frac{۲}{۵}$ ہوتا ہے۔ اگر آزاد سطح کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}=۱$$

ہو اور مائع کی کمیت م تو ثابت کرو کہ نظام کی توانائی بالفعل

$$\frac{۱}{۱۰}\,\text{م}\left\{ ۲\,\text{ج ح} - \text{ا ا} - \text{ب ب} \right\}$$

ہے جہاں مائع کی کشش کے باعث محوروں لا، ما، ی کے سروں پر کی قوتیں ا، ب، ج ہیں۔ گردش محور ی کے گرد ہو رہی ہے۔

۷۷ —— دفعہ (۱۸۸) کی صورت میں مائع کی کمیت کے اندرونی حصہ کے کسی نقطہ پر دباؤ معلوم کرو جبکہ ل اسقدر چھوٹا ہو کر ل² نظر انداز ہو سکے۔

اس صورت میں اگر بلیلجیت ن ہو تو ثابت کرو کہ استوائی مستوی پر

کا دباؤ قوت کی تقریباً $(۵ - ۶\text{ن})(\frac{۱}{۲}\,\text{ث ا}^2)^2 / ۱۵$ فلکی اکائیوں کے مساوی ہوگا۔

جہاں ا اسطوانی نصف قطر ہے۔

۷۸ —— ث کثافت کے تجاذبی یکساں مائع کی لامتناہی کمیت لا انتہا طویل اور پتلے استوار اسطوانے کو گھیرے ہوئے ہے۔ اسطوانہ کی عمودی تراشش

قطع ناقص ہے جسکے محاور ۲ اُ اور ۲ بَ ہیں۔ مائع اور اسطوانہ دونوں اسطوانہ کے محور کے گرد یکساں زاوئی رفتار سہ سے گھومتے ہیں۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ہم ماسکی ناقصی اسطوانہ ہے جسکے محاور ۲ ا اور ۲ ب ہیں ایسے کہ

$$\text{سہ}^2 (ا + ب)^2 = ۴ \, \text{ہ} \, \text{ث} \, (ا ب - اَ بَ)$$

۷۹ ــ متجانس مائع کی کمیت (ک) اضافی توازن میں ایک ثابت محور کے گرد یکساں زاوئی رفتار سے گھوم رہی ہے اس طرح کہ اس کی سطح کی بیلیجیت (مہ) چھوٹی ہے۔ اگر کمیت کا مہ ک حصہ مرکز پر ایک لامتناہی کثیف مادی نقطہ کی شکل میں منجمد ہو جائے اور بقیہ حصے (۱- مہ) ک کی کثافت کو نسبت ا- مہ : مہ میں گھٹا دیا جائے تو توازن کی صورت میں اس نئی سطح کی بیلیجیت کیا ہوگی اگر گردش کا وقت وہی فرض کیا جائے جو پہلے تھا۔

۸۰ ــــ یکساں کثافت کا ایک ٹھوس ناقص نما اپنے اقل محور کے گرد گھومتا ہے اور اس کے گرد مختلف کثافت کے متجانس مائع کا ایک غلاف ہے جسے یہ ساتھ لئے رہتا ہے کل کمیت قانون قدرت کے بموجب کشش رکھتی ہے۔ ان شرائط کا معلوم کرنا مطلوب ہے جن کے پورا ہونے پر آزاد سطح ناقص نمائی شکل اختیار کرسکے (Prof. Townsend. Math. of Ed. Tinus Vol. xxxv) (۲۳۱)

۸۱ ـــــ ث + ثہ کثافت کے ٹھوس کروں کی کچھ تعداد ث کثافت کے سیال میں متوازن ہے کل نظام ایک مجوف کرہ میں ہے۔ اگر کل کمیت تجاذبی ہو تو ثابت کرو کہ کروں کی کمیت کا مرکز مجوف کرہ کے مرکز پر ہونا چاہیئے۔ نیز اگر صرف دو کرے ہوں تو نقطہ تماس پر ان کے درمیان دباؤ ہوگا

$$\frac{۱۶}{۹} \, \text{ہ}^2 \, ا^3 \, ب^3 \, \text{ثہ} \left\{ \frac{\text{ث}}{ا^2 - ا ب + ب^2} + \frac{\text{ثہ}}{(ا + ب)^2} \right\}$$

جہاں ا، ب کروں کے نصف قطر ہیں۔

۸۲ ــــ ایک ٹھوس متجانس ناقص نما کے اندرونی حصہ میں ایک ہم مرکز کروی خول ہے جو بے لچک متجانس سیال سے بھرا ہوا ہے۔ کل مادہ قانون قدرت کی

بموجب کشش رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں مخروطی نما ہیں اور اگر اس نظام کی ایک معین سطح پر کوئی نقطہ ن ہو تو مرکز و میں سے گذرنے والی اور ن و پر علی القوائم سطح مستوی پر کا حاصل دباؤ ھ + ک / و ن² ہوگا جہاں ھ، ک مستقل ہیں جو مساوی دباؤ کی منتخب شدہ سطح پر منحصر ہیں۔

۸۳ —— اگر ظرف غواص کو ایک زنجیر کے ذریعہ پانی میں لٹکایا جائے اور وہ پانی میں پوری طرح ڈوبا ہوا ہو تو ثابت کرو کہ اس کا محور انتصابی نہ رہیگا جب تک کہ

$$\text{و}\left(1 - \frac{1}{\text{س}}\right)\text{گ} - \text{وَ گَ} - \frac{\text{اَ کَ}^{2}\,\text{وَ}}{\text{ح}}$$

مثبت نہ ہو جہاں و ظرف غواص کا وزن ہے، وَ اندرونی ہوا سے ہٹائے ہوئے سیال کا وزن، ح اندرونی ہوا کا حجم، س ظرف غواص کے مادے کی کثافت اضافی، ا کہ² اندرونی مائع کی ہموار سطح کی عمودی تراش کے جمود کا معیار، گ اور گَ ظرف غواص اور حجم ح کے مراکز ثقل کی گہرائیاں اس نقطہ کے نیچے جس پر زنجیر باندھ دی گئی ہے۔

۸۴ —— ایک ظرف غواص اندر کی طرف سے ایک گردشی مکافی نما شکل سے محدود ہے اس کا ارتفاع ب اور قاعدہ کا نصف قطر ا ہے۔ اگر پانی کی سطح کے نیچے ظرف کے قاعدے کی گہرائی ل ہو تو ثابت کرو کہ ظرف میں ف بلندی تک پانی چڑھ جائیگا جہاں

$$\text{ف}\,\text{ف}\,(2\text{ب} - \text{ف}) = (\text{ل} - \text{ف})(\text{ب} - \text{ف})^{2},$$

ف آبی بارپیما کا ارتفاع ہے۔

نیز اگر ظرف غواص پوری طرح غرق ہو اور اس کو ایک چھوٹے زاویہ ط میں گھمایا جائے تو ثابت کرو کہ استردادی معیار ہے

$$\left\{\text{ک} - \pi\,\text{ثہ}\,\text{ج}\,\text{ا}^{2}(\text{ب} - \text{ف})^{2}(4\text{ب}^{2} - 4\text{ب}\,\text{ف} + 3\text{ا}^{2})\quad 12\,\text{ب}^{2}\right\}\text{ط}$$

جہاں ک مستقل ہے جو ف پر منحصر نہیں اور ثہ پانی کی کثافت ہے۔

۸۵ —— ث_1، ث_2، ث_3 ...... $\text{ث}_{\text{ن}}$ کثافتوں کے مائعات کی ایک تعداد

قوت کے تجاذبی میدان میں متوازن ہے۔ اگر ایک ٹھوس کرہ ابتدائً سب سے اوپر کے مائع ش ن میں پوری طرح ڈوبا ہوا ہو اور پھر اسکو آہستہ آہستہ نیچے ڈھکیلا جائے یہاں تک کہ یہ پوری طرح سب سے نچلے مائع ش۱ میں پوری طرح غرق ہو جائے اور اگر کرہ کا حجم ح بمقابلہ ہر مائع کے حجم کے چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ سیالی دباؤ کے خلاف جو کام ہوتا ہے وہ تقریباً

$$ح\{(ح - ح_۱)ش_۱ + (ح_۱ - ح_۲)ش_۲ + \dots + (ح_{ن-۲} - ح_{ن-۱})ش_{ن-۱} + (ح_{ن-۱} - \bar{ح})ش_ن\}$$

کے مساوی ہے جہاں ح اور حَ کرہ کے ابتدائی اور آخری محلوں میں اس کے مرکز پر کے قوے ہیں اور $ح_۱$، $ح_۲$، $ح_۳$، .... $ح_{ن-۱}$، فاصل سطحوں پر کے قوے ہیں۔

۸۶ — دو متجانس کرے ث کثافت کے بے لچک متجانس سیال میں غرق (۲۲
اور ساکن ہیں۔ کروں کے نصف قطر ب اور بَ اور کثافتیں ثہ اور ثَہ ہیں۔ کمیتوں کی پیمائش تجاذبی اکائیوں میں کی گئی ہے۔ کل کمیت کو ایک استوار کروی لفافہ میں بند کردیا گیا ہے جس سے وہ عین بھر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ث کثافت کے کرہ پر عمل کرنیوالی کشش اور دباؤ کی سب قوتیں ایک قوت $\frac{۱۶}{۹}\pi^۲$ ث (ثہ - ث) $ب^۳$ ج اور دفاعی قوت $\frac{۱۶\pi^۲(ث - ثہ)(ثَہ - ث)ب^۳بَ^۳}{۹د^۲}$ میں تحویل ہو سکتی ہیں جبکہ قبل الذکر دفاعی قوت لفافے کے مرکز سے اور موخر الذکر دوسرے کرہ کے مرکز سے باہر وا عمل کرے۔ ج لفافے کے مرکز سے اور د دوسرے کرہ کے مرکز سے زیر بحث کرہ کے مرکز کے فاصلے ہیں۔

۸۷ — کچھ تجاذبی کمیت جسکی سطح ہم قوہ سطح ہے سیال سے گھری ہوئی ہے۔ سیال کی کشش بالذات نظر انداز کیجا سکتی ہے ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ سطح پر کے

دباؤ سے بقدر

$$\frac{1}{\text{۴ ۳ مہ ک}} \iiint \text{ث ح}^{2}\ \text{فرلا فرما فری}$$

کے کم ہے جہاں ح حاصل قوت، ک کل جاذب کمیت، مہ کشش کا مستقل ہے اور تکمل مساوی دباؤ کی دونوں سطحوں کے درمیانی کل حجم پر لیا گیا ہے۔

۸۸ ــــــ ایک متجانس جاذب ٹھوس کا حجم $\frac{4}{3}$ ۳ ھ۳ اور کثافت ث + ۂ ہے۔ اس کی شکل تقریباً کروی ناقص نما

$$\text{س} \equiv \text{ا لا}^{2} + \text{ب ما}^{2} + \text{ج ی}^{2} + \text{۲ ف ی ما} + \text{۲ گ ی لا} + \text{۲ ھ لا ما} = 1$$

کی ہے اور یہ $\frac{4}{3}$ ۳ (ح۳ - ھ۳) حجم کے جاذب سیال سے گھرا ہوا ہے جس کی کثافت ث ہے۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل جبکہ نظام توازن میں ہو یہ ناقص نما

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} - \text{ح}^{2} = \text{ل} \left\{ \text{ھ}^{2}\ \text{س} - (\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}) \right\}$$

ہے جہاں

$$\text{ل} = -\text{۳ ھ}^{5}\ \text{ۂ} / \text{ح}^{2}\ (\text{۲ ح}^{3}\ \text{ث} + \text{۵ ھ}^{3}\ \text{ۂ})$$

۸۹ ــــــ سیال کامل کے ہر نقطہ پر صغیر اختیاری ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر ہٹاؤ کے اجزائے تحلیلی محوروں کے متوازی مف لا، مف ما، مف ی ہیں جہاں مف لا، مف ما، مف ی اختیاری مسلسل تفاعل ہیں لا، ما، ی کے۔ ثابت کرو کہ کل حجم میں دباؤ جو کام کرتا ہے وہ کل کام

$$\iiint \text{د} \left(\frac{\text{جف مف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مف ما}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف مف ی}}{\text{جف ی}} \right) \text{فرلا فرما فری}$$

ہے جہاں د کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے اور تکمل کل حجم میں لیا گیا ہے۔ اس طرح ثابت کرو کہ سیال کے توازن کیلئے شرط ہے

$$\text{فرد} = \text{ث} (\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ی فری})$$

جہاں ث، لا، ما، ی علی الترتیب کثافت اور [illegible] قوت کے اجزائے ترکیبی فی اکائی کمیت ہیں۔

فہرست اصطلاحات

نوٹ :- ان اصطلاحات کو اُردو حروف تہجی کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے ۔

آب خطارقبہ	Water line area
اچھال کا مرکز	Centre of buoyancy
اچھال کی سطح	Surface of buoyancy
احصائے تغیرات	Calculus of variations
ادنیٰ حدود	Inferior limits
اُڑ پہیہ	Flying wheel
استردادی معیار	Restorative moment
استعداد حرارت	Thermal capacity
اُستوائی تراش	Meridonal section
اشعاع	Radiation
اضافی توازن	Relative equilibrium
اعلیٰ حدود	Superior limits
امتدادپذیر	Extensible

Inextensible	امتداد ناپذیر
Freezing machine	انجمادی مشین
Deflection	انحراف
Upward pressure	اوپر وار دباؤ
Apses	اوجین
Mean centre	اوسط مرکز
Conduction	ایصال
Load	بار
Barometer	بار پیما
Upper limit	بالائی حد
Vapour	بخار
Evolute	برپیچہ
Dilatation	بسط
Incompressible	بے پچک
Lamina	پترا
Compression	پچکاؤ
Compressible	پچک پذیر
Metacentre	پس مرکز، مرکز مابعد
Paddle steamer	پنکھابانی جہاز
Lune	پھانک
Turn *of a helix*	پھیر (مرغولہ کا)
Hold *of a ship*	پیٹا (جہاز کا)
Screw	پیچ
Screw-steamer	پیچ بانی جہاز
Constant of gravitation	تجاذب کا مستقل

Gravitating solid	تجاذبی ٹھوس
Configuration	تشکیل
Counterbalance	تعدیل کرنا
Variation	تغیر
Righting moment	تقویمی معیار
Line of contact	تماسی خط
Tension	تناؤ
Tensile	تناوی
Kinetic energy	توانائی بالفعل
Potential energy	توانائی بالقوہ
Line of floatation	تیراؤ کا خط
Plane of floatation	تیراؤ کا مستوی
Surface of floatation	تیراؤ کی سطح
Floating bodies	تیرنے والے اجسام
Lintearia	توبیہ
Self-attracting	جاذب بالذات
Life-belt	جان پیٹی
Algebrical moment	جبری معیار
Couple	جفت
Product of Inertia	جمود کا حاصل ضرب
Film, membrane	جھلی
Oblate spheroid	چپٹا کرہ نما
Annulus	چنبر
Thread	چوڑی (پیچ کی)

Boundary conditions	حدودی شرطیں
Terminal conditions	حَدّی شرطیں
Specific heat	حرارت نوعی
Adiabetic	حرناگذر
Convective equilibrium	حملی توازن
Water line	خط آب
Cycloid	خط تدویر
Line of action	خط عمل
Line of greatest slope	خط میلان اعظم
Shell	خول
Period	دور
Bifurfaction	دوشاخگی
Shaft	دھرا
Impulsive tension	دھکا تناؤ
Wall- sided ship	دیوار پہلو جہاز
Sheet iron	ڈھلا ہوا لوہا
Intrinsic pot. energy	ذاتی توانائی بالقوہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Quarter-period	ربعی دور
Areal section	رقبی تراشش
Wrench	ریچ
Hyperboloid	زائدنما
Hyperboloid of one sheet	زائدنما اک چادری
Hyperboloid of two sheets	زائدنما دو چادری
Saturn	زحل

زنجیرہ	Catenary
زنجیرہ نما	Catenoid
زور	Stress
زیرین حد	Lower limit
سکان	Stern
سہ خطی محدد	Trilinear co-ordinates
سیال	Fluid
سیال کامل	Perfect fluid
شعاری منحنی	Capillary curve
صابونی بلبلہ	Soap-bubble
صدری انحناء	Principal curvature
صدری محور	Principal axes
صدری تناؤ	Principal tension
ضد انحنائی	Anticlastic
ضروری اور کافی شرطیں	Necessary & sufficient conditions
طبعی حیثیت	Normal mode
طبقات	Strata
طولی	Longitudinal
عرشہ (جہاز کا)	Deck
عرضی	Transverse
عقدہ نما	Nodoid
عنصر، جزو	Element
غیر متجانس	Hetrogeneous
فاصل آب	Water-section
فصل پذیری	Separability

فلکی کثافت	Astronomical density
فیدم	Fathom
قابلہ	Receiver
قائم زائد	Rectangular hyperbola
قبضہ	Hinge
قدامہ	Bow
قسمت پذیری	Divisibility
قطع مکافی	Parabola
قوتی تفاعل	Force function
قوت مائل بہ نقطہ	Force to a point
قید	Constraint
قید کرنیوالی قوتیں	Constraining forces
کتبیات	Bibiliography
کرہ نما	Spheroid
کرنیک	Crank
کمیت کا مرکز	Centre of mass
گام (مرغولہ کا)	Step *of a helix*
گردش کا نصف قطر	Radius of gyration
گردشی سطح	Surface of revolution
گرد دنیہ	Roulette
گھائی	Pitch
گھیرا	Periphery, perimeter
لدنیہ	Elastica
لفیفے	Convolutions
لنگرچھلا	Anchor-ring

Sinuous	لہریلا
Hydrodynamical	ماحرکی
Hydrostatics	ماسکونیات
Focal conic	ماسکی مخروطی
Parameter	مبدل
Homogeneous	متجانس
Equilateral Hyperbola	متساوی المحاور زائد
Isoscelus prism	متساوی الوجہین منشور
Similar and Similarly situated	متشابہ اور متشابہاً واقع
Variable	متغیر
Variable density	متغیر کثافت
Convex	محدب
Position	محل
Axial plane	محوری مستوی
Helix	مرغولہ
Helicoid	مرغولہ نما
Metacentre	مرکز مابعد
Nucleus	مرکزہ
Centroid	مرکز ہندسی
Torsion	مڑوڑ
Surfaces of equipressure	مساوی دباؤ کی سطحیں
Plane	مستوی
Momental ellipsoid	معیاری ناقص نما
Concave	مقعر

Modulus	مقیاس
Bodies under constraint	مقید اجسام
Paraboloid	مکافی نما
Flexible surface	ملائم سطح
Unduloid	موج نما
Ellipsoid	ناقص نما
Elliptic Integral	ناقصی تکملہ
Elliptic paraboloid	ناقصی مکافی نما
Synclastic	ہم انحنائی
Dew point	نقطۂ شبنم
Downward pressure	نیچے وار دباؤ
Medial line	وسطی خط
Trim *of a ship*	وضع (جہاز کی)
Displaced fluid	ہٹایا ہوا سیال
Isothermal	ہم تپشی
Level	ہموار سطح
Air-tight	ہوا بند

ترقیم

p = pressure	د = دباؤ
p = perpendicular	ع = عمود
$p = \frac{dy}{dx}$	ع = فرما / فرلا
P = point	ن = نقطہ
P_n = Legenders $n$tn coefficient	ع ن = لیجنڈر کا ان واں سر
P = power	ط = طاقت
ρ = density	ث = کثافت
ρ = radius of curvature	نما = انحنا کا نصف قطر
σ = density	ثہ = کثافت
f = acceleration	س = اسراع
f = function	ف = تفاعل
F = force	ق = قوت
k = constant	ک،م = مستقل
k = radius of gyration	ہما = گردش کا نصف قطر
K = quarter period	ک = ربعی دور
v = volume	ح = حجم
V = volume	ح، ح = حجم
V = potential fn.	فہ = قوۂ تفاعل
W = weight	و = وزن
m = mass	ک = کمیت

M = mass	ک = کمیت
M = metacentre	م = مرکز مابعد
g = acc. due to gravity	ج = اسراع بوجہ جاذبہ ارض
G = centre of gravity	ث = مرکز ثقل
S = Surface	س = سطح
s = length of an arc	س = قوس کا طول
C = constant	م، م = مستقل
C = centre	ج = مرکز
C = centroid	ث = مرکز ہندسی
C = point	ج = نقطہ
c = capacity	گ = گنجایش
c = semi- axis	ج، ح = نیم محور
$W = g\rho v$	و = ج ث ح
r = radius	ر = نصف قطر
r = distance	ف = فاصلہ
r, θ, φ = polar co-ordinates	ر، ط، فہ = قطبی محدد
r, θ, z = cylinderical co-ordinates	ر، ط، ی = اسطوانی محدد
R = resultant	حا، ح = حاصل
R = reaction	حا = تعامل
t = temperature	ت = تپش
T = tension	ت = تناؤ
T = absolute temperature	ت = تپش مطلق
t = time	ت = وقت
h = height	ف = ارتفاع
h = depth	گ = گہرائی

$H. P.$ = Horse power	ا - ط = اسپی طاقت
e = eccentricity	ز = خروج المرکز
I = moment of Inertia	مج = جمود کا معیار
n = normal	ع = عماد
x, y, z	لا ، ما ، ی
X, Y, Z	لا ، ما ، ے
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	لاَ ، ماَ ، یَ
u, v, w	ع ، و ، ھ
F (Elliptic Integral of the first kind)	ن
E (,, second kind)	ق
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
$\frac{\partial y}{\partial x}$	$\frac{\text{جفما}}{\text{جفلا}}$
δx	مفلا
$\int_{x=x_2}^{x=x_1} y\,dx$	$\int_{\text{لا=لا}_2}^{\text{لا=لا}_1}$ ما فرلا
Γ = Gamma function	جا = گاما تفاعل
ζ = Weierstrars's Zeta-function	طا = ویرسٹراس کا تفاعل
$\wp$	فھ
e	قو
$e_1\ e_2\ e_3$	ع۱ ، ع۲ ، ع۳
λ, μ, ν	لہ ، مہ ، نہ
α, β, γ	عہ ، بہ ، جہ
δ	صنہ ، مف

صہ	ε
سا	ψ
سہ	ω
π	π
Σ	Σ
خا، عا، طا	ξ, η, ζ
ظہ	θ
ھ	ϖ
جن ع	Sn u
صن ع	cn u
طن ع	dn u
حط ع	Am u
حم ع	Cotam u

ترقیم کی مختلف مجالس میں حسب تفصیل ذیل طریقہ ترقیم منظور ہوا۔

ا	ب	ج	د	ع	ف	گ
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
ح	آ	ژ	ک	ل	م	ن
H	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
ط	پ	ق	ر	س	ت	ع
O	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**
و	ھ	٧	ما	ے		
V	**W**	**X**	**Y**	**Z**		

انگریزی کے بڑے (Capital) حروف بالعموم ترجمہ میں بخط عربی لکھے جائینگے اور چھوٹے (Small) حروف بخط فارسی۔ معہذا بڑے حروف کے لئے پیمانہ بھی بڑا ہوگا۔

a	b	c	d	e	f	g	h	. . .
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح	. . .

A′	B′	C′	D′	. . . .
اَ	بَ	جَ	دَ	. . .
A_1	A_2	A_3	A_4	. . . .
ا۱	ا۲	ا۳	ا۴	. . . .

یونانی حروف

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	κ	λ	μ
عہ	بہ	جہ	ضہ	صہ	شہ	یہ	طہ	کہ	لہ	مہ
ν	ξ	ι	ο	π	ρ	σ	τ	υ	ψ	φ
نہ	ظہ	حہ	ہ	π	ر یا غہ	ثہ	ٹہ	چہ	پہ	فہ

χ = خہ ω = سہ

یونانی بڑے حروف چھوٹے حروف کی طرح لکھے جائیں گے لیکن ان کے آخر میں بجائے ہ کے ا ہوگا، مثلاً عا، با، جا وغیرہ